

Численный анализ полудинамических систем.

Преподаватель: проф. А.А. Корнев

Направление подготовки: Компьютерные и информационные науки - 02.06.01.

Направленность программы: Вычислительная математика - 01.01.07.

Тематическое содержание курса.

Тема 1: Элементы функционального анализа и теории динамических систем.

Тема 2: Устойчивость в окрестности неподвижной точки.

Тема 3: Устойчивость в окрестности траектории.

Тема 4: Качественная теория дифференциальных уравнений и глобальных аттракторов.

Тема 5: Аттракторы, зависящие от параметра.

Список вопросов.

1. Метрические, линейные, нормированные пространства.
2. Сходимость и предел.
3. Пространства R , K , B .
4. Отображения линейных пространств.
5. Экспоненциально, полиномиально, асимптотически сжимающие отображения.
6. Принцип сжимающих, слабо сжимающих и асимптотически сжимающих отображений.
7. Определение динамических и полудинамических систем. Потоки и каскады.
8. Траектория, полутраектория, семейства полутраекторий.
9. Динамика в окрестность неподвижной точки для линейных отображений.
10. Методы численного построения инвариантных подпространств.
11. Динамика в окрестность неподвижной точки для нелинейных отображений гладких.
12. Теорема Адамара-Перрона для окрестности.
13. Построение устойчивого многообразия W^- методом нулевого приближения и методом линеаризации.
14. Линейный метод сжимающих отображений для построения W^- .
15. Метод функционально-аналитических рядов для W^- .
16. Нелинейный метод сжимающих отображений для W^- .
17. Метод нелинейного уравнения для W^- .
18. Метод обратной итерации W^- .
19. Приближенное построение неустойчивого W^+ многообразия методом нулевого приближения и методом линеаризации.
20. Метод нелинейного уравнения W^+ .
21. Задачи проектирования на многообразия W^- , W^+ .
22. Задача стабилизации по начальным данным в терминах W^- .
23. Задача стабилизации по краевым условиям в терминах W^- , изотропные и анизотропные продолжения.
24. Задача стабилизации по правой части в терминах W^- .
25. Задача FSQ.
26. Задача FSE.
27. Стабилизация к неподвижной точке в терминах W^+ .
28. Локальная динамика в окрестности траектории гиперболического типа. Линейные отображения.
29. Задача численного построения инвариантных подпространств для траектории.

30. Обобщенная теорема Адамара-Перрона.
31. Метод нелинейного уравнения для построения $W(0)-$ и $W(0)+$.
32. Практическая реализация на основе нелинейного метода сжимающих отображений.
33. Задачи проектирования на многообразия $W(0)-$ и $W(0)+$.
34. Стабилизация к траектории в терминах $W(0)-$ и $W(0)+$.
35. Задачи стабилизации по начальным данным, краевым условиям, правой части для окрестности траектории.
36. Задачи типа (ff) и (lf).
37. Методы решения задач асимптотической стабилизации в терминах квазипроектирования на неустойчивое многообразие.
38. Задача усвоения данных как задача стабилизации.
39. Инвариантные множества. Общие результаты об α -предельных множествах в компактных пространствах.
40. Общие результаты об ω -предельных множествах в компактных пространствах.
41. Комплексная и рациональная динамика. Множества Жюлиа и Мандельброта.
42. Системы итерированных функций. Фракталы.
43. Глобальный аттрактор: определение и свойства.
44. Полугруппы класса К. Теорема Ладыженской.
45. Полугруппы класса АК. Теорема Ладыженской – Капитанского - Костина.
46. Полугруппы градиентного типа. Теорема Бабина - Вишика.
47. Структура аттрактора.
48. Аттрактор пдс с дискретным временем. Принцип временной редукции.
49. Полугруппы с хорошей функцией Ляпунова.
50. Понятие фрактальной размерности глобального аттрактора.
51. Понятие Хаусдорфовой размерности глобального аттрактора.
52. Число определяющих мод.
53. Аттракторы полудинамических систем, зависящих от параметра.
54. Полунепрерывность аттрактора сверху и снизу.
55. Скорость притяжения к аттрактору, критерий полной непрерывности.
56. Оценки скорости притяжения.
57. Методы аппроксимации аттрактора "снаружи".
58. Методы аппроксимации аттрактора "изнутри".

