

О ДИАГНОСТИКЕ ГРАДИЕНТНОЙ КАТАСТРОФЫ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Е.В. Чижонков¹

В настоящей работе для квазилинейных гиперболических систем уравнений специального вида предлагается двухэтапный анализ с целью диагностики возникновения градиентной катастрофы решения. Рассматривается применение первого этапа для простых постановок: скалярного уравнения Бюргера и обобщающей его квази-ортогональной системы. Полный двухэтапный анализ применяется для систем уравнений, описывающих одномерные электронные колебания в плазме: плоские колебания в релятивистском и в нерелятивистском случаях, а также аксиально симметричные нерелятивистские цилиндрические колебания.

Ключевые слова: градиентная катастрофа, квазилинейные гиперболические уравнения, плазменные колебания, эффект опрокидывания, аксиальное решение.

Введение. Основой большого количества математических моделей являются квазилинейные системы гиперболических уравнений, приводящиеся к инвариантам, т.е. представимые в виде

$$\frac{\partial r_k}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial r_k}{\partial x} = f_k(x, t, \mathbf{r}), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (0.1)$$

Типичной постановкой задачи для системы (0.1) является задача Коши

$$r_k(x, 0) = r_k^0(x), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (0.2)$$

Если при этом f_k растут не слишком быстро с ростом $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)^T$, например, при любых x, t, \mathbf{r} справедливо

$$\left| \frac{\partial f_k}{\partial r_j} \right| \leq C, \quad C = \text{const}, \quad k, j = 1, 2, \dots, n,$$

то решения $\mathbf{r}(x, t)$ систем такого типа остаются ограниченными (по модулю) при любых значениях t , однако, их производные тем не менее могут неограниченно возрастать по абсолютной величине, если $\xi_k(x, t, \mathbf{r})$ существенно зависят от \mathbf{r} (см. [22], стр.82).

¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико – математический факультет, Ленинские горы, 119899, Москва; профессор, e-mail: chizhonk@mech.math.msu.su

Эффект образования неограниченных производных при ограниченности решения системы квазилинейных гиперболических уравнений принято называть *градиентной катастрофой*.

Существуют классы задач, в которых возникновение градиентной катастрофы, по существу, означает предел применимости используемой математической модели. Другими словами, если из гладких начальных данных (0.2), например, непрерывно дифференцируемых, формируется разрывное решение системы (0.1), это означает потерю физического смысла искомых функций. Поясним сказанное на примере плазменных колебаний.

При математическом моделировании процессов в бесстолкновительной холодной плазме наиболее часто используются два подхода — Лагранжа и Эйлера: метод частиц, позволяющий отслеживать их индивидуальные траектории, и гидродинамическое описание на базе уравнений с частными производными (см., например, [1], [10], [15]). В рамках обоих подходов давно и хорошо известен [9] эффект *опрокидывания колебаний*. В первом случае критерием опрокидывания колебаний является пересечение электронных траекторий, а во втором — обращение в бесконечность функции, описывающей плотность электронов. В монографии [24] (см. также приложение в [13]) имеется строгое обоснование появления сингулярности плотности среды при пересечении траекторий частиц.

Физическая суть эффекта опрокидывания достаточно проста. Электроны каким-либо способом выводятся из положения равновесия, т.е. искусственно формируется электрическое поле разделения зарядов. Далее под действием кулоновских сил частицы стремятся вернуться в положение равновесия, однако, двигаясь все время с ускорением подобно маятнику, электроны регулярно проскакивают мимо указанного положения. В силу нелинейности уравнений, разница в частотах колебаний различных частиц с течением времени становится существенной, что приводит к пересечению соседних траекторий. Когда две различные частицы занимают одно и то же положение в пространстве и времени, то дальнейшее отслеживание их движения требует привлечения более сложных моделей, чем классическая электродинамика, так как бесконечная концентрация электрического заряда требует специальной интерпретации.

