

Численное решение задач стабилизации.

А.А. Корнев

Введение. Типичная задача вычислительной математики, возникающая при решении обыкновенных дифференциальных уравнений, либо нестационарных уравнений в частных производных заключается в разработке и обосновании алгоритмов, позволяющих по заданным начальным условиям восстановить с гарантированной точностью соответствующую траекторию. Если исследуемая система содержит управляющую функцию, то при наличии подобных алгоритмов появляется возможность не только исследовать динамику системы для конкретных данных, но и допустимым образом влиять на ее эволюцию, направляя к траектории с требуемыми свойствами. Для систем седлового типа решение подобных задач стабилизации удается построить в терминах проектирования на локально устойчивые и неустойчивые многообразия в окрестности либо неподвижной точки, либо траектории седлового типа. Соответствующие численные алгоритмы основываются на классических результатах теории инвариантных многообразий для частично гиперболических динамических систем. В рамках данного подхода задача о построении управления, гарантирующего сближение заданных траекторий, сводится к задаче проектирования на многообразие, которое определяется решением некоторого функционального уравнения. Найденное таким образом управление, по сути, решает задачу стабилизации на неустойчивом подпространстве малой размерности, а сближение траекторий в остальной части пространства обеспечивается за счет свойств оператора эволюции. Соответствующие алгоритмы позволяют находить решения задач асимптотической стабилизации по начальным данным, краевым условиям, правой части для нестационарных конечно-разностных уравнений, обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных. В том числе, для задачи Лоренца, Бюргерса, Навье-Стокса, мелкой воды, баротропного вихря на сфере.

Постановка задачи. Пусть на полном нормированном пространстве $\{H, \|\cdot\|\}$ задано отображение $S : H \rightarrow H$, имеющее неподвижную точку $z_0 \in H$, т.е. $S(z_0) = z_0$. Пусть имеется некоторая начальная точка $a_0 \in H$, и построена соответствующая траектория, порождаемая оператором S :

$$\{a_0, a_1 = S(a_0), a_2 = S(a_1) = S^2(a_0), \dots, a_i = S^i(a_0), \dots\}.$$

В данном случае $S^i(\cdot)$ означает i -кратное последовательное применение

оператора $S(\cdot)$. Нас интересует задача нахождения множества $\mathcal{W}^- = \mathcal{W}^-(S, \mathcal{O}_{z_0})$ всех начальных данных a_0 из некоторой окрестности \mathcal{O}_{z_0} неподвижной точки z_0 , траектории которых стремятся к z_0 , т.е. $\|z_0 - S^i(a_0)\| \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, а также методы проектирования a_0 на данное множество \mathcal{W}^- .

Линейные отображения. Рассмотрим решение задачи в линейном случае, т.е. будем считать, что отображение имеет вид $S(z_0 + u) = S(z_0) + Lu$, где L — ограниченный линейный оператор, действующий из H в H . Наибольший (с точки зрения приложений) интерес представляют системы, обладающие следующими свойствами:

- $a_1)$ $H = H_+ \oplus H_-;$
- $a_2)$ $L(H_+) = H_+, \quad L(H_-) \subset H_-;$
- $a_3)$ $\|Lv\| \geq \mu_+ \|v\|, \forall v \in H_+;$
 $\|Lw\| \leq \mu_- \|w\|, \forall w \in H_-, \quad 0 \leq \mu_- < \mu < \mu_+, \quad \mu \leq 1.$

Это означает, что исходное пространство H может быть разложено в прямую сумму двух подпространств, инвариантных относительно оператора L . Если указанные оценки выполняются для $\mu = 1$, то подпространство H_- сжимается, а H_+ растягивается под действием оператора L . В этом случае точка z_0 называется неподвижной точкой седлового типа. Для рассматриваемых задач стабилизации также допустимы условия $\mu < 1$ и $\mu_+ < 1$, означающие, что на части подпространства H_+ оператор L может сжимать, но не сильнее, чем на H_- . Отметим, что $\mu_+ > 0$, поэтому оператор L является невырожденным и обратимым на H_+ . Далее для простоты считаем, что $\mu = 1$. При стабилизации линейных систем важную роль играет следующая теорема.

Теорема 1. Пусть линейное отображение S имеет указанный вид и выполнены условия a_{1-3} . Тогда

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|z_0 - S^i(a_0)\| = 0 \Leftrightarrow (z_0 - a_0) \in H_-.$$

Условиям теоремы удовлетворяет, например, система, определенная на конечномерном действительном пространстве $H = \mathbf{R}^N$ с оператором L , имеющем в некотором базисе $\{e_i\}_1^N$ диагональный вид $\text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_N)$, где $|\mu_i| \geq \mu_+$ при $1 \leq i \leq i_0$, $|\mu_i| \leq \mu_-$ при $i_0 + 1 \leq i \leq N$. В этом случае

$$H_+ = \text{span} \langle e_i, i = 1, \dots, i_0 \rangle, \quad H_- = \text{span} \langle e_i, i = i_0 + 1, \dots, N \rangle.$$

И если в качестве нормы векторов $u = \sum_{i=1}^N \alpha_i e_i$ взять $\|u\|_\infty = \max_{i=1, \dots, N} |\alpha_i|$, то условия теоремы будут выполнены. Отметим, что для произвольной нормы можно гарантировать только оценки вида $\|L^i v\| \geq C_+ \mu_+^i \|v\|$ и $\|L^i w\| \leq C_- \mu_-^i \|w\|$, означающие асимптотическое растяжение и сжатие на H_+ и H_- соответственно. Для операторов L общего вида верна теорема.

Теорема 2. Пусть $H = \mathbf{R}^N$, и собственные числа оператора L удовлетворяют условию

$$|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_{i_0}| \geq \mu_+ > 1 > \mu_- \geq |\lambda_{i_0+1}| \geq \dots \geq |\lambda_N|.$$

Тогда собственные и присоединенные вектора L , отвечающие жордановым клеткам для $|\lambda_j| > 1$, образуют базис в инвариантном подпространстве H_+ , а оставшиеся собственные и присоединенные вектора, отвечающие жордановым клеткам для $|\lambda_j| < 1$, образуют базис в инвариантном подпространстве H_- . При этом для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такая константа C , что

$$\begin{aligned} \|L^i v\| &\geq C(\mu_+ - \varepsilon)^i \|v\|, & \forall v \in H_+, \\ \|L^i w\| &\leq C(\mu_- + \varepsilon)^i \|w\|, & \forall w \in H_-. \end{aligned}$$

Отметим важную специфику жордановых клеточек. Пусть, например, в двумерном пространстве в естественном базисе матрица оператора L имеет вид $\begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$. Тогда неустойчивое подпространство отсутствует, и все вектора под действием L асимптотически стремятся к нулю. Однако, евклидова норма вектора $a_0 = (0, 1)^T$ только после третьего шага начнет убывать. Отметим, что чем большего размера жордановы клетки присутствуют в матрице, тем хуже сжимающие свойства L . Аналогичная картина имеет место и для подпространства H_+ . Кроме того, в некоторых нормах оценки a_3 ухудшаются при уменьшении угла между подпространствами H_+ и H_- .

