

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Механико-математический факультет

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДИСЦИПЛИНЫ

Численные методы

Специальность: 010701.65 "Фундаментальная математика и механика"

Квалификация (степень) выпускника: специалист

Форма обучения: очная, дневная

Автор: профессор кафедры вычислительной математики механико-математического факультета МГУ, д.ф.-м.н. Корнев А.О.

Москва
2013

I. Название дисциплины: **Численные методы**

II. Цели и задачи дисциплины:

А. Цели дисциплины: получение теоретических знаний о принципах построения и математического обоснования современных численных методов.

Б. Задачи дисциплины: формирование и развитие знаний, практических навыков и умений, обеспечивающих использование известных и разработку новых численных методов для широкого круга прикладных задач.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

1) знать

- основные направления развития современных численных методов;
- основные понятия, используемые в численных методах;
- основные методы приближения функций;
- основные методы численного интегрирования;
- основные методы линейной алгебры;
- основные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений;
- основные методы для задач математической физики;
- достоинства и недостатки изученных методов, их сравнительные характеристики;
- основные принципы организации программ, реализующих изученные методы.

2) уметь

- применять полученные знания для разработки численных алгоритмов решения различных прикладных задач
- выбирать наиболее оптимальные способы решения
- оценивать их трудоемкость и устойчивость
- иметь представление о создании программ, реализующих изученные численные методы.

III. Место дисциплины / практики в структуре ООП:

Б. Информация о месте дисциплины в учебном плане:

- 4 курс;
- 7 и 8 семестры.

В. Перечень дисциплин, которые должны быть освоены для начала освоения и параллельно данной дисциплине: основы математического анализа, линейная алгебра, дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных.

Г. Общая трудоемкость: 288 академических часов.

Д. Формы промежуточной аттестации: контрольные работы, коллоквиумы, зачеты, экзамен.

IV. Формы проведения занятий:

- форма занятий с указанием суммарной трудоемкости по каждой форме:
 - аудиторная работа, лекции – 70 часов;
 - аудиторная работа, семинары – 70 часов;
 - самостоятельная работа – 148 часов; (*смотри учебный план*)
- формы текущего контроля: домашние задания (еженедельно), контрольные работы (6 контрольных работ за год), коллоквиумы (4 коллоквиума за год).

V. Распределение трудоемкости по разделам и темам, а также формам проведения занятий с указанием форм текущего контроля и промежуточной аттестации

ПО НЕДЕЛЯМ:

№ п/п	Наименование разделов и тем дисциплины	Трудоемкость (в ак. часах) по формам занятий			Формы контроля
		Аудиторная работа (с разбивкой по формам и видам)		Самостоятельная работа	
		Лекции	Семинары		
1	Тема 1. Вычислительная погрешность.	2	2	4	Домашнее задание
2	Тема 2. Разностные уравнения.	8	8	16	Домашнее задание. Контрольная работа.
3	Тема 3. Решение дифференциальных уравнений.	14	14	30	Домашнее задание. Контрольная работа. Коллоквиум.
4	Тема 4. Численные методы линейной алгебры.	18	18	38	Домашнее задание. Контрольная работа. Коллоквиум.
5	Тема 5. Приближение функций одной переменной.	12	12	24	Домашнее задание. Контрольная работа.
6	Тема 6. Численное интегрирование.	10	10	22	Домашнее задание. Контрольная работа.
7	Тема 7. Решение нелинейных уравнений.	6	6	14	Домашнее задание. Контрольная работа. Коллоквиум.
	Итого:	70	70	148	

VI. Содержание дисциплины - аудиторная и самостоятельная работа:

Тема 1. Вычислительная погрешность.

Содержание лекции.

Вычислительная погрешность. Устойчивость задачи и численного алгоритма (учебное пособие [1], стр.4-7).

Содержание семинара.

Повторение теоретического материала (учебное пособие [2], стр.7-8); выборочное решение задач (учебное пособие [2], № 1.1-1.5).

Задания для самостоятельной работы.

Разбор лекционного материала (учебное пособие [1], стр. 4-7). Решение упражнений, предложенных на дом (учебное пособие [2], № 1.6-1.9).

Тема 2. Разностные уравнения.

Содержание лекций.

Линейные разностные уравнения n -го порядка. Теоремы о представлении общего решения однородного уравнения и общего решения неоднородного уравнения ([1],стр.8-9). Линейные разностные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами. Формулировка теорем о представлении общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения с квазимногочленом в правой части. Форма записи действительного решения ([1],стр.9-11). Фундаментальное решение разностного уравнения. Теорема о представлении частного решения неоднородного уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами ([1],стр.11-13). Решение задач на собственные значения для разностных уравнений, сравнение с дифференциальным случаем ([1],стр.13-15). Построение многочленов Чебышёва первого и второго рода ([1],стр.16-17). Свойства многочленов Чебышёва первого рода: симметричность, нули, экстремумы. Теоремы о композиции ([1], стр.17-18). Экстремальные свойства многочленов Чебышёва первого рода на отрезке $[a,b]$ ([1], стр.19-20). Экстремальные свойства многочленов Чебышёва первого рода вне (a,b) ([1], стр.21).

