Программа, вопросы и литература по с/курсу "Элементы теории игр" лектор — проф. Чижонков Е.В. 0,5 года; 2-5 курсы; 2013/2014 уч.г.

I. Основные определения и положения теории игр.

1. Участники игры, игроки, стратегии, выигрыши.
2. Классификация игр.

Что такое теория игр? Какова ее цель?
Что такое участники игры и игроки?
Что называется стратегией игрока?
Что такое ход в игре?
Что такое выигрыши и как они измеряются в игре?
Что такое нормальная форма игры?
Какие основные принципы закладываются при классификации игр?

II. Матричные игры двух игроков с нулевой суммой.

1. Определения и примеры.
2. Решение игр в чистых стратегиях.
3. Оптимальные смешанные стратегии и их свойства.
4. Игра порядка 2×2: аналитический и графический подходы..
5. Игры порядка $2 \times n$ и $m \times 2$.
6. Сведение к задаче линейного программирования.
7. Метод фиктивного розыгрыша (Брауна – Робинсон).

Что такое матричная игра двух игроков с нулевой суммой?
Что такое чистые нижняя в верхняя цены игры?
Что такое седловая точка в чистых стратегиях и как она определяется?
Что называется седловой точкой для вещественной функции двух переменных?
Сформулируйте и докажите теорему об эквивалентности понятий седловой точки и равенства $\max_x \min_y f(x,y) = \min_y \max_x f(x,y)$.
Что называется смешанными стратегиями игроков?
Что такое средний выигрыш игрока?
Что называется оптимальными смешанными стратегиями и ценой игры?
Сформулируйте и докажите лемму об опорной гиперплоскости.
Сформулируйте и докажите лемму о справедливости одной из двух альтернатив.
Сформулируйте и докажите основную теорему матричных игр.

Сформулируйте и докажите теорему о необходимом и достаточном условии оптимальности смешанных стратегий.
Напишите линейные неравенства, которым должны удовлетворять оптимальные смешанные стратегии игроков.
Сформулируйте и докажите теорему о "лишних"стратегиях.
Какая игра называется симметричной?
Сформулируйте и докажите теорему о структуре решения симметричной игры.
Дайте определение доминирования стратегий.
Сформулируйте и докажите теорему об афинном свойстве решения матричной игры.
Выведите формулы, по которым находится игра 2×2.
Опишите графический метод решения игры 2×2.
Опишите графический метод решения игры $2 \times n$.
Опишите графический метод решения игры $m \times 2$.
Опишите метод сведения матричной игры к задаче линейного программирования.
В чем состоит метод фиктивного розыгрыша (на примере)?
Найти нижнюю чистую цену игры, верхнюю чистую цену игры, определить седловые точки, оптимальные чистые стратегии и чистую цену игры, если они существуют:

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},\ b)\ \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix},\ c)\ \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix},\ d)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

$$e)\ \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},\ f)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ g)\ \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$h)\ \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 7 & 1 & -5 & 2 \\ -8 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix},\ i)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 7 \\ 3 & -5 & -1 & 6 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 7 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти решение следующих игр 2×2:

$$a)\ \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ b)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},\ c)\ \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 5 & -6 \end{pmatrix},\ d)\ \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$e)\ \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},\ f)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти решение следующих игр:

$$a)\ \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 8 \end{pmatrix},\quad b)\ \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 & 1 \\ -1 & -5 & -4 & 0 \end{pmatrix},\quad c)\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 6 \\ 8 & 10 \end{pmatrix},\quad d)\ \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e)\ \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\quad f)\ \begin{pmatrix} 8 & 0 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверить, являются ли данные смешанные стратегии

$$a)\ x = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right),\quad y = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right),\quad V = \frac{2}{5}$$

$$b)\ x = \left(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right),\quad y = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right),\quad V = 4$$

решением следующей матричной игры:

$$a)\ \begin{pmatrix} 0,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0,6 & 0,6 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}\qquad b)\ \begin{pmatrix} 14 & -4 & 2 \\ -4 & 8 & 8 \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Составить задачу линейного программирования для следующих игр:

$$a)\ \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},\quad b)\ \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & -4 \\ -6 & -3 & 0 \\ -10 & -4 & 2 \end{pmatrix},\quad c)\ \begin{pmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -4 & -1 & 2 \\ -8 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

III. Позиционные игры.

1. Понятие позиционной игры и ее нормальной формы.
2. Графическое представление позиционной игры.
3. Определение позиционной игры.