В общем случае разложение $H = H_+ \oplus H_-$ позволяет определить операторы проектирования P_+ и P_- вдоль подпространств $H_- = P_-[H]$ и $H_+ = P_+[H]$ на подпространства H_+ и H_- соответственно. Подпространство $P_+[H]$ обычно конечномерно, т.е. $P_-[H]$ имеет конечную ко-размерность, поэтому операторы P_\pm удобно задать следующими наборами базисных векторов: $P_+[H] = \text{span} \langle \xi_1, \dots, \xi_{i_0} \rangle$, $P_-^\perp[H] = \text{span} \langle$

$\eta_1, \dots, \eta_{i_0} \rangle$, для $i = 1, \dots, i_0$, где $P_-^\perp[H] \perp P_-[H]$. Далее будем считать, что системы векторов $\{\xi_i\}, \{\eta_i\}$ известны и линейно независимы. Тогда построение $P_+[u]$ для произвольного $u \in H$ сводится, с учетом представления $u = \sum_{i=1}^{i_0} c_i \xi_i + P_-[u]$ и условия ортогональности $\{\eta_i\}$ и $P_-[u]$, к решению системы $\sum_{i=1}^{i_0} c_i (\xi_i, \eta_j) = (u, \eta_j)$, $j = 1, \dots, i_0$, и последующему нахождению $P_+[u] = \sum_{i=1}^{i_0} c_i \xi_i$. Проекция $P_-[u]$ вычисляется по формуле $P_-[u] = u - P_+[u]$. Вектора $\{\xi_i, \eta_i\}$ можно найти с помощью стандартного пакета ARPACK с учетом следующей леммы и ее следствия.

Лемма 1. *Собственные числа матриц A и A^T совпадают. Если $A\xi = \lambda_1\xi$, $A^T\eta = \lambda_2\eta$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $(\xi, \eta) = 0$, т.е. собственные вектора матриц A , A^T , отвечающие различным собственным числам ортогональны.*

Отметим, что множества $\{\lambda_i(A)\}$ и $\{\lambda_i(A^T)\}$ совпадают согласно определению собственных чисел. Вторая часть леммы следует из равенства $\lambda_1(\xi, \eta) = (A\xi, \eta) = (\xi, A^T\eta) = \lambda_2(\xi, \eta)$. Отсюда имеем

Следствие 1. *Подпространства $P_+[H]$ и $P_-^\perp[H]$ состоят из векторов, отвечающих собственным числам по модулю больше μ для операторов L и L^T соответственно.*

Для рассмотренного класса линейных операторов, имеющих неподвижную точку седлового типа, рассмотрим так называемую задачу стабилизации по начальным данным: для начальной точки a_0 , фиксированного подпространства $\mathcal{L} \subset H$, заданного набором линейно независимых элементов $\mathcal{L} = \text{span} \langle e_1, \dots, e_{i_0} \rangle$, определить поправку $l = \sum_{i=1}^{i_0} c_i e_i$ из условия

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|S^i(a_0 + l) - z_0\| \leq C \mu^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

т.е., согласно Теореме 1, из условия $(a_0 + l - z_0) \in H_-$. Отметим, что искомые коэффициенты могут быть найдены из системы:

$$\left(a_0 - z_0 + \sum_{i=1}^{i_0} c_i e_i, \eta_j \right) = 0, \quad j = 1, \dots, i_0.$$

Теорема 3. *Пусть система векторов $\{e_i\}_1^{i_0}$ линейно независима и $\{e_i^+ = P_+[e_i]\}_1^{i_0}$ образуют базис в $P_+[H]$. Тогда для произвольного $a_0 \in H$*

существует единственный вектор $l \in \mathcal{L}$, что $(a_0 + l - z_0) \in H_-$, $l = \sum_{i=0}^{i_0} c_i e_i$.

Исследование линейных математических моделей, записанных в виде системы либо дифференциальных уравнений, либо уравнений в частных производных, обычно проводится на основе следующего утверждения.

Теорема 4. Пусть $H = \mathbf{R}^N$ и задана система линейных дифференциальных уравнений $x'(t) = Ax(t)$, $x(0) = a_0$, с постоянной квадратной матрицей A , порождающей оператор $S(t, \cdot)$ вида $x(t) = S(t, x(0))$. Пусть собственные числа матрицы A удовлетворяют условию $\operatorname{Re}(\lambda_i) \geq \lambda_+ > 0$ при $i \leq i_0$, $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq \lambda_- < 0$ при $i \geq i_0 + 1$. Тогда собственные и присоединенные вектора A , отвечающие жордановым клеткам для $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$, образуют базис в инвариантном подпространстве H_+ , а оставшиеся собственные и присоединенные вектора, отвечающие жордановым клеткам для $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$, образуют базис в инвариантном подпространстве H_- . При этом для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такая константа C , что

$$\begin{aligned} \|v(t)\| &\geq C e^{(\lambda_+ - \varepsilon)t} \|v(0)\|, \quad \forall v(0) \in H_+, \\ \|w(t)\| &\leq C e^{(\lambda_- + \varepsilon)t} \|w(0)\|, \quad \forall w(0) \in H_-, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Отметим, что при решении уравнений в частных производных, пространство H бесконечномерно. Поэтому при выделении подпространств H_{\pm} и получении оценок типа a_3 , необходимо обращать внимание на конечномерность жордановых клеток и отделенность от нуля углов между корневыми подпространствами.