Содержание семинаров.

Повторение теоретического материала ([2], стр. 21,22,35,36,47,53-56); выборочное решение задач ([2], № 2.1-2.105).

Задания для самостоятельной работы.

Разбор лекционного материала ([1], стр. 8-21). Решение упражнений, предложенных на дом ([1], № 2.1-2.105).

Тема 3. Решение дифференциальных уравнений.

Содержание лекций.

Конечно-разностный метод. Аппроксимация, устойчивость, сходимости, теорема Филиппова ([1], стр.22-26). Метод неопределенных коэффициентов построения разностных схем. Погрешность формул численного дифференцирования, оценка для оптимального шага ([1], стр.26-28). Задача Коши, условия аппроксимации p -го порядка на решении, α -устойчивость. Модельные схемы ([1], стр.28-31). Численные методы решения задачи Коши: метод Тейлора, методы Адамса (стр.32-35). Методы Рунге-Кутты для решения задачи Коши ([1], стр.35-36). Вычисление главного члена погрешности для простейших схем для задачи Коши. Оценка глобальной погрешности явного одношагового метода ([1], стр.37-39). Устойчивые и неустойчивые задачи. Жесткие системы ([1], стр.39-41). Метод Лебедева решения жестких систем ([1], стр.41-42). Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка, аппроксимация, α -устойчивость. Аппроксимация краевых условий третьего рода ([1], стр.43-45). Устойчивость краевой задачи для уравнения второго порядка: метод собственных функций ([1], стр.45-46). Устойчивость краевой задачи для уравнения

второго порядка: энергетический метод ([1], стр.46-48). Метод прогонки ([1], стр.49-52). Метод стрельбы и метод Фурье ([1], стр.52-54).

Содержание семинаров.

Повторение теоретического материала ([2], стр.254-260, 290-292, 302-305, 307-309, 280-289); выборочное решение задач ([2], № 7.1-7.3; 8.1-8.8; 8.10-8.22; 8.33-8.35; 8.36-8.43; 8.50-8.57).

Задания для самостоятельной работы. Разбор лекционного материала ([1], стр. 22-54). Решение упражнений, предложенных на дом ([1], № 7.1-8.57). Подготовка к контрольной работе по данной теме. Подготовка к коллоквиуму ([1], стр. 4-54).

Тема 4. Численные методы линейной алгебры.

Содержание лекций.

Нормы векторов, линейных операторов, обусловленность матрицы. Оценка возмущения решения системы линейных алгебраических уравнений при возмущении правой части ([1], с.55-59). Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений. Алгоритм ортогонализации Грама - Шмидта ([1], с.59-66). Метод отражений ([1], с.62-64). Невырожденная задача наименьших квадратов: метод нормального уравнения, метод QR-разложения ([1], с.66-67). Задача наименьших квадратов неполного ранга: методы QR-разложения и QR-разложения с выбором главного столбца ([1], с.68-70). Сингулярное разложение. Теорема о наилучшем приближении матрицы малоранговыми матрицами в норме, подчиненной евклидовой ([1], с.70-73). Решение задачи наименьших квадратов полного и неполного рангов методом сингулярного разложения ([1], с.71-72). Задача наименьших квадратов с линейными ограничениями-равенствами: методы исключения, обобщенного сингулярного разложения, взвешиванием ([1], с.73-75). Задача наименьших квадратов с ограничениями типа квадратных неравенств: метод обобщенного сингулярного разложения ([1], с.75-77). Метод простой итерации $x^{k+1} = B x^k + c$ для решения систем линейных алгебраических уравнений ([1], с.77-79). Линейный оптимальный одношаговый метод и линейный оптимальный N-шаговый метод ([1], с.79-83). Метод наискорейшего градиентного спуска и метод минимальных невязок ([1], с.83-86). Итерационные методы с предобуславливателем ([1], с.86-88). Методы Гаусса - Зейделя, Якоби и верхней релаксации ([1], с.88-90). Проекционный алгоритм решения систем линейных алгебраических уравнений. Проекционная теорема, экстремальное свойство. Одномерные алгоритмы ([1], с.91-93). Метод сопряженных градиентов ([1], с.93-95). Степенной метод со сдвигом для задач на собственные значения ([1], с.96-99). Метод обратной итерации со сдвигом для задач на собственные значения. Отношение Рэля ([1], с.98-101). Инвариантные подпространства. Метод итерирования подпространств. QR-алгоритм ([1], с.101-103).

