

**Программа утверждена на заседании кафедры вычислительной математики  
Протокол № 4 от 27 ноября 2014 г.**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

1. Код и наименование дисциплины (модуля): Вариационные неравенства и итерационные методы
2. Уровень высшего образования – подготовка научно-педагогических кадров в аспирантуре.
3. Направление подготовки: 02.06.01 Компьютерные и информационные науки. Направленность программы: Вычислительная математика (научная специальность 01.01.07).
4. Место дисциплины (модуля) в структуре ООП: вариативная часть ООП, элективный курс по выбору кафедры, обязателен для освоения не позднее второго года обучения.
5. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

<b>Формируемые компетенции (код компетенции)</b>	<b>Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю)</b>
<i>УК-1</i> <i>УК-4</i>	У1 (УК-1) анализировать альтернативные варианты решения исследовательских и практических задач и оценивать потенциальные выигрыши/проигрыши реализации этих вариантов 31 (УК-4) знать методы и технологии научной коммуникации на государственном и иностранном языках
<i>ОПК-1</i>	В2 (ОПК-1) владеть навыками решения теоретических и практических задач при помощи современных программных средств
<i>ПК-1</i>	31 (ПК-1) ЗНАТЬ: методы функционального анализа, используемые при обосновании решений задач для уравнений математической физики и численных методов; в том числе, основные и специальные разделы вариационных неравенств и итерационные методы их решения, их современные тенденции; У1 (ПК-1) УМЕТЬ: использовать результаты теории уравнений математической физики (и других уравнений подобного типа) и совершенствовать их с целью применения в своих исследованиях; в

	<p>частности, корректно ставить задачи в терминах вариационных неравенств, выбирать методы их анализа и решения, представлять и интерпретировать полученные результаты;</p> <p>В1 (ПК-1) ВЛАДЕТЬ: навыками решения новых теоретических и практических задач в области численных методов, возникающих в науке на современном этапе ее развития, в том числе, методами вариационных неравенств для решения теоретических и прикладных задач; навыками создания и исследования новых актуальных теорий и направлений, востребованных в современной науке; приемами создания многоцелевых программных комплексов; способами эффективной обработки результатов численных экспериментов.</p>
--	--

6. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических или астрономических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся:

*Объем дисциплины (модуля) составляет 2 зачетных единиц, всего 72 часа, из которых 44 часа составляет контактная работа аспиранта с преподавателем (34 часа занятия лекционного типа, 2 часа занятия семинарского типа, 8 часов мероприятия текущего и промежуточного контроля успеваемости), 28 часов составляет самостоятельная работа аспиранта.*

7. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

Для того чтобы формирование данной компетенции было возможно, обучающийся, приступивший к освоению программы аспирантуры, должен Знать: основные направления, проблемы, теории и методы современной математики.

Уметь: решать стандартные задачи математического анализа, линейной алгебры, вариационного исчисления, дифференциальных уравнений и численных методов и применять идеи, использованные в их решениях, для решения аналогичных задач.

Иметь навык: программирования на языке высокого уровня типа Си.

Владеть: навыками решения задач из следующих разделов современной математики: математический анализ, линейная алгебра, вариационное исчисление, дифференциальные уравнения.

8. Формат обучения.

спецкурс по выбору кафедры

9. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических или астрономических часов и виды учебных занятий

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля), форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)	Всего (часы)	В том числе							
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них					Самостоятельная работа обучающегося, часы из них		
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Групповые консультации	Индивидуальные консультации	Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости коллоквиумы, практические контрольные занятия и др)*	Всего	Выполнение домашних заданий	Подготовка рефератов и т.п..
Тема 1: вариационные неравенства 1-го типа – с множеством ограничений	4	2				2	1		1
Тема 2: вариационные неравенства 2-го типа – с недифференцируемым функционалом	6	4				4	1		1
Тема 3: теоремы существования и единственности решений вариационных неравенств, оценки	6	2			2	4	2		2