Следует заметить, что описанная ситуация принципиально отличается от моделирования в газовой динамике, где разрывные решения физически естественны. Следствием этой естественности является факт, что точное или приближенное решение задачи Римана (задачи Коши с кусочно разрывными начальными данными) является основой большинства современных алгоритмов численного решения для соответствую-

ющих постановок задач [18]. В задачах же, связанных с плазменными колебаниями, постановка задачи Римана не имеет никакого физического смысла, так как начальная разрывная функция электрического поля уже означает бесконечную концентрацию заряда в точках разрыва.

В настоящей работе для диагностики возникновения градиентной катастрофы предлагается двухэтапный подход.

На первом этапе предлагается связать пространственные градиенты начальных функций (0.2) с начальными условиями для специальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Это приводит к рассмотрению более простой задачи Коши, для которой следует определить условие существования вертикальной асимптоты („blow-up“-свойства). Так как вспомогательное решение определяет локальные градиенты исходной задачи (0.1),(0.2), то выполнение указанного условия будет порождать градиентную катастрофу, т.е. потерю непрерывности решения исходной задачи. Этот этап принципиально отличается от других известных подходов к исследованию квазилинейных гиперболических систем, таких как продолженная система ([22], стр.32), мажорантная система ([22], стр.62), метод нелинейной емкости [20] и т.д. Следует отметить только некоторое родство с идеями работы [17], хотя предлагаемый в работе анализ представляется технически более простым. Первый этап, посвященный исследованию свойств вспомогательной задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, по сути связан с исследованием исходной постановки в эйлеровых переменных.

Второй этап предназначен для более „тонкого“ анализа исходной задачи в эквивалентной лагранжевой постановке. Он проводится в предположении, что начальные данные по результатам первого этапа не приводят к быстрой градиентной катастрофе, т.е. опрокидыванию колебаний, возникающему уже на первом периоде колебаний. Суть этапа — построение равномерно пригодных асимптотических решений исходной системы в слабо нелинейном приближении. Здесь для уравнений, описывающих траектории отдельных частиц выводится зависимость частоты колебаний от начальной амплитуды. На этом основании делается вывод о пересечении траекторий частиц, а также при необходимости возможна оценка асимптотики этого события в зависимости от времени колебаний.

1. Скалярное уравнение Бюргерса и обобщающая его система. Начнем рассмотрение предлагаемого подхода с хорошо известной задачи

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad U(x, 0) = U^0(x), \quad (1.1)$$

и проанализируем для нее условие возникновения градиентной катастрофы.

Рассмотрим для исходного уравнения так называемое *аксиальное решение*, т.е. пробное решение вида

$$U(x, t) = W(t) x. \quad (1.2)$$

В работе [3] для нелинейных задач, описывающих лазер – плазменные взаимодействия и обладающих аксиальной симметрией, было введено понятие аксиального решения как решения, имеющего локально – линейную зависимость в окрестности начала пространственной координаты. В данном случае аксиальная симметрия, конечно, не предполагается, однако в целях удобства сохраним это название для вещественных решений, имеющих указанную структуру.

Несложно убедиться, что множитель $W(t)$, зависящий от времени, в данном случае удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$W' + W^2 = 0, \quad (1.3)$$

которое следует дополнить произвольным вещественным начальным условием

$$W(0) = \beta. \quad (1.4)$$

Теперь выясним условия существования и единственности решения задачи Коши (1.3)-(1.4). Так как сформулированная задача имеет аналитическое решение

$$W(t) = \frac{\beta}{1 + \beta t},$$

то интересующее нас условие имеет вид $\beta \geq 0$. В противном случае $\beta < 0$ решение задачи (1.3)-(1.4) при $t = -1/\beta$ имеет вертикальную асимптоту („blow-up“-свойство), что означает возникновение градиентной катастрофы для исходной постановки (1.1).

Этот вывод хорошо согласуется с известным (см., например, [19]) фактом, что неубывание гладкой функции $U^0(x)$ необходимо и достаточно для существования гладкого решения (1.1) при всех $t > 0$. Отметим, что в этом простом случае класс гладкости может быть расширен до непрерывных решений, хотя нас интересуют в первую очередь классические (т.е. непрерывно дифференцируемые) решения.