Содержание семинара.

Повторение теоретического материала ([2], стр.138-139, 150-151, 164-165, 173-175, 183-186; 187-189; 222-230); выборочное решение задач ([2], № 5.1-5.6; 5.42-5.50; 5.72-5.125; 5.137-5.159; 5.209-5.220).

Задания для самостоятельной работы.

Разбор лекционного материала ([1], стр. 55-103). Решение упражнений, предложенных на дом ([1], № 5.1-5.220). Подготовка к контрольной работе по данной теме. Подготовка к коллоквиуму ([1], стр. 55-82).

Тема 5. Приближение функций одной переменной.

Содержание лекций.

Интерполяционный многочлен Лагранжа. Минимизация остаточного члена погрешности. ([1], с.104-107). Наилучшее приближение в линейном нормированном и гильбертовом пространствах ([1], с.107-110). Многочлен наилучшего равномерного приближения. Теорема Валле - Пуссена. Теорема Чебышёва ([1], с.110-111). Примеры построения многочлена наилучшего равномерного приближения. Теорема единственности ([1], с.111-112). Сплайн интерполяция. Линейный интерполяционный сплайн ([1], с.112-113). Кубический

интерполяционный сплайн ([1], с.113-115). Локальный (аппроксимационный) сплайн ([1], с.115-116). Приближение по многочленам Чебышёва ([1], с.117-118). Дискретное преобразование Фурье. Свойства, примеры ([1], с.118-120). Быстрое преобразование Фурье для $N=n_1n_2$, $N=2^k$ (рекурсивная форма) ([1], с.120-122). Интерполяция Паде-Якоби. Многоточечная интерполяция Паде ([1], с.122-123).

Содержание семинаров.

Повторение теоретического материала ([2], стр.61-62, 73-75, 86-87, 93-95); выборочное решение задач ([2], № 3.1-3.86; 3.105-3.136).

Задания для самостоятельной работы.

Разбор лекционного материала ([1], стр. 103-123). Решение упражнений, предложенных на дом ([1], № 3.1-3.136). Подготовка к контрольной работе по данной теме. Подготовка к коллоквиуму ([1], стр. 83-123).

Тема 6. Численное интегрирование.

Содержание лекции.

Метод неопределенных коэффициентов построения квадратур ([1], стр.124-125). Интерполяционные квадратуры ([1], стр.126-128). Составные квадратуры ([1], стр.128-129). Ортогональные многочлены ([1], стр.129-133). Квадратурные формулы Гаусса ([1], стр.133-136). Задачи оптимизации квадратур ([1], стр.136-138). Правило Рунге оценки погрешности. Построение программ с автоматическим выбором шага ([1], с.138-141). Метод Монте-Карло вычисления интегралов ([1], стр.141-143). Вычисление интегралов в нерегулярном случае ([1], стр.144-147).

Содержание семинаров.

Повторение теоретического материала ([2], стр.105-107, 113-114, 120-121, 129-131,134-135); выборочное решение задач ([2], № 4.1-4.101).

Задания для самостоятельной работы.

Разбор лекционного материала ([1], стр. 123-146). Решение упражнений, предложенных на дом ([1], № 4.1-4.101). Подготовка к контрольной работе по данной теме.

Тема 7. Решение нелинейных уравнений.

Содержание лекций.

Метод простой итерации: сжимающие и слабо сжимающие отображения ([1], стр.147-151). Конструктивные теоремы о сходимости метода простой итерации и существовании корней уравнения ([1], стр.151-152). Метод хорд, метод секущих: расчетные формулы и теоремы сходимости. Метод парабол ([1], стр.152-154). Метод Ньютона в R^1 ([1], стр.154-155). Методы типа простой итерации для решения систем нелинейных уравнений. Методы установления ([1], стр.156-157). Метод Ньютона в R^m ([1], стр.157-158). Интерполяционные методы построения итераций высшего порядка: метод Чебышёва, δ^2 -процесс Эйткена, метод Стефенсона – Хаусхолдера - Островского ([1], стр.158-160).

Содержание семинаров.

Повторение теоретического материала ([2], стр.231-235, 244-247); выборочное решение задач ([2], № 6.1-6.47).

Задания для самостоятельной работы.

Разбор лекционного материала ([1], стр. 147-160). Решение упражнений, предложенных на дом ([2], № 6.1-6.47). Подготовка к контрольной работе по данной теме. Подготовка к коллоквиуму ([1], стр. 123-160).

