

**Численные методы в задачах оптимального управления.  
Численный анализ динамических систем.**

**Преподаватель:** проф. А.А. Корнев

**Специальный курс, включающий следующие разделы математики:**

"Математический анализ", "Дифференциальные уравнения", "Линейная алгебра", "Функциональный анализ", "Численные методы", "Работа на ЭВМ", "Параллельные вычисления".

**Тематическое содержание курса.**

- Тема 1. Ключевые понятия теории динамических систем.
- Тема 2. Сжимающие отображения.
- Тема 3. неподвижные точки одномерных отображений.
- Тема 4. неподвижные точки многомерных отображений.
- Тема 5. неподвижные точки отображений в функциональных пространствах.
- Тема 6. Окрестность неподвижной точки линейного отображения.
- Тема 7. Инвариантные подпространства, SVD и GSVD разложения.
- Тема 8. Численные алгоритмы построения специальных матричных разложений.
- Тема 9. Окрестность неподвижной точки нелинейного отображения. Инвариантные множества.
- Тема 10. Теорема существования и свойства устойчивого множества для окрестности неподвижной точки гиперболического типа.
- Тема 11. Теорема существования и свойства неустойчивого множества для окрестности точки гиперболического типа.
- Тема 12. Методы построения устойчивого множества.
- Тема 13. Методы проектирования на устойчивое множество.
- Тема 14. Численная реализация для отображений с дискретно заданным временем.
- Тема 15. Численная реализация для нестационарных задач математической физики.
- Тема 16. Эффективная реализация численных алгоритмов.
- Тема 17. О выборе базиса в подпространстве допустимых смещений.

**Список вопросов.**

1. ДС с дискретным и непрерывным временем, траектория.
2. Эргодичность, перемешивание, отслеживание.
3. Результаты  $\omega$ - и  $\alpha$ - предельных точках.
4. Принцип сжатых отображений.
5. Отображения полиномиального сжатия.
6. Отображения асимптотического сжатия.
7. Построение шкалы и примеров слабо сжимающих отображений.
8. Конструктивные теоремы о существовании корня уравнения.
9. Диаграмма Ламерея.
10. Метод линеаризации.
11. Метод хорд.
12. Метод секущих.
13. Метод Ньютона.
14. Интерполяционный метод.
15. Метод Чебышева.
16. Методы типа Эйткена, Стеффенсона, Хаусхолдера, Островского.
17. Методы типа Пикара.
18. Метод Ньютона.
19. Градиентные методы.

20. Итерационные методы решения уравнений в пространстве  $V_n(0)$ .
21. Жорданова нормальная форма. Корневые подпространства.
22. Базис Шура.
23. Инвариантные подпространства.
24. Сингулярное разложение.
25. Обобщенное сингулярное разложение.
26. Построения базиса для инвариантных подпространств.
27. Решение уравнения Ляпунова.
28. Локальное  $\mu$ -устойчивое многообразие.
29. Локальное  $\mu$ -неустойчивое многообразие.
30. Теорема Адамара-Перрона об устойчивом многообразии.
31. Теорема существования сильно устойчивого многообразия.
32. Теорема Адамара-Перрона об устойчивом многообразии.
33. Теорема существования сильно неустойчивого многообразия.
34. Метод нулевого приближения.
35. Метод функционально-аналитических рядов.
36. Линейный метод.
37. Нелинейный метод.
38. Метод нелинейного уравнения.
39. Обобщение нелинейного метода.
40. Обобщение метода нелинейного уравнения.
41. Вычисление  $R_+, -$ . Выбор метода и настройка параметров.
42. Отображения типа Эно.
43. Вычисление  $R_+, -$ . Выбор метода и настройка параметров.
44. Уравнение Чафе - Инфанта.
45. Уравнения Навье - Стокса.
46. Выбор итерационного метода и параметров процесса.
47. Структура программы и организация хранения данных.
48. Выбор оптимального базиса в подпространстве допустимых смещений.