Пример 2. Пусть в пространстве $H = L_2[0, \pi]$ задано уравнение типа теплопроводности

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu, & u = u(t, x), \\ t \geq 0, \quad x \in \omega = [0, \pi], \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad u(0, x) = a(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(kx). \end{cases} \quad (1)$$

Его решение несложно получить методом разделения переменных (Фурье): $u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\lambda_k t} \sin(kx)$, где $\lambda_k = b - k^2$. Пусть существует такое i_0 , что $\lambda_{i_0} = b - i_0^2 > 0 > b - (i_0 + 1)^2 = \lambda_{i_0 + 1}$. Тогда условие $\|u(t)\|_{L_2(0,1)} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ эквивалентно условиям $c_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, i_0$, т.е. вложению $u(0, x) \in P_-[L_2(0, 1)] = \operatorname{span} \langle \sin(kx), k = i_0 + 1, \dots \rangle$. Отсюда, с учетом ортогональности функций $\{\sin(kx)\}$, получаем, что усло-

вие убывания с течением времени нормы решения эквивалентно условию $u(0, x) \perp P_-^\perp[L_2(0, 1)] = P_+[L_2(0, 1)] = \text{span} \langle \sin(kx), k = 1, \dots, i_0 \rangle$.

Рассмотрим подробнее решение задачи стабилизации по начальным данным при $b = 7, i_0 = 2, u(0, x) = \sin(x) + \sin(2x)$. Отметим, что в этом случае $u(0, x) \in H_+$. Требуется, изменив $u(0, x)$ только на полуинтервале $[0, \pi/2[$, обеспечить выполнение $u(0, x) + l(x) \in H_-$. Таким образом, подпространство допустимых смещений \mathcal{L} состоит из всевозможных функций, равных нулю на $[\pi/2, \pi]$. Если выбрать базис в виде

$$\mathcal{L} = \langle l_i(x) = \begin{cases} \sin(ix), & x \in [0, \pi/2[\\ 0, & x \in [\pi/2, \pi] \end{cases}, i = 1, 2 \rangle,$$

то найденная поправка l будет иметь минимальную длину в подпространстве $L_2[0, \pi]$, однако, при этом функция $u(0) + l$ будет разрывной. Для построения непрерывного и в некотором смысле оптимального продолжения можно выбрать базис в виде:

$$\mathcal{L} = \langle l_i(x) = \begin{cases} \Delta_0^{-1} \sin(ix), & x \in [0, \pi/2[\\ 0, & x \in [\pi/2, \pi] \end{cases}, i = 1, 2 \rangle.$$

Здесь $\Delta_0^{-1} \sin(ix) = l_i$ означает $l_i'' = \sin(ix), x \in]0, \frac{\pi}{2}[, l_i(0) = l_i(\frac{\pi}{2}) = 0$. Если базис фиксирован, то для нахождения коэффициентов имеем систему:

$$\begin{cases} (u(0) + c_1 l_1(x) + c_2 l_2(x), \sin(x)) = 0, \\ (u(0) + c_1 l_1(x) + c_2 l_2(x), \sin(2x)) = 0. \end{cases}$$

Отметим, что данный подход в том числе позволяет решить задачу стабилизации по краевым условиям для рассмотренного уравнения (1). Действительно, пусть требуется найти краевые условия, обеспечивающие стремление с течением времени решение задачи (1) к нулю. Рассмотрим вспомогательную задачу типа (1), но в области $\tilde{\omega} = [-\pi, 2\pi]$. При этом для расширенной задачи начальное условие положим равным $a(x)$ в исходной области ω и нулевым в подобласти расширения $\hat{\omega} = \tilde{\omega}/\omega$. Решим для полученной таким образом неустойчивой системы задачу стабилизации по начальным данным для $\tilde{a}(x)$, изменив функцию только в $\hat{\omega}$, а затем проинтегрируем по времени полученную задачу и найдем $\tilde{u}(t, x)$. Тогда след функции $\tilde{u}(t, x)$ при $x = 0, \pi$ задает искомые стабилизирующие граничные управления для исходной задачи.

Нелинейные отображения. Рассмотрим качественную картину динамики в окрестности неподвижной точки нелинейного отображения $S(\cdot)$.

Далее будем считать, что $z_0 = 0$. Если же $z_0 \neq 0$, то можно рассмотреть оператор $\mathcal{S}(u) := S(z_0 + u) - z_0$ с нулевой неподвижной точкой, для него провести все последующие рассуждения, а затем переформулировать их для исходного оператора $S(u)$. Будем считать, что S достаточно гладкий оператор и можно построить линейризацию $S(u) = Lu + R(u)$ в малой окрестности \mathcal{O} нулевой точки. Пусть L ограничен, существует разложение H на устойчивое и неустойчивое подпространства и выполнены следующие условия частичной гиперболичности (a):

$$\begin{aligned} a_1) & P_+ + P_- = I, \quad \|P_+\| \leq C_+, \quad \|P_-\| \leq C_-, \quad H = P_+[H] \oplus P_-[H]; \\ a_2) & L(P_+[H]) = P_+[H], \quad L(P_-[H]) \subset P_-[H]; \\ a_3) & \|Lv\| \geq \mu_+\|v\|, \quad \forall v \in P_+[H], \quad \|Lw\| \leq \mu_-\|w\|, \quad \forall w \in P_-[H], \\ & \mu_- < \mu = 1 < \mu_+; \\ a_4) & \|P_{\pm}[R(u_1) - R(u_2)]\| < \theta_{\pm}(\max\{\|u_1\|, \|u_2\|\})\|u_1 - u_2\|, \quad \forall u_i \in \mathcal{O}. \end{aligned}$$

Здесь C_{\pm}, μ, μ_{\pm} – константы, $\theta(\cdot), \theta(0) = 0$ – непрерывная положительная неубывающая функция, \mathcal{O} – некоторая окрестность нуля, где ведутся все последующие рассуждения, а операторы P_+ и P_- являются операторами проектирования вдоль подпространств $H_- = P_-[H]$ и $H_+ = P_+[H]$ на подпространства H_+ и H_- соответственно. В данных неравенствах v, w, u_i – произвольные элементы $\mathcal{O} \subset H$, внутри которой ведутся все последующие рассуждения. В данном случае в условиях (a₃), (a₄) имеется спектральный зазор для нормы оператора L (т.е. $\mu_+ > \mu_-$), и точка 0 называется [1] гиперболической.