VII. Используемые образовательные, научно-исследовательские и научно-производственные технологии:

А. Образовательные технологии: интерактивные лекции и семинары; решение типовых задач; активное обсуждение и оценка работы студентов в группе; самостоятельная работа.

Б. Научно-исследовательские технологии: изучение специальной литературы, научных статей ведущих отечественных и зарубежных специалистов.

VIII. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов, оценочные средства контроля успеваемости и промежуточной аттестации:

А. Учебно-методические рекомендации для обеспечения самостоятельной работы студентов, в том числе ссылки на методические материалы, размещенные на сайте кафедры:

<http://mexmat.lib.ru> : Корнев А.А.

Б. Примерный список заданий для проведения текущей и промежуточной аттестации:

Примеры контрольных работ.

Контрольная работа № 1.

1. Найти общее действительное решение уравнения $28y_{k-1} + 10y_k + y_{k+1} = 0$.
2. Найти решение разностной задачи $y_{k+2} + y_k = 2 \cos \frac{\pi k}{2}$, $y_0 = 2, y_1 = 1$.
3. Выписать вид общего решения уравнения $y_k - 5y_{k-1} + 6y_{k-2} = 2^k(1 + k^3)$.
4. Найти ограниченное фундаментальное решение уравнения $y_{k+1} - \frac{8}{3}y_k - y_{k-1} = \delta_k^0$
5. Найти все решения задачи на собственные значения

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = -\lambda y_k \quad 1 \leq k \leq N-1, y_0 = 0, y_N = y_{N-1}, h = \frac{1}{N-1}.$$

Контрольная работа № 2.

1. Для уравнения $y'(x) = f(x)$ построить схему наивысшего порядка аппроксимации вида $\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = \frac{af_k + 8f_{k+1} - f_{k+2}}{12}$, найти главный член погрешности и исследовать устойчивость.
2. Для решения задачи $y' = y, y(0) = 2$ рассмотрим схему $\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = y_k + 1, y_0 = 2, k \geq 0$. В разложении ошибки $y(x_k) - y_k = c_1 h + c_2 h^2 + \dots$ найти постоянную c_1 для $x_k = 1$.
3. Для уравнения $y'' = \cos x + 1$ построить аппроксимацию второго порядка по двум точкам правого краевого условия $y' - 3y = 1$, заданного при $x = 1$.
4. Для задачи $y + 12y' = \sin 5x, y(0) = 2$, построить двухточечную разностную схему второго порядка сходимости.
5. Исследовать устойчивость разностной схемы методом собственных функций $-\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = f_k \quad 1 \leq k \leq N-1, y_0 = 0, y_N = y_{N-1}, h = \frac{1}{N - \frac{1}{2}}$.

Контрольная работа № 3.

1. Пусть числа $d_k > 0, k = 1, \dots, n$. Доказать, что $\max_k (d_k |x_k|)$ - норма вектора x .
Найти норму матрицы, подчиненную этой векторной норме.
2. Оценить $\text{cond}_2(A)$, матрицы $A = \{a_{ij} = 2, a_{ij+1} = a_{i+1j} = -1, \text{остальные } 0\}$ размерности $n \times n$.
3. При каких значениях параметра τ метод для системы уравнений $Ax = b$ с матрицей:
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0.8 & 4 \\ 2.5 & 2 & 0 \\ 2 & 0.8 & 4 \end{pmatrix}$$
 сходится с произвольного начального приближения?
4. Найти все α, β при которых метод Гаусса - Зейделя является сходящимся для систем уравнений с матрицей $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.
5. Пусть $A = A^T > 0$. Записать наилучший по скорости сходимости итерационный процесс вида
$$x^{k+1} = x^k - P_1(A)(Ax^k - b), P_1(t) = \alpha t + \beta.$$

Контрольная работа № 4.

1. Приближение к числу $\ln 15.2$ вычислено следующим образом. Найдены точные значения $\ln 15, \ln 16$ и построена линейная интерполяция между этими числами. Показать, что если x и y - соответственно точное и интерполированное значения $\ln 15.2$, то справедлива оценка $0 < x - y < 4 \cdot 10^{-4}$.
2. Функция $\ln x$ приближается на отрезке $[1, 2]$ интерполяционным многочленом третьей степени по четырем узлам $1, 4/3, 5/3, 2$. Доказать, что погрешность интерполяции в равномерной норме не превосходит $1/300$.
3. Функция $f(x) = \sin 2x$ приближается многочленом Лагранжа на отрезке $[0, 2]$ по n чебышёвским узлам: $x_i = 1 + \cos \frac{2i-1}{2n} \pi, i = 1, \dots, n$. Найти наибольшее целое p в оценке погрешности в равномерной норме вида $\varepsilon = \frac{1}{3} 10^{-p}$, если $n = 6$.
4. Среди всех многочленов вида $a_3 x^3 + 2x^2 + a_1 x + a_0$, найти наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[3, 5]$.
5. Построить многочлен наилучшего равномерного приближения степени $n = 2$ для функции $f(x) = x^3$ на отрезке $[0, 1]$.