устойчивости										
Тема 4: вариационные неравенства и включения с многозначными операторами	6	2					2	2		4
Тема 5: субдифференциалы выпуклых функций и их свойства	4	2					2	2		2
Тема 6: уравнения с многозначными операторами, допускающие прямое решение	4	2					2	2		2
Тема 7: итерационные методы для неравенств, общая теория для задач с симметричными положительно определенными операторами	6	2					2	2		4
Тема 8: одношаговые (двухслойные) итерационные методы	8	2	2			2	6	2		2
Тема 9: методы с переменным	8	2				2	4	2		4

предобусловливателем											
Тема 10: итерационные методы релаксационного типа	4	2					2	2		2	
Тема 11: блочный метод Гаусса-Зейделя с перекрывающимися блоками	4	2					2	2		2	
Тема 12: методы расщепления для неравенств с положительными операторами	6	4					4	2		2	
Тема 13: факторизованный итерационный метод для задач с симметричными операторами	6	2				2	4	2		2	
Тема 14: метод с факторизованным предобусловливателем	4	2					2	2		2	
Тема 15: двухступенчатый итерационный метод	4	2					2	2		2	
Промежуточная аттестация:	6		8								

экзамен										
<b>Итого</b>	72	34	2			8	44	28	0	28

10. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы аспирантов по дисциплине (модулю).

Конспект лекций из Интернета, изготовленный автором курса, списки упражнений к лекциям, литература из списка литературы, см. 12.

11. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю).

- Перечень компетенций: УК-1, УК-4, ОПК-1, ПК-1
- Шкала оценивания: экзамен с оценкой по пятибалльной шкале.
- Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих этапы формирования компетенций.

РЕЗУЛЬТАТ ОБУЧЕНИЯ по дисциплине (модулю)	ШКАЛА оценивания					ПРОЦЕДУРЫ ОЦЕНИВАНИЯ*
	1	2	3	4	5	
<i>У1 (УК-1)</i>	Отсутствие умений	Частично освоенное умение анализировать альтернативные варианты решения исследовательских и практических задач и оценивать потенциальные выигрыши/проигрыш и реализации этих вариантов	В целом успешно, но не систематически осуществляемые анализ альтернативных вариантов решения исследовательских и практических задач и оценка потенциальных выигрышей/проигрышей реализации этих вариантов	В целом успешно, но содержащие отдельные пробелы анализ альтернативных вариантов решения исследовательских задач и оценка потенциальных выигрышей/проигрышей реализации этих вариантов	Сформированное умение анализировать альтернативные варианты решения исследовательских и практических задач и оценивать потенциальные выигрыши/проигрыш и реализации этих вариантов	оценка в форме индивидуального собеседования
<i>З1 (УК-4)</i>	Отсутствие знаний	Фрагментарные знания методов и	Неполные знания методов и технологий	Сформированные, но содержащие отдельные	Сформированные и систематические	оценка в форме индивидуального

		технологий научной коммуникации на государственном и иностранном языках	научной коммуникации на государственном и иностранном языках	пробелы знания методов и технологий научной коммуникации на государственном и иностранном языках	знания методов и технологий научной коммуникации на государственном и иностранном языках	собеседования
<i>B2 (ОПК-1)</i>	Отсутствие навыков	Фрагментарное применение навыков построения и анализа математических моделей, решения задач при помощи современных программных средств	В целом успешное, но не систематическое применение навыков построения и анализа математических моделей, решения задач при помощи современных программных средств	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы применение навыков построения и анализа математических моделей, решения задач при помощи современных программных средств	Успешное и систематическое применение навыков построения и анализа математических моделей, решения задач при помощи современных программных средств	оценка в форме индивидуального собеседования о результатах численного моделирования
31 (ПК-1)	Не имеет базовых знаний	Допускает существенные ошибки	Демонстрирует частичные знания	Демонстрирует знания с небольшими пробелами	Раскрывает полное содержание основных и специальных разделов вариационных неравенств и итерационных методов их решения, их современные тенденции .	экзамен в форме индивидуального собеседования
У1 (ПК-1)	Не умеет и не готов формулировать базовые определения и постановки задач	Имея базовые представления о предмете, не готов формулировать задачи и выбирать методы их решения.	Не учитывает специфики и современного состояния предмета	Не вполне готов выбирать методы анализа и интерпретировать результаты	Умеет корректно ставить задачи в терминах вариационных неравенств, выбирать методы их анализа и решения, представлять и	письменное решение задач