Что такое позиционная игра?

Что такое нормальная форма позиционной игры?

Приведите примеры позиционных игр.

Что такое дерево игры?
Что такое информационное множество дерева игры и каким условиям оно должно удовлетворять?
Приведите примеры дерева игры.
Дайте точное определение позиционной игры.
Что такое функция выигрышей партии?
Что такое функция выигрышей стратегии?
Приведите к нормальной форме, дайте графическое изображение и найдите решение следующей игры:

Ход 1. Игрок P_1 выбирает x из множества $\{1, 2\}$.

Ход 2. Игрок P_2, не зная значения x, выбирает y из множества $\{1, 2\}$.

Ход 3. Игрок P_1, зная значения x и y, выбирает z из множества $\{1, 2\}$.

При этом выигрыш первого игрока определяется так:

$$M(1,1,1) = -2,\ \ M(1,1,2) = -1,\ \ M(1,2,1) = 3,\ \ M(1,2,2) = -4,$$

$$M(2,1,1) = 5,\ \ M(2,1,2) = 2,\ \ M(2,2,1) = 2,\ \ M(2,2,2) = 6.$$

Приведите к нормальной форме, дайте графическое изображение и найдите решение следующей игры:

Ход 1. Игрок O выбирает x: 1 с вероятностью 0,3 и 2 с вероятностью 0,7.

Ход 2. Игрок P_1, зная значение x, выбирает y из множества $\{1, 2\}$.

Ход 3. Игрок P_2, зная значение y, но не зная значения x, выбирает z из множества $\{1, 2\}$.

При этом выигрыш первого игрока определяется так:

$$M(1,1,1) = 2,\ \ M(1,1,2) = -2,\ \ M(1,2,1) = 1,\ \ M(1,2,2) = 0,$$

$$M(2,1,1) = -1,\ \ M(2,1,2) = 3,\ \ M(2,2,1) = 0,\ \ M(2,2,2) = -3.$$

IV. Биматричные игры.

1. Определение биматричной игры.
2. Метод Лемке – Хаусона решения биматричных игр.
3. Оптимальность по Парето в биматричных играх.

Что такое биматричная игра?
Каким условиям должны удовлетворять смешанные стратегии в ситуации равновесия биматричной игры?
Сформулируйте теорему существования решения для биматричной игры.
Опишите метод решения биматричных игр двух игроков, каждый из которых имеет только две стратегии.

Найти решение следующих биматричных игр:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix},$$

$$b)\ A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$c)\ A = \begin{pmatrix} \frac{a-b}{2} & a \\ 0 & \frac{a}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{a-b}{2} & 0 \\ a & \frac{a}{2} \end{pmatrix}.$$

В задании c) требуется рассмотреть два случая: 1) $a > b$, 2) $a < b$.

$$d)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Какая биматричная игра называется невырожденной?
По какому правилу в методе Лемке – Хаусона каждой смешанной стратегии первого игрока ставится в соответствие набор чистых стратегий?
По какому правилу в методе Лемке – Хаусона каждой смешанной стратегии второго игрока ставится в соответствие набор чистых стратегий?
Как выбираются ситуации равновесия в методе Лемке – Хаусона?
Используя метод Лемке – Хаусона, найти решение следующих биматричных игр:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$b)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Как определить множество Парето на плоскости?
Что называется "точкой утопии"?
В чем состоит метод "идеальной точки"нахождения ситуации, оптимальной по Парето?
Чем отличается ситуация равновесия от ситуации, оптимальной по Парето, в биматричной игре?
Найти ситуацию, оптимальную по Парето, в биматричной игре:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$b)\ A = \begin{pmatrix} \frac{a-b}{2} & a \\ 0 & \frac{a}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{a-b}{2} & 0 \\ a & \frac{a}{2} \end{pmatrix}.$$

В задании b) требуется рассмотреть случай $a < b$.

V. Бесконечные антагонистические игры.

1. Определение бесконечной антагонистической игры.
2. Оптимальные смешанные стратегии и их свойства.
3. Игры с выпуклыми функциями выигрышей.