Контрольная работа № 5.

1. Для вычисления интеграла $\int_0^1 x^2 f(x) dx$ построить квадратурную формулу вида $S(f) = c_1 f(0) + c_2 f(x_2)$, точную для многочленов максимально высокой степени.
2. Построить квадратурную формулу вида $\int_a^b x^2 f(x) dx = c_1 f(a) + c_2 f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + c_3 f\left(a + 2\frac{b-a}{3}\right) + c_4 f(b)$ и найти оценку погрешности. Доказать оценку погрешности для соответствующей составной квадратурной формулы.
3. Построить квадратуру Гаусса с одним узлом для вычисления интеграла $\int_0^1 x f(x) dx$.
4. Показать, что квадратурная формула $\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{3} \left(f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + f(0) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right)$ точна для всех алгебраических многочленов пятой степени.

5. Построить квадратурную формулу вида $\int_a^b e^{i\omega x} f(x) dx \approx \int_a^b e^{i\omega x} L_2(x) dx$ по узлам $x_1 = a, x_2 = b$.

Контрольная работа № 6.

- Доказать, что метод простой итерации для решения уравнения $x = \phi(x)$ сходится при любом начальном приближении для $\phi(x) = a \sin^2 x + b \cos^2 x + c$, где $|a - b| < 1$.
- Уравнение $x + \ln x = 0$, имеющее корень $z \approx 0.6$, предлагается решать следующим методом простой итерации: $x_{n+1} + \ln x_n = 0$. Исследовать сходимость метода и найти скорость сходимости.
- Построить итерационный метод Ньютона для вычисления $\sqrt[p]{a}$, $a > 0$, где p - вещественное число. Найти область и скорость сходимости.
- Написать расчетную формулу метода Ньютона для решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sin(x + y) - 1.3x = 0.1 \\ x^2 + y^2 = 1.0 \end{cases}$$
 Указать область сходимости.

Разбор заданий контрольных работ приведен в учебном пособии [2].

Вопросы и задачи к коллоквиуму.

- Вычислительная погрешность. Устойчивость задачи и численного алгоритма.
- Теоремы о представлении решения линейного разностного уравнения.
- Теоремы о представлении решения линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами.
- Форма записи действительного решения.
- Решение задач на собственные значения для разностных уравнений.
- Фундаментальное решение разностного уравнения.
- Определение многочленов Чебышёва первого рода.
- Определение многочленов Чебышёва второго рода.
- Свойства многочленов Чебышёва первого рода.
- Экстремальные свойства многочленов Чебышёва первого рода.
- Конечно-разностный метод.
- Аппроксимация.
- Устойчивость.
- Сходимость.
- Теорема Филиппова.
- Метод неопределенных коэффициентов построения разностных схем.
- Погрешность формул численного дифференцирования, оценка для оптимального шага.
- Задача Коши.
- Метод Тейлора для решения задачи Коши.
- Методы Адамса.
- Методы Рунге-Кутты.
- Вычисление главного члена погрешности для простейших схем.
- Оценка глобальной погрешности явного одношагового метода.
- Устойчивые и неустойчивые оду.
- Жесткие системы оду.
- Метод Лебедева решения жестких систем.
- Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка.

28. Аппроксимация краевых условий третьего рода.
29. Устойчивость краевой задачи: метод собственных функций.
30. Устойчивость краевой задачи: энергетический метод.
31. Метод прогонки.
32. Метод стрельбы.
33. Метод Фурье.
34. Нормы векторов.
35. Подчиненные нормы линейных операторов.
36. Метод Гаусса решения слау.
37. Метод отражений.
38. Метод нормального уравнения для невырожденной знк.
39. Метод QR-разложения для невырожденной знк.
40. Метод QR-разложения для знк неполного ранга.
41. Сингулярное разложение.
42. Теорема о наилучшем приближении матрицы малоранговыми матрицами.
43. Решение знк полного ранга методом сингулярного разложения.
44. Решение знк неполного ранга методом сингулярного разложения.
45. Знк с линейными ограничениями-равенствами: метод исключения.
46. Знк с линейными ограничениями-равенствами: метод обобщенного сингулярного разложения.
47. Знк с линейными ограничениями-равенствами: метод взвешиванием.
48. Знк с ограничениями типа квадратных неравенств: метод обобщенного сингулярного разложения.
49. Метод простой итерации $x^{k+1} = B x^k + c$.
50. Линейный оптимальный одношаговый метод.
51. Линейный оптимальный N-шаговый метод.
52. Метод наискорейшего градиентного спуска.
53. Метод минимальных невязок.
54. Методы с предобуславливателем.
55. Метод Якоби.
56. Метод Гаусса-Зейделя.
57. Метод верхней релаксации.
58. Проекционный алгоритм.
59. Проекционная теорема, экстремальное свойство проекционного алгоритма.
60. Одномерные проекционные алгоритмы.
61. Метод сопряженных градиентов.
62. Степенной метод со сдвигом.
63. Метод обратной итерации со сдвигом.
64. Инвариантные подпространства. Метод итерирования подпространств.
65. QR-алгоритм.
66. Интерполяционный многочлен Лагранжа.
67. Минимизация остаточного члена погрешности.
68. Наилучшее приближение в линейном нормированном пространстве.
69. Наилучшее приближение в гильбертовом пространстве.
70. Определение мнрп и примеры построения.
71. Теорема Валле-Пуссена.
72. Теорема Чебышева.
73. Теорема существования и единственности мнрп.
74. Сплайн-интерполяция.
75. Линейный интерполяционный сплайн.
76. Кубический интерполяционный сплайн.
77. Локальный (аппроксимационный) сплайн.