					интерпретировать полученные результаты	
B1 (ПК-1)	Не владеет методами и навыками.	Владеет отдельными приемами	Владеет приемами и навыками решения основных стандартных задач	Владеет методами и навыками, но не готов оценивать значимость конкретных задач в современной науке.	Полностью владеет методами вариационных неравенств и итерационными алгоритмами для решения задач; навыками создания и исследования новых актуальных теорий и направлений, востребованных в современной науке	экзамен в форме индивидуального собеседования

- Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций: конспекты лекций снабжены упражнениями для самостоятельных занятий по теме каждой лекции.

Контрольные вопросы и задания по обязательной и вариативной частям дисциплины для промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

1. Сведение задачи минимизации дифференцируемой функции на отрезке к вариационному неравенству.
2. Эквивалентность постановок в случае выпуклой функции.
3. Выпуклое множество. Дифференцируемость функции на выпуклом множестве по выпуклому множеству.
4. Сведение задачи минимизации дифференцируемой функции на выпуклом множестве к вариационному неравенству.
5. Эквивалентность постановок в случае выпуклой функции.
6. Постановка задачи минимизации квадратичной функции с симметричной положительно полуопределенной матрицей.
7. Конечно-разностная аппроксимация задачи о препятствии ( с ограничением на решение).
8. Конечно-разностная аппроксимация задачи с ограничением на производную решения.



9. Отличие вариационного неравенства с недифференцируемым функционалом от неравенства с множеством ограничений.
10. Эквивалентность задачи минимизации и вариационного неравенства с недифференцируемым функционалом.
11. Постановка задачи минимизации недифференцируемой квадратичной функции с симметричной положительно полуопределенной матрицей.
12. Конечно-разностная аппроксимация задачи с ограничением на интеграл от модуля решения.
13. Конечно-разностная аппроксимация задачи с ограничением на интеграл от модуля производной решения.
14. Эффективное множество функции.
15. Полунепрерывная снизу функция.
16. Собственная функция.
17. Надграфик выпуклой функции.
18. Замкнутость надграфика полунепрерывной снизу функции.
19. Афинная миноранта выпуклой, собственной и полунепрерывной снизу функции.
20. Теорема существования задачи минимизации для коэрцитивной, выпуклой, собственной и полунепрерывной снизу функции.
21. Индикаторная функция выпуклого замкнутого множества и ее свойства.
22. Сведение задачи минимизации для коэрцитивной, выпуклой, собственной и полунепрерывной снизу функции к вариационному неравенству с недифференцируемым функционалом.
23. Теорема существования и единственности для решения задачи минимизации с симметричной положительно определенной матрицей.
24. Теорема существования и единственности для решения вариационного неравенства с симметричной положительно определенной матрицей.
25. Оценки устойчивости для решения вариационного неравенства с симметричной положительно определенной матрицей.
26. Субградиент выпуклой, собственной и полунепрерывной снизу функции.
27. Субдифференциал выпуклой, собственной и полунепрерывной снизу функции.
28. Эквивалентность задач минимизации и включения для выпуклой, собственной и полунепрерывной снизу функции.
29. Три эквивалентных постановки для задачи с симметричной положительно определенной матрицей.
30. Свойства субдифференциалов выпуклой, собственной и полунепрерывной снизу функции.
31. Примеры субдифференциалов: для гладкой функции, для индикаторной функции выпуклого замкнутого множества, для функции  $\max\{0, x\}$ , для сепарабельной функции.
32. Уравнения с многозначными операторами, допускающими прямое решение: с диагональным оператором, с функцией Хевисайда, с треугольным оператором, типа ортогональной проекции на параллелепипед и шар.