Обозначим через $\mathcal{W}^-(S, \mathcal{O})$ устойчивое многообразие, т.н. "входящий ус Адамара", подмножества \mathcal{O} :

$$\mathcal{W}^-(S, \mathcal{O}) = \left\{ m^0 \in \mathcal{O} : \exists m^{i+1} \in \mathcal{O}, m^{i+1} = S(m^i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \right\},$$

а через $\mathcal{W}^+(S, \mathcal{O})$ неустойчивое многообразие, или "исходящий ус Адамара":

$$\mathcal{W}^+(S, \mathcal{O}) = \left\{ m^0 \in \mathcal{O} : \exists m^{i+1} \in \mathcal{O}, m^i = S(m^{i+1}), \quad i = 0, 1, 2, \dots \right\}.$$

В окрестности \mathcal{O} неподвижной гиперболической точки многообразия \mathcal{W}^{\pm} существуют и определяют качественное поведение траекторий. В том числе известно [1,6,7], что

- a) многообразия \mathcal{W}^{\pm} локально инвариантны относительно S ;
- б) если $m^- \subset \mathcal{W}^-$ и $i \geq 0$, тогда $S^i(m^-) \subset \mathcal{O}$;

в) под действием оператора S каждая траектория притягивается к \mathcal{W}^+ ;

г) если $m^+ \subset \mathcal{W}^+$, тогда для любого $i \geq 0$ существует $S^{-i}(m^+) \subset \mathcal{O}$;

д) если $u \notin \mathcal{W}^-$ тогда найдется $i = i(u) > 0$, что $S^i(u) \notin \mathcal{O}$.

Соответствующий результат в гиперболическом случае принято называть теоремой Адамара-Перрона.

По сути, устойчивое многообразие представляет собой множество точек m^0 , всегда остающихся в \mathcal{O} при действии оператора S . Неустойчивое многообразие состоит из точек m^0 , для которых обратима произвольная степень i оператора S , и $S^{-i}(m^0)$ принадлежит множеству \mathcal{O} . При этом, если окрестность достаточно мала, то можно найти такое отображение $f : P_-[\mathcal{O}_0] \rightarrow P_+[\mathcal{O}_0]$, удовлетворяющее условиям $f(0) = 0$, $\|f(w_1) - f(w_2)\| \leq \gamma\|w_1 - w_2\|$, что

$$\mathcal{W}^-(\mathcal{O}) = \{w + f(w), w \in P_-[\mathcal{O}_0]\}$$

Это означает, что для каждого элемента $w \in H_-$ однозначно вычисляется такой элемент $f(w) \in H_+$, что $(w + f(w)) \in \mathcal{W}^-$. Аналогично, существует отображение $g : P_+[\mathcal{O}_0] \rightarrow P_-[\mathcal{O}_0]$, удовлетворяющее условиям $g(0) = 0$, $\|g(v_1) - g(v_2)\| \leq \gamma\|v_1 - v_2\|$, что

$$\mathcal{W}^+(\mathcal{O}) = \{v + g(v), v \in P_+[\mathcal{O}_0]\}.$$

Это означает, что для каждого элемента $v \in H_+$ однозначно вычисляется такой элемент $g(v) \in H_-$, что $(v + g(v)) \in \mathcal{W}^+$. Таким образом, подмножества \mathcal{W}^\pm для нелинейного оператора $S(u) = Lu + R(u)$ являются нелинейными, искривленными посредством функций f и g , аналогами подпространств H_\pm для линейного отображения Lu . Далее нас интересует устойчивое многообразие \mathcal{W}^- (хотя некоторый класс задач стабилизации решается в терминах \mathcal{W}^+).

Известно, что отображение f может быть найдено из условия инвариантности: если $m = w + f(w)$, т.е. $m \in \mathcal{W}^-$, то для ее образа имеем $S(m) \in \mathcal{W}^-$, т.е. $P_+[S(m)] = f(P_-[S(m)])$. Отсюда получаем уравнение на функцию f :

$$P_+[L(w + f(w)) + R(w + f(w))] = f(P_-[L(w + f(w)) + R(w + f(w))]),$$

т.е.

$$Lf(w) + P_+R(w + f(w)) = f(Lw + P_-R(w + f(w))).$$

Второе тождество следует из условий инвариантности $a_{2,3}$ подпространств H_{\pm} относительно L .

Пример 3. Рассмотрим отображение $S(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}w_1, \\ \frac{1}{4}w_2, \\ 2v - \frac{7}{4}w_1^2 - \frac{127}{64}w_2^3 \end{cases}$ в

пространстве $u = (w_1, w_2, v) \in \mathbf{R}^3$. Не сложно проверить, что точки вида $(w_1, w_2, v = w_1^2 + w_2^3)$ переходят в точки $(\frac{1}{2}w_1, \frac{1}{4}w_2, v = (\frac{1}{2}w_1)^2 + (\frac{1}{4}w_2)^3)$, т.е. удовлетворяют условию инвариантности. Таким образом, для указанного отображения множество точек $\mathcal{W}^- = (w_1, w_2, w_1^2 + w_2^3)$ является инвариантным и стремится к нулю с экспоненциальной скоростью: $u_n = S^n(u) = ((\frac{1}{2})^n w_1, (\frac{1}{4})^n w_2, (\frac{1}{2})^{2n} w_1^2 + (\frac{1}{4})^{3n} w_2^3)$.

В общем случае при решении нелинейных уравнений в частных производных отображение f удается построить только приближенно с помощью итерационных алгоритмов, см. [5,7], основанных на следующем утверждении: в малой окрестности \mathcal{O} имеем

$$a + l \in \mathcal{W}^- \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P_+[S^n(a + l)] = 0.$$

Отсюда следует, что выбрав достаточно большое n и решив уравнение

$$P_+[S^n(a + \sum_{i=1}^{i_0} c_i e_i)] = 0$$

относительно неизвестных коэффициентов c_i мы получим приближенную проекцию a вдоль $\mathcal{L} = span \langle e_i, i = 1, \dots, i_0 \rangle$ на \mathcal{W}^- . При $n = 0$ имеем систему $P_+[a + \sum_{i=1}^{i_0} c_i e_i] = 0$, т.е. строим проекцию на H_- . Так как \mathcal{W}^- касается H_- , то часто такая проекция имеет достаточно высокую точность.