78. Приближение по многочленам Чебышёва.
79. Дискретное преобразование Фурье.
80. Быстрое преобразование Фурье для $N=n_1 n_2$.
81. Быстрое преобразование Фурье для $N=2^n$.
82. Интерполяция Паде-Якоби.
83. Многоточечная интерполяция Паде.
84. Метод неопределенных коэффициентов построения квадратур.
85. Интерполяционные квадратуры.
86. Составные квадратурные формулы.
87. Ортогональные многочлены.
88. Квадратурные формулы Гаусса.
89. Задачи оптимизации квадратур.
90. Правило Рунге оценки погрешности.
91. Построение программ интегрирования с автоматическим выбором шага.
92. Метод Монте-Карло для вычисления интегралов.
93. Вычисление интегралов в нерегулярном случае.
94. Сжимающие отображения.
95. Слабо сжимающие отображения.
96. Конструктивные теоремы о сжимающих отображениях.
97. Метод хорд.
98. Метод секущих.
99. Метод парабол.
100. Метод Ньютона в R^1 .
101. Методы типа простой итерации для решения систем нелинейных уравнений.
102. Методы установления.
103. Метод Ньютона в R^N .
104. Метод Чебышева.
105. δ^2 -процесс Эйткена.
106. Метод Стефенсона - Хаусхолдера - Островского.

Зачетные и дополнительные задачи приводятся в учебном пособии [2].

Разбор типовых заданий к зачету приведен в учебном пособии [2].

Вопросы к экзамену.

1. Вычислительная погрешность. Устойчивость задачи и численного алгоритма.
2. Линейные разностные уравнения n -го порядка. Теоремы о представлении общего решения однородного уравнения и общего решения неоднородного уравнения.
3. Линейные разностные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами. Формулировка теорем о представлении общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения с квазимногочленом в правой части. Форма записи действительного решения.
4. Фундаментальное решение разностного уравнения. Теорема о представлении частного решения неоднородного уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами.
5. Решение задач на собственные значения для разностных уравнений, сравнение с дифференциальным случаем.
6. Построение многочленов Чебышёва первого и второго рода.
7. Свойства многочленов Чебышёва первого рода: симметричность, нули, экстремумы. Теоремы о композиции.
8. Экстремальные свойства многочленов Чебышёва первого рода на отрезке $[a, b]$.
9. Экстремальные свойства многочленов Чебышёва первого рода вне интервала (a, b) .