33. Стационарный одношаговый метод для включения.
  34. Теорема о сходимости стационарного одношагового метода для включения с оценкой погрешности.
  35. Предобусловленный стационарный одношаговый метод для включения.
  36. Теорема о сходимости предобусловленного стационарного одношагового метода для включения с оценкой погрешности.
  37. Особый случай несимметричной положительно определенной матрицы.
  38. Одношаговый метод с переменным предобусловлителем.
  39. Теорема о сходимости метода с переменным предобусловлителем для включения.
  40. Экстраполированный метод Якоби для включения.
  41. Метод последовательной верхней релаксации для включения.
  42. Блочный метод последовательной верхней релаксации для включения.
  43. Метод симметричной последовательной верхней релаксации для включения.
  44. Блочный метод Гаусса-Зейделя для включения.
  45. Блочный метод Гаусса-Зейделя с перекрывающимися блоками для включения.
  46. Критерий останова итерационных методов.
  47. Методы расщепления для вариационных неравенств с положительно определенными матрицами. Общая схема.
  48. Частные случаи методов расщепления: метод Дугласа-Рекфорда, метод Письмена-Рекфорда, методы с факторизованными операторами в качестве предобусловлителя.
  49. Теорема о связи норм оценок погрешностей для методов расщепления. Частные случаи.
  50. Теорема о сходимости методов расщепления. Частные случаи.
  51. Особый случай несимметричной положительно определенной матрицы в методах расщепления.
  52. Факторизованный итерационный метод расщепления для задачи с симметричной матрицей. Частные случаи.
  53. Метод с факторизованным предобусловлителем для задачи с симметричной матрицей.
  54. Двухступенчатый итерационный метод.
  55. Теоремы сходимости двухступенчатого метода в коммутативном и некоммутирующем случаях.
  56. Решение матричных игр методами сеточных вариационных неравенств. Общая идея и примеры алгоритмов.
- Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения: листки с определениями и задачами для самостоятельного решения.  
Определения - из списка контрольных вопросов и заданий для промежуточной аттестации.

Задачи для самостоятельного решения - из рецензированного и опубликованного учебно-методического пособия:

Игнатъева М.А. Методы и алгоритмы решения эллиптических вариационных неравенств. Учебно-методическое пособие. - Казань: Казанский университет, 2011. 51 с

Билет формируется из двух вопросов из списка и одной задачи из пособия, взятых из различных разделов промежуточной аттестации.

## 12. Ресурсное обеспечение:

- Перечень основной и дополнительной учебной литературы:
  1. Axelsson O. *Iterative solution methods*. – N.Y.: Cambridge University Press, 1996.
  2. Байокки К., Капелло А. *Вариационные и квазивариационные неравенства. Приложения к задачам со свободной границей*. – М.: Наука, 1988.
  3. Быченков Ю.В., Чижонков Е.В. *Итерационные методы решения седловых задач*. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010.
  4. Главачек И., Гаслингер Я., Нечас И., Ловишек Я. *Решение вариационных неравенств в механике*. – М.: Мир, 1986.
  5. Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Трёмольер Р. *Численное исследование вариационных неравенств*. – М.: Мир, 1979.
  6. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. *Неравенства в механике и физике*. – М.: Наука, 1980.
  7. Киндерлерер Д., Стампаккья Г. *Введения в вариационные неравенства и их приложения*. – М.: Мир, 1983.
  8. Коннов И.В. *Нелинейная оптимизация и вариационные неравенства*. – Казань: Издательство Казанского университета, 2013.
  9. Лапин А.В. *Итерационные методы решения сеточных вариационных неравенств*. – Казань: Издательство Казанского университета, 2008.
  10. Чижонков Е.В. Итерационное решение матричных игр методами сеточных вариационных неравенств // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 2010, Т.50, No.8, с. 1367-1380.
- Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»
  1. Чижонков Е.В. *Конспект лекций по спецкурсу «Вариационные неравенства и итерационные методы»*. Рабочая версия – 2014.  
<https://yadi.sk/i/yG314GZzcDyCQ>
- Перечень используемых информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса, включая программное обеспечение, информационные справочные системы (при необходимости): по ситуации - библиотеки численного анализа НИВЦ МГУ, Lapack, UMFPACK, FreeFEM++, gnuplot.
- Описание материально-технической базы: аудиторный фонд механико-математического факультета.

## 13. Язык преподавания.

русский

14. Преподаватель (преподаватели).

Профессор, д.ф.-м.н. Евгений Владимирович Чижонков

Заведующий кафедрой

Вычислительной математики

профессор, д.ф.-м.н.

/Кобельков Г.М./