#### **Список задач.**

1. Построить отображение, имеющее сверхлинейную скорость сжатия.
2. Построить отображение с полиномиальной скоростью сжатия.
3. Привести пример отображения с лог-логарифмической скоростью сжатия.
4. Написать программу вычисления корней одномерной функции методом Ньютона и методом обратной интерполяции. Сравнить области сходимости алгоритмов.
5. Написать программу вычисления корней одномерной функции методом Чебышева и методом обратной интерполяции. Сравнить области сходимости алгоритмов.
6. Написать программу вычисления решения системы нелинейных уравнений методом Ньютона.
7. Написать программу вычисления решения системы нелинейных уравнений методом типа секущих.
8. Используя стандартные библиотеки численного анализа, для конкретной матрицы найти базис в инвариантном подпространстве, отвечающем собственным числам с положительной действительной частью. Обосновать правильность полученного результата
9. Используя стандартные библиотеки численного анализа, найти базис в инвариантном подпространстве, отвечающем собственным числам, по модулю большим единице.
10. Используя стандартные библиотеки, построить SVD-разложение.
11. Используя стандартные библиотеки, построить GSVD-разложение.
12. Методом рядов найти кубическое приближение к устойчивому многообразию для заданного отображения малой размерности.
13. Методом рядов найти кубическое приближение к неустойчивому многообразию для заданного отображения малой размерности.
14. Написать программу численной аппроксимации устойчивого многообразия для заданного отображения.

15. Написать программу численной аппроксимации неустойчивого многообразия для заданного отображения.
16. Написать программу проектирования начальной точки на устойчивое многообразие заданного отображения вдоль подпространства допустимых смещений.
17. Написать программу численного решения задачи стабилизации по начальным данным для заданного нестационарного уравнения в частных производных.
18. Написать программу численного решения задачи стабилизации по краевым условиям для заданного нестационарного уравнения в частных производных.

#### **Список литературы.**

1. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. М.: Мир, 2001.
  2. Chizhonkov E.V. Numerical aspects of one stabilization method // Russ.J.Numer.Anal.Math.Modelling. 2003. V. 18, N.5. P. 363-376.
  3. Fursikov A.V., Kornev A.A. Feedback stabilization for Navier-Stokes equations: Theory and Calculations // Mathematical Aspects of Fluid Mechanics. Lect. Notes Ser. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. 130--172.
  4. Иванчиков А.А., Корнев А.А., Озерницкий А.В. О новом подходе к решению задач асимптотической стабилизации// ЖВМиМФ. 2009. Т. 49, N.12. С. 2167-2181.
  5. Кобельков Г.М., Корнев А.А., Ольшанский М.А., Чижонков Е.В. Некоторые актуальные проблемы математического моделирования. // в сб.: Современные проблемы математики и механики. 2009, 45 с.
  6. Корнев А.А. Классификация методов приближенного проектирования на устойчивое многообразие // ДАН. 2005. 400, № 6. С. 736--738.
  7. Корнев А.А., Степин А.А. Об асимптотически сжимающих отображениях // Матем. заметки. 2013. Том 94 выпуск 2, с. 227-233.
  8. Ладыженская О.А., Солонников В.А. О принципе линеаризации и инвариантных многообразиях для задач магнитной гидродинамики // Зап.научн.сем.ЛОМИ. 1973. Т. 38. С. 46-93.
- Дополнительная литература.
1. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения // Собрание сочинений Т. II, М.: изд.-во академии наук СССР, 1954
  2. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории нелинейных систем, ч. 1// Москва-Ижевск: Институт Компьютерных Исследований, 2004.
  3. Бахвалов Н.С., Корнев А.А., Чижонков Е.В. Численные методы. Решения задач и упражнения. М.: Лаборатория знаний. 2016.
  4. Hirsch M., Pugh C. and Shub M. Invariant manifolds. Lectures notes in Math. V. 583. Springer. Berlin, 1977.
  5. Аносов Д.В. Многомерный аналог одной теоремы Адамара // Научн. докл. высш. шк., физ.-матем. науки. 1959. N.1. С. 3-12.