10. Конечно-разностный метод. Аппроксимация, устойчивость, сходимость, теорема Филиппова.
11. Метод неопределенных коэффициентов построения разностных схем. Погрешность формул численного дифференцирования, оценка для оптимального шага.
12. Задача Коши, условия аппроксимации p -го порядка на решении, α -устойчивость. Модельные схемы.
13. Численные методы решения задачи Коши: метод Тейлора, методы Адамса.
14. Методы Рунге-Кутты для решения задачи Коши.
15. Вычисление главного члена погрешности для простейших схем для задачи Коши. Оценка глобальной погрешности явного одношагового метода.
16. Устойчивые и неустойчивые задачи. Жесткие системы. Метод Лебедева решения жестких систем.
17. Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка, аппроксимация, α -устойчивость. Аппроксимация краевых условий третьего рода.
18. Устойчивость краевой задачи для уравнения второго порядка: метод собственных функций.
19. Устойчивость краевой задачи для уравнения второго порядка: энергетический метод.
20. Метод прогонки.
21. Метод стрельбы и метод Фурье.
22. Нормы векторов, линейных операторов, обусловленность матрицы. Оценка возмущения решения системы линейных алгебраических уравнений при возмущении правой части.
23. Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений. Алгоритм ортогонализации Грама - Шмидта.
23. Метод отражений.
24. Невырожденная задача наименьших квадратов: метод нормального уравнения, метод QR - разложения.
25. Задача наименьших квадратов неполного ранга: методы QR - разложения и QR - разложения с выбором главного столбца.
26. Сингулярное разложение. Теорема о наилучшем приближении матрицы малоранговыми матрицами в норме, подчиненной евклидовой.
27. Решение задачи наименьших квадратов полного и неполного рангов методом сингулярного разложения (с.71).
28. Задача наименьших квадратов с линейными ограничениями - равенствами: методы исключения, обобщенного сингулярного разложения, взвешиванием.
29. Задача наименьших квадратов с ограничениями типа квадратных неравенств: метод обобщенного сингулярного разложения.
30. Метод простой итерации $x^{k+1} = B x^k + c$ для решения систем линейных алгебраических уравнений.
31. Линейный оптимальный одношаговый метод и линейный оптимальный N -шаговый метод.
32. Метод наискорейшего градиентного спуска и метод минимальных невязок.
33. Итерационные методы с предобусловливателем.
34. Методы Якоби, Гаусса - Зейделя и верхней релаксации.
35. Проекционный алгоритм решения систем линейных алгебраических уравнений. Проекционная теорема, экстремальное свойство. Одномерные алгоритмы.
36. Метод сопряженных градиентов.
37. Степенной метод со сдвигом для задач на собственные значения.
38. Метод обратной итерации со сдвигом для задач на собственные значения. Отношение Рэлея.

39. Инвариантные подпространства. Метод итерирования подпространств. QR-алгоритм.
40. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Минимизация остаточного члена погрешности.
41. Наилучшее приближение в линейном нормированном и гильбертовом пространствах.
42. Многочлен наилучшего равномерного приближения. Теорема Валле - Пуссена. Теорема Чебышёва.
43. Примеры построения многочлена наилучшего равномерного приближения. Теорема единственности.
44. Сплайн-интерполяция. Линейный интерполяционный сплайн.
45. Кубический интерполяционный сплайн.
46. Локальный (аппроксимационный) сплайн.
47. Приближение по многочленам Чебышёва.
48. Дискретное преобразование Фурье. Свойства, примеры.
49. Быстрое преобразование Фурье для $N=n_1n_2$, $N=2^k$ (рекурсивная форма).
50. Интерполяция Паде-Якоби. Многоточечная интерполяция Паде.
51. Метод неопределенных коэффициентов построения квадратур.
52. Интерполяционные квадратуры.
53. Составные квадратуры.
54. Ортогональные многочлены.
55. Квадратурные формулы Гаусса.
56. Задачи оптимизации квадратур.
57. Правило Рунге оценки погрешности. Построение программ с автоматическим выбором шага.
58. Метод Монте-Карло вычисления интегралов.
59. Вычисление интегралов в нерегулярном случае.
60. Метод простой итерации: сжимающие и слабо сжимающие отображения.
61. Конструктивные теоремы о сходимости метода простой итерации и существовании корней уравнения.
62. Метод хорд, метод секущих: расчетные формулы и теоремы сходимости. Метод парабол.
63. Метод Ньютона в \mathbb{R}^1 .
64. Методы типа простой итерации для решения систем нелинейных уравнений. Методы установления.
65. Метод Ньютона в \mathbb{R}^m .
66. Интерполяционные методы построения итераций высшего порядка: метод Чебышёва, δ^2 -процесс Эйткена, метод Стефенсона - Хаусхолдера - Островского.

Задачи к экзамену.

1. Найти общее решение в действительной форме для следующего уравнения:

$$y_{k+2} + y_k = \cos \frac{\pi}{2} k.$$

2. Найти ограниченное фундаментальное решение уравнения

$$y_{k+1} - y_k - 12y_{k-1} = \delta_k^0.$$

3. Найти все решения задачи на собственные значения

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = -\lambda y_k \quad 1 \leq k \leq N-1, y_0 = 0, -\frac{2}{h^2(y_N - y_{N-1})} = -\lambda y_N, h = \frac{1}{N}.$$

- Для задачи $y' + y = e^{2x}$, $y(0) = 1$ построить двухточечную разностную схему второго порядка сходимости.
- Для уравнения $y'(x) = f(x)$ построить схему Адамса второго порядка аппроксимации

$$\frac{y_k - y_{k-1}}{h} = \frac{c_1 f_{k-1} + c_2 f_{k-2}}{2}.$$

Найти главный член погрешности и исследовать устойчивость.