Пример 4. В качестве примера можно рассмотреть задачу построения устойчивого многообразия для уравнения Чафе-Инфанта:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 7u - u^3, & u = u(t, x), \\ t \geq 0, & x \in \omega = [0, \pi], \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, & u(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(kx). \end{cases}$$

В данном случае нелинейная добавка $(-u^3)$ разрушает инвариантность подпространства $w \in H_- = span \langle \sin \pi k x, k = 3, 4, \dots \rangle$, и элемент устойчивого многообразия \mathcal{W}^- имеет вид $w + v$, где $v = f(w) \in span \langle$

$\sin \pi kx, k = 1, 2 >$. Таким образом, для произвольного $w \in H_-$, достаточно малого по норме пространства $L_2[0, \pi]$, можно найти такие коэффициенты c_1, c_2 , что решение $u(t, x)$ задачи Чафе-Инфанта с начальным условием $w(x) + c_1 \sin x + c_2 \sin 2x$ стремится к нулю в норме $L_2[0, \pi]$ при $t \rightarrow \infty$. Так как соответствующие коэффициенты могут быть найдены только приближенно, то и убывание нормы $u(t)$ мы получим только на некотором конечном временном отрезке $[0, T]$. Поэтому, если мы хотим обеспечить дальнейшее убывание решения, для полученной функции $u(T)$ потребуется заново решить задачу перепроектирования на \mathcal{W}^- . Напомним, что в рамках данного подхода удастся решить задачу стабилизации нелинейной системы по краевым условиям.

Как было сказано выше, в некоторых случаях для решения нелинейных задачи стабилизации достаточно осуществлять проектирование не на устойчивое многообразие \mathcal{W}^- , а только на H_- , так как даже такая проекция имеет достаточно высокую точность. В качестве примера рассмотрим задачу о стабилизации течения электропроводящей жидкости в кольцевой области на основе двумерных уравнений Навье–Стокса.

Пример 5. Экспериментальная установка, приближенное моделирование процессов которой мы рассматриваем, представляет собой горизонтально расположенную круглую ванну из органического стекла с двумя коаксиальными цилиндрическими электродами, между которыми находится раствор медного купороса. Дно ванны соприкасается с электромагнитом, создающим вертикальное рабочее электромагнитное поле с почти синусоидальным по радиусу и не зависящем от угла профилем. В результате аналитического исследования предсказано, см. [8], и экспериментально получено, см. [4], что при малых значениях протекаемого тока J в системе имеется, см. Рис. 1, локально устойчивое ламинарное двухпотокное течение $u_z^{(0)}$ — ближняя к внешней границе часть жидкости вращается против часовой, а ближняя к внутренней границе — по часовой стрелке. При увеличении модуля J такой квазистационарный (в смысле функции тока) режим становится неустойчивым с неустойчивостью седлового типа. Это приводит к появлению трех вращающихся против часовой стрелки вихрей $u_z^{(3)}$ с центрами в вершинах так же вращающегося правильного треугольника, см. Рис. 1. В работе [8] аналитически было показано, что помимо трехвихревой структуры, для кольца с отношением радиусов порядка $1/3$ при больших числах Рейнольдса теоретически могут существовать неустойчивые структуры с волновыми числами до шести. Подобные режимы также наблюдались в некоторых

экспериментах, см. [2,3].

Для численного моделирования данного эффекта и решения задачи стабилизации ламинарного двухпоточкового течения рассмотрим систему уравнений Навье–Стокса в переменных скорость–давление

$$\begin{cases} u_t - \nu \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = f, & (x, y) \in \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0, & u = (v, w), f = (f_1, f_2) \end{cases} \quad (2)$$

с начально–краевыми условиями

$$\begin{aligned} u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=0} = u(0, x, y), \\ \Omega = \{(x, y) : r_1 \leq x^2 + y^2 \leq r_2\}, \quad r_1 = 0.3, r_2 = 1, \end{aligned} \quad (3)$$

правой частью вида $f(r, \phi) = -0.345 \sin(2\pi \frac{r-r_1}{r_2-r_1})$ и вязкостью $\nu = 170^{-1}$. Функция $f(r, \phi)$ выбрана с учетом рекомендаций работ [4,8], коэффициент ν найден в результате численных экспериментов. В какой степени полученные далее результаты согласуются с течением реальной жидкости можно, по-видимому, проверить только экспериментально.

Численное решение рассматриваемого уравнения (2), (3) в данной работе строилось в рамках пакета FreeFEM++ методом конечных элементов. Численно проверено, что для указанных значений параметров уравнения качественная картина динамики выглядит следующим образом: решение монотонно приближается к изображенному на Рис. 1 течению $u_z^{(0)}$ и некоторое время находится в его окрестности, а далее за время $30 \div 70$ единиц постепенно формируется устойчивое трехвихревое течение $u_z^{(3)}$.

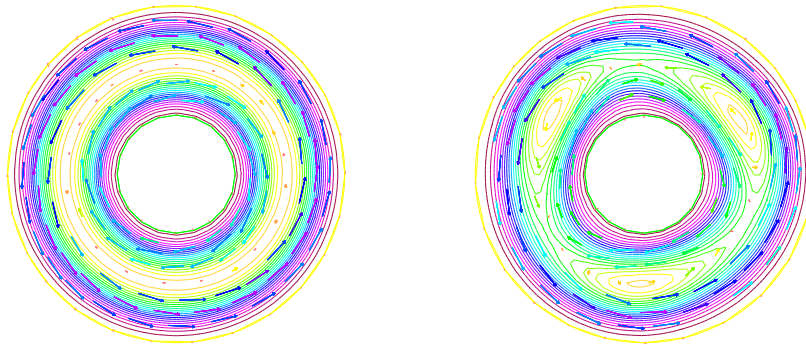


Рис. 1. Двухпоточковый режим $u_z^{(0)}$ и трехвихревой режим $u_z^{(3)}$.

Таким образом, система (2), (3) качественно правильно воспроизводит структуру течений реальной жидкости. Рассмотрим задачу стабилизации в окрестности неустойчивого течения $u_z^{(0)}$ по краевым условиям — для указанных параметров уравнения и фиксированной начальной функции $u_a|_{t=0}$, достаточно близкой к $u_z^{(0)}$, требуется найти такую граничную функцию $u_a(t)|_{r=r_1}$, определенную на внутренней границе области Ω , что полученное решение $u_a(t)$ уравнения (2) с найденным краевым условием на внутренней границе и нулевым на внешней остается в малой окрестности течения $u_z^{(0)}$ при всех $t \geq 0$, т.е. $u_a(t)$ имеет стабильную двухпотоковую структуру.