В завершение примера уточним, что представляет интерес поведение исключительно градиента решения, так как именно „blow-up“-свойство для градиента определяет формирование разрывного решения из гладких начальных данных задачи.

Рассмотрим теперь систему уравнений, обобщающую уравнение Бюргера,

$$\frac{\partial U}{\partial t} + Z \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial t} + U \frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \quad (1.5)$$

снабженную соответствующими начальными условиями

$$U(x, 0) = U^0(x), \quad Z(x, 0) = Z^0(x). \quad (1.6)$$

Для аксиальных решений системы (1.5), часто называемой квази-ортогональной [23],

$$U(x, t) = W(t)x, \quad Z(x, t) = D(t)x$$

запишем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$W' + DW = 0, \quad Z' + DW = 0 \quad (1.7)$$

и снабдим ее вещественными начальными данными

$$W(0) = \beta, \quad D(0) = \alpha. \quad (1.8)$$

Задача (1.7),(1.8) может быть решена в явном виде. Случай $\alpha = \beta$ сводится к уже рассмотренному выше уравнению Бюргера, для которого условие $\beta < 0$ формирует из сколь угодно гладкой начальной функции разрывное решение, т.е. градиентную катастрофу.

Рассмотрим случай $\alpha \neq \beta$. Для различных начальных условий (1.8) справедливо равенство $Z(t) = W(t) + \alpha - \beta$. Исключая из системы (1.7) функцию $Z(t)$ и делая замену $y(t) = W(t) - (\beta - \alpha)/2$, приходим к задаче

$$y' + y^2 = b^2, \quad y(0) = a, \quad \text{где} \quad b = \frac{|\beta - \alpha|}{2}, \quad a = \frac{\beta + \alpha}{2}.$$

Ее аналитическое решение хорошо известно [16] и дается формулой

$$y(x) = \frac{ab + b^2 \tanh(bx)}{b + a \tanh(bx)}.$$

Так как гиперболический тангенс по модулю не превосходит единицу, то при положительных значениях аргумента bx знаменатель в формуле $y(x)$ обратится в нуль если одновременно выполнено: $\beta < 0$, $\alpha < 0$. Отрицательность начальных данных является достаточным условием „blow-up“-свойства для задачи (1.7),(1.8). Поскольку параметры β и α характеризуют градиенты начальных функций в (1.6), то выполнение хотя бы для одного значения $-\infty < x < +\infty$ условия

$$\frac{\partial U^0(x)}{\partial x} < 0, \quad \frac{\partial Z^0(x)}{\partial x} < 0$$

приведет к градиентной катастрофе в задаче (1.5),(1.6). В статье [23] приведена наглядная иллюстрация формирования разрывного решения в рассмотренной постановке.

2. Плоские нерелятивистские электронные колебания. В качестве следующего, более содержательного примера рассмотрим задачу Коши для уравнений в безразмерной форме, описывающих плоские одномерные нерелятивистские колебания электронов в холодной плазме [4]

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + E + V \frac{\partial V}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial E}{\partial t} - V + V \frac{\partial E}{\partial x} &= 0, \\ V(x, 0) &= V^0(x), & E(x, 0) &= E^0(x). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь V — скорость электронов, E — функция, описывающая электрическое поле.

Рассмотрим аксиальные решения системы (2.1)

$$V(x, t) = W(t) x, \quad E(x, t) = D(t) x$$

и изучим их некоторые свойства.

Множители, зависящие от времени, в данном случае удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$W' + D + W^2 = 0, \quad D' - W + W D = 0. \quad (2.2)$$

Дополним полученные уравнения произвольными вещественными начальными условиями

$$W(0) = \beta, \quad D(0) = \alpha \quad (2.3)$$

и выясним условия существования и единственности решения задачи Коши (2.2)-(2.3).