- Для задачи $-u'' + p(x)u = f(x)$, $u'(0) = 1$, $u(1) = 0$, $p(x) \geq 0$, построить разностную схему второго порядка аппроксимации на сетке $x_i = (i - 1/2)h$, $i = 0, \dots, N$, $h = 1/(N - 1/2)$. Исследовать устойчивость и сходимости.
- Для задачи $-u'' + p(x)u = f(x)$, $u'(0) = 1$, $u(1) = 0$, $p(x) \geq 0$, построить разностную схему второго порядка аппроксимации на сетке $x_i = ih$, $i = 0, \dots, N$, $h = 1/N$. Исследовать устойчивость и сходимости.
- Функция $f(x) = e^x$ приближается на $[-1,1]$ многочленом Лагранжа по четырем равноотстоящим узлам. Найти наибольшее целое p в оценке погрешности следующего вида: $|f - L_n|_{C[-1,1]} \leq 10^{-p}$.
- Функция $f(x) = \cos x$ приближается многочленом Лагранжа на $[-1,1]$ по n чебышёвским узлам. При каком значении n величина погрешности приближения в непрерывной норме не превосходит 10^{-5} .
- Среди всех многочленов вида $a_3 x^3 + 5 x^2 + a_1 x + a_0$, найти наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[1,2]$.
- Построить многочлен наилучшего равномерного приближения степени $n = 3$ для функции $f(x) = 3 \sin^2 10x + |x^2 - 7x + 10|$ на отрезке $[3,4]$.
- Оценить число разбиений отрезка N для вычисления интеграла $\int_0^1 \sin x^2 dx$ по составной квадратурной формуле трапеций, обеспечивающее точность 10^{-4} .
- Построить квадратуру Гаусса с тремя узлами для вычисления интеграла $I(f) = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$. Указать алгебраический порядок точности построенной квадратуры.
- Предложить способ вычисления интеграла $I(f) = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx$ по составной квадратурной формуле с постоянным шагом h и погрешностью $O(h^2)$.
- Пусть A - матрица *простой структуры*, т.е. подобна диагональной, и все $\lambda(A) \in [m, M]$, $m > 0$. Доказать, что метод $\frac{x^{k+1} - x^k}{\tau} + A x^k = b$ сходится при $0 < \tau < \frac{2}{M}$.
- Пусть у задачи $A x = b$ с матрицей простой структуры имеется одно отрицательное собственное значение $\lambda_1 \in [-2.01, -1.99]$, а остальные --- положительные: $\lambda_i \in [1,3]$, $i = 2, \dots, n$. Построить сходящийся итерационный метод для решения такой системы.
- Для решения системы $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix} x = b$ применяется метод Гаусса-Зейделя. Найти все значения параметров α, β , для которых метод сходится с произвольного начального приближения.
- Уравнение $x = 2^{x-1}$, имеющее два корня $z_1 = 1$ и $z_2 = 2$, решают методом простой итерации $x_{n+1} = 2^{x_n-1}$. Исследовать сходимости метода в зависимости от выбора начального приближения x_0 .

19. Для решения системы $\begin{cases} x^3 - y^2 = 4, \\ xy^3 - y = 14 \end{cases}$ применяется метод Ньютона. Указать ненулевую окрестность Q_δ корня $z = (2,2)$ и оценить число итераций n , необходимое для достижения точности $|z - x_n|_2 \leq 10^{-3}$ для произвольного $x_0 \in Q_\delta$.

20. Для вычисления $a^{1/p}$ применяется следующий алгоритм:

$$x_{n+1} = \phi(x_n), \phi(x) = x \frac{((p-1)x^p + (p+1)a)}{(p+1)x^p + (p-1)a}.$$

Найти порядок сходимости метода.

IX. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

А. основная литература:

1. Корнев А.А. Лекции по курсу «Численные методы». - М.: Изд-во попечительского совета механико-математического факультета МГУ, 2011.
2. Бахвалов Н.С., Корнев А.А., Чижонков Е.В. Численные методы. Решения задач и упражнения. – М.: Дрофа, 2009.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2000.

Б. Дополнительная литература:

1. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. - М.: Мир, 2001.
2. Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика. - М.: Физматлит, 2005.

В. Программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

Сайт кафедры: www.math.msu.ru.

Ссылки на электронные учебники и др. материалы: <http://mexmat.lib.ru>: Корнев А.А.

X. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

А. Помещения:

- аудитория

Б. Оборудование:

- доска в аудитории для лекций и семинаров;

В. Иные материалы:

- ЭВМ, проектор, экран для демонстрации электронных материалов.

Автор _____ Корнев А.А.

Программа утверждена на заседании кафедры,
протокол № __16__ от __15 мая_2013г.

Заведующий кафедрой