Решение сформулированной задачи стабилизации по краевым условиям будем строить в терминах проектирования на устойчивое инвариантное подпространство H_- . Это означает, что краевое условие строится для линеаризованной задачи, а найденное в результате граничное управление применяется для исходной нелинейной системы. Основу данного подхода составляют конструктивные теоретические результаты А.В. Фурсикова о возможности стабилизации по краевым условиям в окрестности стационарного течения для уравнений Навье–Стокса, см. [9,10], конструктивные теоремы о существовании инвариантных многообразий О.А. Ладыженской и В.А. Солонникова для уравнений типа Навье–Стокса, см. [6], Д.В. Аносова и Я.М. Песина для конечномерных динамических систем, см. [1,7] и цитируемую в этих работах литературу.

Приведем формальные шаги алгоритма.

Шаг 1. Приближенно найдем основное квазистационарное решение $u_z^{(0)}$ для уравнения (2), (3).

Шаг 2. Сформулируем вспомогательную расширенную математическую задачу

$$\begin{cases} \tilde{u}_t - \tilde{\nu} \Delta \tilde{u} + \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{u} + \nabla \tilde{p} = \tilde{f}, & (x, y) \in \tilde{\Omega}, \\ \operatorname{div} \tilde{u} = 0, & \tilde{u} = (\tilde{v}, \tilde{w}), \tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2) \end{cases} \quad (4)$$

с начально–краевыми условиями

$$\begin{aligned} \tilde{u}|_{\partial \tilde{\Omega}} &= 0, & \tilde{u}|_{t=0} &= \tilde{u}^0(x, y), \\ \tilde{\Omega} &= \{r_0 \leq x^2 + y^2 \leq r_2\} = \Omega \cup \bar{\Omega}, & 0 &< r_0 < r_1. \end{aligned} \quad (5)$$

При этом выберем параметры расширения так, чтобы исходная задача (2), (3) и построенная расширенная задача (4), (5) совпадали в области Ω , т.е. положим $\tilde{\nu} = \nu$, $\tilde{f}_{1,2} \equiv f_{1,2}$ для $(x, y) \in \Omega$. В подобласти расширения

$\bar{\Omega} = \tilde{\Omega} \setminus \Omega$ значения указанных параметров определим так, чтобы основное квазистационарное течение $\tilde{u}_z^{(0)}$ для расширенной задачи было близко к решению u_z при $(x, y) \in \Omega$. По сути, это соответствует погружению исходной кольцеобразной области в среду с другими характеристиками, но с приближенным сохранением интересующего нас квазиустойчивого состояния. Отметим, что взаимодействие между средами чисто математическое, формально описываемое задачей (4), (5).

Найдем основное течение $\tilde{u}_z^{(0)}$ для задачи (4), (5) и убедимся, что $\|\tilde{u}_z^{(0)} - u_z^{(0)}\|_{\Omega} \ll 1$. Это позволит заменить исходную задачу стабилизации к $u_z^{(0)}$ в области Ω на задачу стабилизации к $\tilde{u}_z^{(0)}$ в области $\tilde{\Omega}$.

Шаг 3. Пусть оператор L соответствует линеаризации стационарного уравнения Навье–Стокса (4), (5) в области $\tilde{\Omega}$ в окрестности решения $\tilde{u}_z^{(0)}$, а L^* — сопряженный к нему оператор. Вычислим для операторов L и L^* базисы в подпространствах $H_+ = \text{span} \langle \xi_i, i = 1, \dots, i_0 \rangle$ и $H_-^\perp = \text{span} \langle \eta_i, i = 1, \dots, i_0 \rangle$, отвечающие собственным числам с неотрицательной действительной частью. Если $\tilde{u}_z^{(0)}|_{\Omega} \equiv u_z^{(0)}$, то в силу неустойчивости исходного течения $u_z^{(0)}$ такие числа заведомо существуют и всегда $0 < i_0 < \infty$. Отметим, что все пространство H можно представить в виде прямой суммы $H = H_+ \oplus H_-$, где H_- соответствует корневым подпространствам оставшейся части спектра с отрицательной действительной частью. При этом $L(H_+) = H_+$, $L(H_-) \subset H_-$, т.е. указанные подпространства инвариантны относительно оператора L , и $H_-^\perp \perp H_-$. Далее будем считать, что соответствующие вектор–функции $\{\xi_i, \eta_i, i = 1, \dots, i_0\}$ найдены и линейно независимы.

Построим так называемое подпространство допустимых смещений $\mathcal{L} = \text{span} \langle e_i, i = 1, \dots, i_0 \rangle$ вида

$$e_i(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in \Omega, \\ \bar{e}_i, & (x, y) \in \bar{\Omega}, \end{cases}$$

где функция $\bar{e}_i(x, y)$ является решением задачи Стокса в области $\bar{\Omega}$ с нулевыми краевыми условиями:

$$\begin{cases} -\Delta \bar{e}_i + \nabla q = \xi_i, \\ \text{div } \bar{e}_i = 0, \\ \bar{e}_i|_{\partial \bar{\Omega}} = 0, \bar{\Omega} = \{r_0 \leq x^2 + y^2 \leq r_1\}. \end{cases} \quad (6)$$

Такой выбор обеспечивает корректность и в некотором смысле оптимальность изменения поля скоростей при проектировании на многообразии $\mathcal{W}^-(\mathcal{O})$.

Шаг 4. Для стабилизации по границе решения задачи (2), (3) с начальным условием u_a продолжим функцию u_a из области Ω в область $\tilde{\Omega}$ до функции \tilde{u}_a так, что $\text{dist}(\tilde{u}_a, \mathcal{W}^-(\mathcal{O}(\tilde{u}_z^{(0)}))) \ll 1$. Процесс продолжения состоит из двух подшагов:

4.1. приближенно продолжим u_a в область $\tilde{\Omega}$ до бездивергентной функции \bar{u}_a ;

4.2. для найденной функции \bar{u}_a методом нулевого приближения, см. [11], определим приближенную проекцию на устойчивое подпространство H_- в виде $\tilde{u}_a = \bar{u}_a + \sum_{i=1}^{i_0} c_i e_i$, где коэффициенты c_1, \dots, c_{i_0} вычислим из условий $(\tilde{u}_a - \tilde{u}_z, \eta_j) = 0, j = 1, \dots, i_0$. В этом случае в разложении функции $\tilde{u}_a - \tilde{u}_z$ по базису корневых подпространств H_+ и H_- не содержатся компоненты подпространства H_+ , поэтому $(\tilde{u}_a^{(0)} - \tilde{u}_z^{(0)}) \in H_-$.

