

**ПРИМЕРНЫЙ СПИСОК ЗАДАЧ ПО КУРСУ  
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ**  
(1-й поток) 2015–2016 УЧ. ГОД

1. Вычислить интеграл  $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos kx - \cos k\alpha}{\cos x - \cos \alpha} dx$

2. Вычислить определитель  $\Delta_m = \det \begin{pmatrix} b & c & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & b & c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b \end{pmatrix}$ .

3. Построить квадратурную формулу с  $N$  узлами для интеграла

$$I(f) = \int_0^\pi f(x) dx \sim S_N(f),$$

которая была бы точна для любого тригонометрического многочлена степени  $N - 1$ .

4. Построить квадратурную формулу Гаусса

$$\int_{-1}^1 x^2 f(x) dx \sim C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2).$$

5. Пусть функция  $\ln(2 + x)$  приближается на отрезке  $[0, 1]$  интерполяционным многочленом Лагранжа на равномерной сетке с  $N$  узлами. Найти минимальное  $N$ , при котором погрешность приближения не превосходит  $5 \cdot 10^{-4}$ .

6. Построить квадратурную формулу

$$\int_0^1 x f(x) dx \sim C_1 f(0) + C_2 f(x_2) + C_3 f(x_3),$$

точную для многочленов наиболее высокой степени.

7. Исследовать на спектральную устойчивость разностную схему

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1}}{h} = 0$$

8. Приблизить функцию  $x^3$  на отрезке  $[0, 1]$  многочленом наилучшего равномерного приближения второй степени.
9. Приблизить функцию  $x^3$  на отрезке  $[0, 1]$  многочленом наилучшего равномерного приближения первой степени.
10. Оценить снизу величину  $\|e^x - P_4(x)\|_{C[0,1]}$ , где  $P_4(x)$  – многочлен наилучшего равномерного приближения.
11. Для функции  $\cos x$  на отрезке  $[-1, 1]$  построить многочлен четвертой степени  $P_4(x)$  такой, что  $\|\cos x - P_4(x)\|_{C[-1,1]} \leq 1.5 \cdot 10^{-4}$ .
12. Построить наилучшее среднеквадратичное приближение функции  $f(x) = \sin x$  многочленом второй степени на отрезке  $[0, \pi]$ .
13. Построить кубический сплайн по значениям  $f(0)$ ,  $f(1)$ .
14. Построить кубический сплайн по значениям  $f(0)$ ,  $f(1)$ ,  $f(2)$ .
15. Доказать, что если  $A = A^T > 0$ , то  $a_{ii} > 0$ .
16. Пусть числа  $p_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  являются положительными. Доказать, что выражение  $\sum_{k=1}^n |x_k| p_k$  определяет норму вектора  $\mathbf{x}$ . Найти норму матрицы, согласованную с этой нормой вектора.
17. Пусть  $A = A^T > 0$ . Доказать, что итерационный метод

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n - 0.5\tau(A(\mathbf{x}^{n+1} + \mathbf{x}^n) - 2\mathbf{b})$$

сходится при любом  $\tau > 0$  к решению системы ЛАУ  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Оценить скорость сходимости метода, если известны  $\lambda_{\min}(A)$ ,  $\lambda_{\max}(A)$ .

18. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.1 & 3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.1 & 4.8 \end{pmatrix}.$$

Показать, что итерационный метод  $\mathbf{x}^{n+1} = (I - \tau A)\mathbf{x}^n + \tau\mathbf{b}$  сходится при  $0 < \tau < 0.4$ .

19. Пусть собственные значения матрицы  $A$  удовлетворяют условиям  $\lambda_1 \approx -1$ ,  $\lambda_k \in [1, 5]$ ,  $k = 2, \dots$ . Для решения системы ЛАУ  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  выписать сходящийся итерационный метод типа метода Рундсона с переменными параметрами.

20. Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  – известные собственные значения матрицы  $A$ . Выписать метод простой итерации с переменным шагом  $\tau_k$ , который через  $m$  шагов давал бы точное решение системы ЛАУ  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

21. Выяснить, к какому из корней уравнения  $x^3 - x = 0$  в зависимости от начального приближения  $x_0$  сходится метод Ньютона. Возможна ли расходимость?

22. Найти порядок аппроксимации разностной схемы

$$\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} = \frac{u_{n+1} + 2u_n + u_{n-1}}{4}, \quad u_0 = u_N = 0, \quad h = 1/N$$

краевой задачи  $u'' = u$ ,  $u(0) = u(1) = 0$  и исследовать ее устойчивость.

23. Аппроксимирует ли конечно-разностная схема

$$\frac{u_{n+1} - 3u_n + u_{n-1}}{2h} - f(x_n, u_n) = 0$$

уравнение  $u' = f(x, u)$ ?

24. Для краевой задачи

$$\Delta u = f, \quad u = 0 \quad \text{при } y = 0, y = 1, x = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{при } x = 0$$

выписать разностную схему с порядком аппроксимации  $O(h^2)$  и предложить метод решения получающейся системы ЛАУ.

25. Для начально-краевой задачи

$$u_t = u_{xx} + f(x, t), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u_x(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0$$

построить разностную схему с порядком аппроксимации  $O(h^2 + \tau^2)$ , которая на каждом шаге по времени требовала бы решения системы уравнений с трехдиагональной матрицей.

26. Для краевой задачи в единичном квадрате

$$\Delta u = f, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

выписать разностную схему с порядком аппроксимации  $O(h^4)$  и предложить метод решения получающейся системы ЛАУ.