Заметим, что приведенная задача Коши не является тривиальной, поскольку допускает как регулярные 2π -периодические решения (например, при малых α и β), так и решения, имеющие сингулярности на конечном интервале времени („blow-up“ – решения). При этом имеющиеся результаты даже для полиномиальных правых частей [14] в общем случае не позволяют установить точную границу между множествами начальных данных, порождающими решения различных типов. Поэтому представляется полезным несколько другой взгляд на рассматриваемую систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Имеет место [4]

ЛЕММА 1. *Задача Коши (2.2)-(2.3) эквивалентна следующей дифференциально – алгебраической задаче:*

$$\begin{aligned} W' &= (1 - 2\alpha - \beta^2)x^2 + (\alpha - 1)x, \\ W^2 + 1 + (1 - 2\alpha - \beta^2)x^2 + 2(\alpha - 1)x &= 0, \\ W(0) &= \beta, \quad x(0) = 1. \end{aligned}$$

Это утверждение позволяет начальные условия (2.3) включить в определение многообразия, на котором рассматривается новое дифференциальное уравнение. Далее устанавливается [4]

ТЕОРЕМА 1. *Необходимым и достаточным условием существования и единственности гладкого периодического решения задачи Коши (2.2)-(2.3) является выполнение неравенства*

$$1 - 2\alpha - \beta^2 > 0. \quad (2.4)$$

Из теоремы 1 следует, что достаточным условием возникновения градиентной катастрофы для задачи (2.1) будет выполнение хотя бы для одного значения x для начальных функций $V^0(x)$ и $E^0(x)$ неравенства

$$1 - 2 \frac{\partial E^0(x)}{\partial x} - \left(\frac{\partial V^0(x)}{\partial x} \right)^2 \leq 0. \quad (2.5)$$

Преобразуем уравнения в эйлеровых переменных (2.1) в уравнения относительно лагранжевых переменных:

$$\frac{dV(\rho^L, t)}{dt} = -E(\rho^L, t), \quad \frac{dE(\rho^L, t)}{dt} = V(\rho^L, t),$$

где $d/dt = \partial/\partial t + V\partial/\partial x$ — полная производная по времени.

При этом функция $R(\rho^L, t)$, определяющая смещение частицы с лагранжевой координатой ρ^L и траекторией $x(\rho^L, t)$

$$x(\rho^L, t) = \rho^L + R(\rho^L, t), \quad (2.6)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{dR(\rho^L, t)}{dt} = V(\rho^L, t).$$

Отсюда следует, что значения $R(\rho^L, t)$ и $E(\rho^L, t)$ совпадают с точностью до постоянной, которая вычисляется из условия равенства нулю электрического поля при отсутствии смещений. Другими словами, в случае плоских одномерных колебаний справедливо

$$R(\rho^L, t) \equiv E(\rho^L, t), \quad (2.7)$$

и основная система уравнений (1.5) в лагранжевых переменных принимает вид

$$\frac{dV}{dt} = -R, \quad \frac{dR}{dt} = V. \quad (2.8)$$

Суммируем вышесказанное: траектории всех частиц, каждая из которых идентифицируется лагранжевой координатой ρ^L , можно определить независимым интегрированием системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.8). Для этого требуется задать два начальных условия: $R(\rho^L, 0)$ и $V(\rho^L, 0)$. Для определения $R(\rho^L, 0)$ следует сначала задать точку наблюдения $x = x(\rho^L, 0)$, совпадающую с начальной точкой траектории частицы с ρ^L . В точке наблюдения имеем равенство

$$x = \rho^L + R(\rho^L, 0) \equiv \rho^L + E^0(x),$$

из которого следует $\rho^L = x - E^0(x)$ и $R(\rho^L, 0) = E^0(x)$. Начальное условие для скорости частицы с лагранжевой координатой ρ^L определяется аналогично: $V(\rho^L, 0) = V^0(x)$.