Найденное таким образом продолжение \tilde{u}_a является начальным условием для нелинейной задачи (4), (5). И если \tilde{u}_a принадлежит малой окрестности $\mathcal{W}^-(\mathcal{O})$, то норма разности $\tilde{u}_a(t) - \tilde{u}_z^{(0)}$ убывает для $0 \leq t \leq T_0$. Поэтому след $\tilde{u}_a(t)|_{y=0, y=l_2}$ дает искомое стабилизирующее управление $\theta^{(1,2)}(t)$ для исходной задачи в области Ω .

Так как относительно линеаризованной задачи подпространство H_- инвариантно, следовательно, если $\|\tilde{u}_z^{(0)} - u_z\|_{\Omega} = 0$ и все промежуточные задачи решаются абсолютно точно, то в нестационарном линейном случае (т.е. для задач Озеена в расширенной и исходной областях) время T_0 можно выбрать сколь угодно большим. Для нелинейных задач в разложении разности решений $\tilde{u}_a(t) - \tilde{u}_z^{(0)}$ в некоторый момент времени $t = T_1$ появятся значительные компоненты из подпространства H_+ , поэтому процесс стабилизации будет нарушен. Следовательно *Шаг 4* необходимо циклически повторять для начальных функций $u_a|_{t=T_1}, u_a|_{t=2T_1}$ и т. д.

Расчеты проводились на квазиравномерной триангуляции области при $\tau, h \sim 10^{-2}$. Приближение к квазистационарному решению $u_z^{(0)}$ было найдено в результате решения стационарной линеаризованной системы (2). Отметим, что в некоторых случаях для приближенного вычисления $u_z^{(0)}$ лучше решать исходную нелинейную стационарную систему (2), например, методом Ньютона. Численно получено, что в окрестности $u_z^{(0)}$ для исходной задачи имеются вихревые собственные функции с волновыми числами $n_v = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$, и каждой моде соответствует пара комплексно-сопряженных собственных чисел, а также ламинарное двухпоточное течение. Наиболее неустойчивыми являюся моды $n_v = 4, 3, 5$.

Отметим, структура собственной функций, например, для $n_v = 3$, близка к структуре функции ξ_1 , Рис.2, а четырехвихревая мода близка к ξ_3 , Рис.3. При этом все численно найденные собственные числа имеют близкую к нулю, но отрицательную действительную часть, хотя решение нелинейной задачи с $u(0) = u_z^{(0)}$ также выходит за время порядка $30 \div 40$ единиц на трехвихревой режим. Данная несогласованность объясняется, на наш взгляд тем, что линейаризация строится для функции не являющейся стационаром.

В подобласти расширения $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega} \setminus \Omega$ положим $\tilde{\nu} = \nu \cdot (50 \frac{r-r_1}{r_0-r_1} + \frac{r-r_0}{r_1-r_0})$, $\tilde{f}_{1,2} \equiv 0$. Приближение к квазистационарному решению $\tilde{u}_z^{(0)}$ было найдено в результате решения расширенной линейаризованной стационарной задачи (4). Так как функция $\tilde{u}_z^{(0)}$ принадлежит малой окрестности $u_z^{(0)}$ в области Ω , следовательно процесс стабилизации в области $\tilde{\Omega}$ можно вести к $\tilde{u}_z^{(0)}$, что обеспечит в случае успеха стабилизацию к $u_z^{(0)}$ в области Ω .

Выделим линейную часть L для оператора правой части расширенной системы Навье–Стокса в окрестности функции $\tilde{u}_z^{(0)}$ и вычислим для оператора L базис в H_+ и H_-^{\perp} . Численно получено, что в окрестности $\tilde{u}_z^{(0)}$ имеются вихревые собственные функции с волновыми числами $n_v = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$, каждой моде соответствует пара комплексно-сопряженных собственных чисел, а также ламинарное двухпотокное течение (т.к. $\tilde{u}_z^{(0)}$ не является стационаром). При этом $\lambda(n_v = 4) \approx 0.06 \pm 0.4i$, $\lambda(n_v = 5) \approx 0.04 \pm 0.4i$, $\lambda(n_v = 3) \approx -0.03 \pm 0.5i$. Отметим, что решение нелинейной расширенной задачи с $\tilde{u}(0) = \tilde{u}_z^{(0)}$ также выходит на трехвихревой режим. Соответствующие функции $\{\xi_1, \eta_1\}$ для $n_v = 3$ изображены на Рис. 3. При этом функции ξ_2, η_2 имеют схожий вид с точностью до поворота на угол порядка $\pi/6$.

Процесс перепроектирования (т.е. четвертый пункт алгоритма) будем осуществлять каждый шаг по времени. Если краевые условия равны нулю, т.е. стабилизация отсутствует, то решение стремится к вращающейся системе из трех вихрей $u_z^{(3)}$, см. Рис. 1. Если процесс стабилизации включить с момента времени $T = 10$ с решения, полученного для задачи (2) при нулевой начальной скорости при нулевых граничных условиях, а в процессе стабилизации учитывать только пару собственных функций для $n_v = 3$, то решение стремится к течению из четырех вращающихся вихрей $\tilde{a}^{(4)}$, см. Рис. 2. Таким образом, частичная стабилизация к $u_z^{(0)}$ в смысле блокирования только трехвихревой моды $n_v = 3$, обеспечивает

стабилизацию в окрестности вторичного четырехвихревого течения.

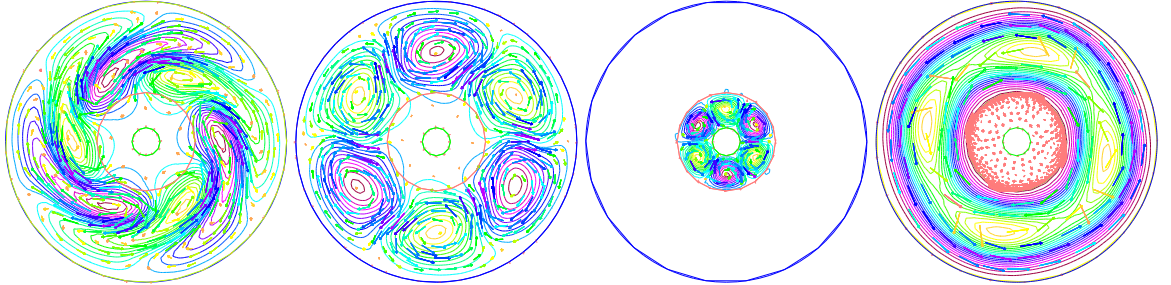


Рис. 2. Базисные функции ξ_1, η_1, e_1 и типичная функция $\tilde{a}^{(4)}$.