Список задач.

1. Построить отображение, имеющее сверхлинейную скорость сжатия.
2. Построить отображение с полиномиальной скоростью сжатия.
3. Привести пример отображения с лог-логарифмической скоростью сжатия.
4. Написать программу вычисления корней одномерной функции методом Ньютона и методом обратной интерполяции. Сравнить области сходимости алгоритмов.
5. Написать программу вычисления корней одномерной функции методом Чебышева и методом обратной интерполяции. Сравнить области сходимости алгоритмов.
6. Написать программу вычисления решения системы нелинейных уравнений методом Ньютона.
7. Написать программу вычисления решения системы нелинейных уравнений методом типа секущих.
8. Используя стандартные библиотеки численного анализа, для конкретной матрицы найти базис в инвариантном подпространстве, отвечающем собственным числам с положительной действительной частью. Обосновать правильность полученного результата
9. Используя стандартные библиотеки численного анализа, найти базис в инвариантном подпространстве, отвечающем собственным числам, по модулю большим единице.

10. Используя стандартные библиотеки, построить SVD-разложение.
11. Используя стандартные библиотеки, построить GSVD-разложение.
12. Методом рядов найти кубическое приближение к устойчивому многообразию для заданного отображения малой размерности.
13. Методом рядов найти кубическое приближение к неустойчивому многообразию для заданного отображения малой размерности.
14. Написать программу численной аппроксимации устойчивого многообразия для заданного отображения.
15. Написать программу численной аппроксимации неустойчивого многообразия для заданного отображения.
16. Написать программу проектирования начальной точки на устойчивое многообразие заданного отображения вдоль подпространства допустимых смещений.
17. Написать программу численного решения задачи стабилизации по начальным данным для заданного нестационарного уравнения в частных производных.
18. Написать программу численного решения задачи стабилизации по краевым условиям для заданного нестационарного уравнения в частных производных.

Список литературы.

1. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. М.: Мир, 2001.
2. Chizhonkov E.V. Numerical aspects of one stabilization method // Russ.J.Numer.Anal.Math.Modelling. 2003. V. 18, N.5. P. 363-376.
3. Fursikov A.V., Kornev A.A. Feedback stabilization for Navier-Stokes equations: Theory and Calculations // Mathematical Aspects of Fluid Mechanics. Lect. Notes Ser. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. 130--172.
4. Иванчиков А.А., Корнев А.А., Озерицкий А.В. О новом подходе к решению задач асимптотической стабилизации // ЖВМиМФ. 2009. Т. 49, N.12. С. 2167-2181.
5. Кобельков Г.М., Корнев А.А., Ольшанский М.А., Чижонков Е.В. Некоторые актуальные проблемы математического моделирования. // в сб.: Современные проблемы математики и механики. 2009, 45 с.
6. Корнев А.А. Классификация методов приближенного проектирования на устойчивое многообразие // ДАН. 2005. 400, № 6. С. 736--738.
7. Корнев А.А., Степин А.А. Об асимптотически сжимающих отображениях // Матем. заметки. 2013. Том 94 выпуск 2, с. 227-233.
8. Ладыженская О.А., Солонников В.А. О принципе линеаризации и инвариантных многообразиях для задач магнитной гидродинамики // Зап.научн.сем.ЛОМИ. 1973. Т. 38. С. 46-93.

Дополнительная литература.

1. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения // Собрание сочинений Т.II, М.: изд.-во академии наук СССР, 1954
2. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории нелинейных систем, ч. 1// Москва-Ижевск: Институт Компьютерных Исследований, 2004.
3. Бахвалов Н.С., Корнев А.А., Чижонков Е.В. Численные методы. Решения задач и упражнения. М., Лаборатория знаний. 2016.
4. Hirsch M., Pugh C. and Shub M. Invariant manifolds. Lectures notes in Math. V. 583. Springer. Berlin, 1977.
5. Аносов Д.В. Многомерный аналог одной теоремы Адамара // Научн. докл. высш. шк., физ.-матем. науки. 1959. N.1. С. 3-12.