В рассматриваемом случае плоских нерелятивистских колебаний анализ лагранжевой постановки не порождает новой информации для диагностики градиентной катастрофы. Из (2.8) следует гармоничность колебаний для смещения $R(\rho^L, t)$, т.е. если какие-либо траектории частиц не пересеклись в течение первого периода колебаний, то это не произойдет и в дальнейшем, так как частота колебаний всех частиц одинакова. Анализ же первого периода можно провести на основании явной формулы для электронной плотности с построенными выше начальными условиями (см. [8], 36-37), но он приводит к уже полученному ограничению (2.5).

Рассмотренные выше примеры (уравнение Бюргерса, обобщающая его квазиортогональная система, плоские нерелятивистские электронные колебания) в некотором смысле являются учебными (или тренировочными), т.е. достаточно простыми. Более интересной для исследования является ситуация, когда полученное достаточное условие для какой-либо конкретной постановки не выполняется, а градиентная катастрофа решения тем не менее возникает. Другими словами, эйлерова

проверка начальных условий позволяет определить примитивную (базовую) градиентную катастрофу, следующую из „blow-up“-свойства соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Отслеживание более тонких эффектов приводит к необходимости использовать другие (лагранжевы) методы диагностики.

3. Плоские релятивистские электронные колебания. Рассмотрим более сложный пример, связанный с моделированием плоских релятивистских колебаний в холодной плазме. Соответствующая система уравнений в безразмерной форме имеет вид [11]

$$\frac{\partial P}{\partial t} + E + V \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial t} - V + V \frac{\partial E}{\partial x} = 0, \quad V = \frac{P}{\sqrt{1 + P^2}}. \quad (3.1)$$

Здесь V и P — соответственно скорость и импульс электронов, E — функция, описывающая электрическое поле. Для постановки задачи Коши эту систему следует снабдить начальными условиями

$$P(x, 0) = P^0(x), \quad E(x, 0) = E^0(x), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (3.2)$$

Учитывая приближенное представление релятивистской зависимости импульса от скорости

$$P \approx V \left(1 + \frac{V^2}{2} \right), \quad (3.3)$$

получаем, что с точностью до кубически малых по параметру x слагаемых аксиальные решения системы (3.1) совпадают с аксиальными решениями уравнений (2.1). Другими словами, эйлеров этап диагностики градиентной катастрофы в данном случае опять приводит к условию (2.5), поэтому при небольшой интенсивности начального электрического поля и малой начальной скорости движения электронов несложно отсечь формирование быстрой градиентной катастрофы на первом периоде колебаний.

Проанализируем ниже причину новой, „медленно формирующейся“ градиентной катастрофы. Преобразуем систему (3.1) из эйлеровых переменных в лагранжевы:

$$\frac{dP(\rho^L, t)}{dt} = -E(\rho^L, t), \quad \frac{dE(\rho^L, t)}{dt} = V(\rho^L, t), \quad V = \frac{P(\rho^L, t)}{\sqrt{1 + P^2(\rho^L, t)}}, \quad (3.4)$$

где $d/dt = \partial/\partial t + V\partial/\partial x$ — полная производная по времени.

С учетом равенства (2.7) в случае плоских одномерных колебаний, т.е. $R(\rho^L, t) = E(\rho^L, t)$, основная система уравнений в лагранжевых переменных (3.4) принимает вид

$$\frac{dP}{dt} = -R, \quad \frac{dR}{dt} = \frac{P}{\sqrt{1+P^2}} \equiv V. \quad (3.5)$$

Если предположить, что амплитуда колебаний достаточно мала, то уравнения (3.5) становятся слабо – нелинейными и их приближенные решения можно построить, используя методику теории возмущений [2]. Приведем здесь краткий вывод соответствующих аналитических формул.

Для определенности будем иметь в виду в качестве начальных условий (3.2) функции вида

$$P^0(x) = 0, \quad E^0(x) = \left(\frac{a_*}{\rho_*}\right)^2 x \exp\left\{-2\frac{x^2}{\rho_*^2}\right\}. \quad (3.6)$$

Подобное возмущение электрического поля, инициирующее колебания, характерно для прохождения через плазму короткого мощного лазерного импульса, имеющего гауссово распределение интенсивности по пространству (см.[6], [12]). Здесь a_* , ρ_* – параметры импульса.