Что такое бесконечная антагонистическая игра?
Что такое нижняя и верхняя цена бесконечной антагонистической игры?
Что такое цена бесконечной антагонистической игры?
Что такое точка равновесия, седловая точка, точка $\varepsilon-$равновесия, оптимальные стратегии бесконечной антагонистической игры?
Сформулируйте свойства точки $\varepsilon-$равновесия.
Что такое смешанные стратегии в бесконечной антагонистической игре?
Что такое седловая точка в смешанных стратегиях бесконечной игры?
Что называется решением бесконечной антагонистической игры?
Сформулируйте теоремы о необходимых и достаточных условиях оптимальности смешанных стратегий в бесконечной антагонистической игре.
Сформулируйте теорему существования решения для бесконечной антагонистической игры.
Сформулируйте теорему о "лишних"стратегиях в бесконечной антагонистической игре.
Сформулируйте теорему о симметричной бесконечной антагонистической игре.
Дайте определение выпуклой игры.
Сформулируйте теоремы о решении выпуклых игр.
В чем состоит задача борьбы за рынки сбыта?
Покажите, что оптимальными стратегиями бесконечной игры на единичном квадрате с функцией выигрышей $M(x,y) = xy - x/3 - y/2$ является пара чистых стратегий $x = 1/2,\ y = 1/3$.
Покажите, что бесконечная антагонистическая игра на единичном квадрате с функцией выигрышей

$$M(x,y) = \frac{1}{1 + 2(x-y)^2}$$

не имеет седловой точки в чистых стратегиях.
Функция выигрышей в бесконечной антагонистической игре на единичном квадрате определена так: $M(x,y) = 10xy - y - 5x$ при $x \neq 1/10$ и $M(1/10,y) = -y$. Найдите цену игры. Какая стратегия первого игрока гарантирует ему получение выигрыша не меньше $V - \varepsilon$?

Покажите, что бесконечная антагонистическая игра на единичном квадрате с функцией выигрышей $M(x,y) = |y-x|(1-|y-x|)$ имеет оптимальные смешанные стратегии: $F(x) = x,\ G(y) = y$.
Покажите, что бесконечная антагонистическая игра на единичном квадрате с функцией выигрышей

$$M(x,y) = \begin{cases} \ \ 0 & \text{для} \quad x = y \\ -1 & \text{для} \quad x = 1, y < 1 \text{ и } x < y < 1 \\ \ \ 1 & \text{для} \quad y = 1, x < 1 \text{ и } y < x < 1 \end{cases}$$

не имеет решения.
Покажите, что бесконечная антагонистическая игра на единичном квадрате с функцией выигрышей

$$M(x,y) = \frac{1}{1+\lambda(x-y)^2}, \quad \text{где} \quad 0 < \lambda \leq \frac{4}{3},$$

имеет следующее решение:

$$V = \frac{4}{4+\lambda}, \quad F(x) = I_{\frac{1}{2}}(x), \quad G(y) = \frac{1}{2}I_0(y) + \frac{1}{2}I_1(y).$$

Найдите решение бесконечной антагонистической игры на единичном квадрате с функцией выигрышей $M(x,y) = 80y^8 - 5xy + x^2$.
Найдите решение бесконечной антагонистической игры на единичном квадрате с функцией выигрышей $M(x,y) = 16y^6 - 3xy + x^2$.

VI. Игры типа дуэлей.
Что такое игра типа дуэли (с выбором момента времени)?
Опишите структуру функции выигрышей первого игрока в игре типа дуэли.
Опишите метод решения игры типа дуэли.
Опишите игру — бесшумную дуэль.
Опишите игру — шумную дуэль.
Пусть вероятность успешного выстрела первого игрока $p(x)$, а второго — $q(y)$. Построить функцию выигрышей первого игрока в бесшумной и шумной дуэлях.
Пусть в шумной дуэли вероятность успешного выстрела первого игрока x, а второго — y^2. Найти цену игры и оптимальное время выстрела первого игрока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вентцель Е.С. Элементы теории игр. М.: Физматгиз, 1961.

2. Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов – кибернетиков. М.: Наука, 1985.

3. Крушевский А.В. Теория игр. Киев: Вища школа, 1977.

4. Льюис Р.Д., Райфа Х. Игры и решения. М.: ИЛ, 1961.

5. Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. Исследование операций в задачах и упражнениях. Изд. 2-е, испр. М.: Книжный дом "Либроком", 2009.

6. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Наука, 1985.

7. Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970.

8. Оуэн Г. Теория игр. М.: Мир, 1971.

9. Шикин Е.В. От игр к играм. М.: Издательство ЛКИ, 2008.