Если в процессе стабилизации учитывать четыре собственные функции, отвечающие $n_v = 3, 4$, то решение стремится к двухпоточковому течению, т.е. обеспечивается процесс стабилизации к $u_z^{(0)}$. Типичные структуры $\tilde{a}^{(0)}$, образующиеся в этом случае для расширенной задачи изображены на Рис. 3. Модули найденных коэффициентов в разложении поправки по векторам $\{e_i(x)\}$ имеют порядок $0.03 \div 0.003$.

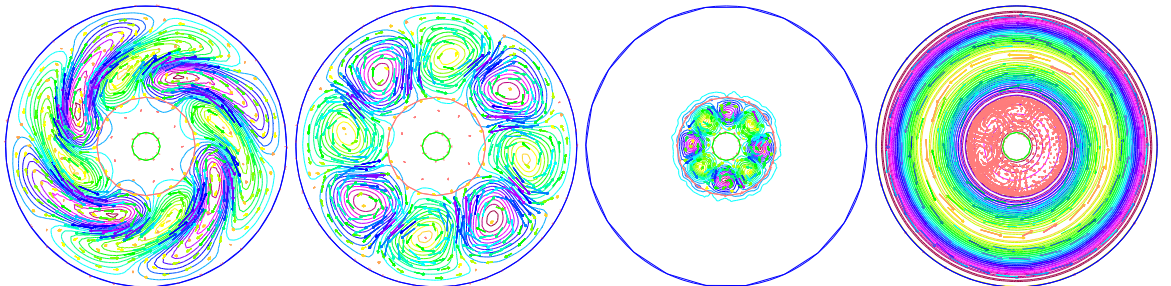


Рис. 3. Базисные функции ξ_3, η_3, e_3 и типичная функция $\tilde{a}^{(0)}$.

Еще раз отметим, что на всем отрезке стабилизации $t \geq 10$ реализуется управление с обратной связью — через равные промежутки времени $T_1 = 0.01$ осуществляется перепроектирование текущего течения в расширенной области на устойчивое подпространство H_- . Поэтому формально стабилизирующие краевые условия могут существенно зависеть от времени. Однако, для данной задачи управление выходит на асимптотически постоянный режим типа мелких пульсаций.

Заключение. Многочисленные расчеты по решению задач стабилизации, проведенные для различных уравнений, показали высокую робастность данного подхода. Это связано с тем, что во многих случаях изложенный алгоритм устойчив относительно ошибок, возникающих при

решении вспомогательных задач типа нахождения неподвижной точки u_z и вычисления базисов в подпространствах H_+ и H_-^\perp . Более того, для широкого класса уравнений математической физики \mathcal{W}^- существует в окрестности, имеющей в интегральной норме вид бесконечномерного эллипсоида, длины полуосей которого стремятся к бесконечности. Отметим также, что согласно структуре функций $\{\xi_i, \eta_i\}$, изображенных на Рис. 2,3, основная неустойчивость сосредоточена в исходной области, т.к. вязкость в подобласти расширения почти на два порядка меньше. Однако, в данном случае, на наш взгляд, процесс стабилизации оказался успешным вдоль базиса $\{e_i\}$, Рис. 2 и 3, благодаря общей глобальной структуре течений — в полученной расширенной задаче существуют либо двухпоточковое, либо трех-, либо четырехвихревое течения. Блокируя в процессе стабилизации возникновение вихревых структур, нам удастся обеспечить двухпоточковое решение. Косвенно это подтверждается следующим расчетом — если указанный алгоритм стабилизации формально реализовать для $u(x)$, считая, что $\tilde{z}_0(x) \equiv 0$, т.е. подавлять возникающие трехвихревые структуры на фоне нулевого течения, то мы также выйдем на четырехвихревой режим. Если же подавлять в $u(x)$ возникающие на фоне нулевого течения трехвихревые и четырехвихревые структуры, то мы получим двухпоточковое течение. Таким образом, нелинейность в данном случае играет ключевую глобально стабилизирующую роль.

Литература

1. Аносов Д.В. Многомерный аналог одной теоремы Адамара // Науч. докл. высш. шк., физ.-матем. науки, 1959, № 1, с.3-12.
2. Бондаренко Н.Ф., Гак М.З., Должанский Ф.В. Лабораторная и теоретическая модели плоского периодического течения // ФАО, т. 15, № 10, с.1017-10, 1979.
3. Гак Е.З. Магнитные поля и водные электролиты. — Санкт-Петербург: "Элмоп 2013. — 535 с.
4. Довженко В.А., Новиков Ю.В., Обухов А.М. Моделирование процесса генерации вихрей в аксиально симметричном азимутальном поле магнитогидродинамическим методом // ФАО, т. 15, № 11, с.1199-1202, 1979.
5. Корнев А.А. Классификация методов приближенного проектиро-

вания на устойчивое многообразие // Докл. РАН, 2005, т. 400, № 6, с.736-738.

6. *Ладыженская О.А., Солонников В.А.* О принципе линеаризации и инвариантных многообразиях для задач магнитной гидродинамики // Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1973, т. 38, с.46-93.

7. *Песин Я.Б.* Характеристические показатели Ляпунова и гладкая эргодическая теория // Успехи матем. наук, 1977, т. 32, № . 4, с.55-112.

8. *Пономарев В.М.* Об устойчивости одного класса осесимметричных течений несжимаемой жидкости // Механика жидкости и газа. №1, с. 3-9, 1980.

9. *Fursikov A.V., Kornev A.A.* Feedback stabilization for Navier-Stokes equations: Theory and Calculations // Mathematical Aspects of Fluid Mechanics. Lecture notes series, Cambridge University Press, 2012, p.130-172.

10. *Fursikov A.V.* Stabilizability of Two-Dimensional Navier – Stokes Equations with Help of a Boundary Feedback Control. // J. math. fluid mech. V.3, 2001, P.259-301.