Учитывая приближенное представление релятивистской зависимости импульса от скорости (3.3) и исключая смещение R из системы (3.5), получим следующее уравнение для скорости V :

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 1\right)V + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}V^3 = 0. \quad (3.7)$$

Добавим к нему начальные условия из (3.6)

$$V(\rho^L, 0) = 0, \quad \frac{dV}{dt}(\rho^L, 0) = A(\rho^L). \quad (3.8)$$

Будем считать амплитуду колебаний $A(\rho^L)$ малой, тогда представляет интерес приближенное (асимптотическое) решение (3.7),(3.8), равномерно ограниченное по переменной t и отличающееся от точного на величину третьего порядка малости, т.е. $O(A^3(\rho^L))$. В этом случае можно положить

$$A(\rho^L) \approx -E_0(x) = -\left(\frac{a_*}{\rho_*}\right)^2 x \exp\left\{-2\frac{x^2}{\rho_*^2}\right\}, \quad (3.9)$$

где ρ^L и x связаны, как и выше, соотношением $\rho^L = x - E^0(x)$.

Прямое разложение решения (3.7), (3.8) по степеням малого параметра

$$V(t) = \varepsilon V_1(t) + \varepsilon^2 V_2(t) + \varepsilon^3 V_3(t) + \dots, \quad \varepsilon = A(\rho^L),$$

как обычно, содержит резонансные слагаемые вида $t \sin t$:

$$V(t) = \varepsilon \sin t + \varepsilon^3 \left(-\frac{27}{64} \sin t + \frac{9}{64} \sin 3t - \frac{3}{16} t \sin t \right) + o(\varepsilon^3),$$

следовательно, неприменимо на длительных интервалах времени.

Используя стандартную методику [2], несложно получить поправку к основной частоте колебаний, зависящую от амплитуды. В результате искомое ограниченное решение имеет вид (см. [11])

$$V(t) = \varepsilon \sin \omega t + \varepsilon^3 \left[-\frac{27}{64} \sin \omega t + \frac{9}{64} \sin 3\omega t \right] + o(\varepsilon^3), \quad \omega = 1 - \frac{3\varepsilon^2}{16}.$$

Возвращаясь к постановке (3.7),(3.8), получаем зависимость частоты колебаний от пространственного распределения начальной амплитуды $A(\rho^L)$

$$V(\rho^L, t) = A(\rho^L) \sin \left(1 - \frac{3A^2(\rho^L)}{16} \right) t + O(A^3(\rho^L)).$$

При этом слагаемые третьего порядка малости уже не являются растущими во времени в отличие от прямого разложения.

Применим полученный результат к соотношениям (3.5). В частности, получим, что траектория частицы с точностью до членов третьего порядка малости имеет вид

$$x = \rho^L - A(\rho^L) \cos \left(1 - \frac{3A^2(\rho^L)}{16} \right) t, \quad (3.10)$$

где ρ^L — лагранжева координата частицы в равновесном положении, не приводящем к возникновению электрического поля. Так как начальная амплитуда колебаний $A(\rho^L)$ не является постоянной величиной, то траектории каких-то соседних частиц рано или поздно обязаны пересечься вследствие разницы в частоте колебаний.

Приведенный пример иллюстрирует лагранжев этап предсказания градиентной катастрофы. В отличие от эйлерова этапа здесь анализируются, в первую очередь, уравнения, а не начальные условия. Для начальных условий уже используется предположение, что они не порождают искомый эффект на первом периоде колебаний.

Опишем результаты численного эксперимента, демонстрирующего формирование „медленной“ градиентной катастрофы. Положим в (3.6) для удовлетворения условию (2.4) следующие значения параметров: $a_* = 2.07$, $\rho_* = 3.0$.

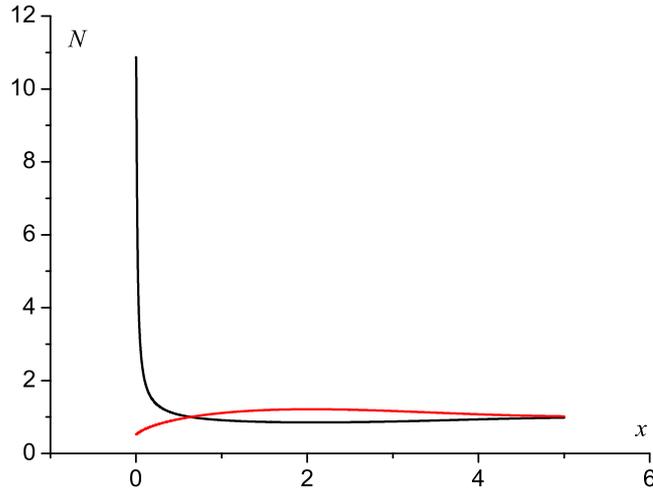


Рис. 1. Пространственные распределения плотности электронов, меняющиеся через каждую половину периода при регулярных колебаниях: максимум в начале координат (черный цвет), минимум в начале координат (красный цвет).

Теперь электронные колебания будут продолжаться более одного периода и представляет определенный интерес проследить за их моделированием с помощью численных алгоритмов [11]. Важным и удобным объектом наблюдения является функция электронной плотности

$$N(x, t) = 1 - \frac{\partial E(x, t)}{\partial x}, \quad (3.11)$$

так как при градиентной катастрофе именно она становится сингулярной.

Рассмотрим рисунок 1. На нем красным цветом изображено пространственное распределение электронной плотности N в начальный момент времени. Функция плотности является в данном случае четной относительно начала координат, поэтому приводится только правая половина графика. Избыток положительного заряда в начале координат приводит к движению электронов в направлении центра области,

что через половину периода колебаний порождает другое распределение функции плотности, также изображенное на рис. 1 (черным цветом). Заметим, что концентрация электронов в центре области может многократно превосходить равновесное (фоновое) значение, равное единице. Зафиксированные параметры приводят к колебаниям небольшой интенсивности, когда амплитуда колебаний всего примерно в 10 раз превышает фоновое значение. Если бы нелинейные плазменные колебания сохраняли во времени свою пространственную форму, то представленные на рис.1 изображения плотности электронов регулярно меняли бы друг друга через каждую половину периода, порождая в центре области строго периодическую последовательность экстремумов с неизменными амплитудами.

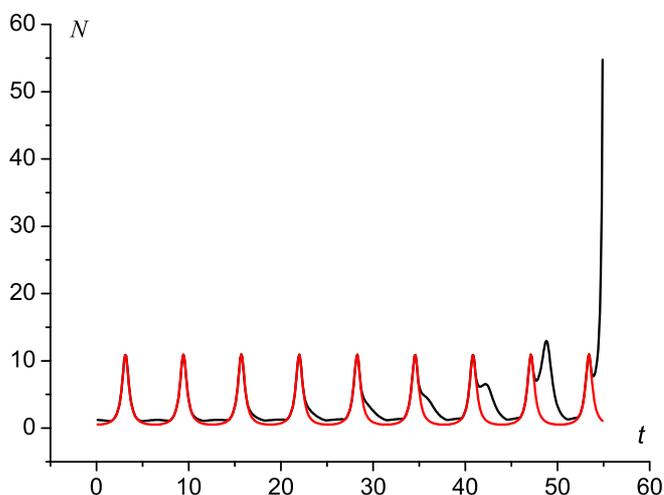


Рис. 2. Динамика плотности электронов: максимум по области (черный цвет) и в начале координат (красный цвет).

Однако в процессе колебаний наблюдаются две тенденции. Первая из них заключается в том, что внеосевые колебания несколько опережают по фазе колебания на оси симметрии (при $x = 0$) и от периода к периоду этот фазовый сдвиг увеличивается. Вторая тенденция более наглядна: с течением времени происходит постепенное формирование абсолютного максимума плотности, расположенного вне оси и сравнимого по величине с осевыми. Хорошей иллюстрацией этим утверждениям является рис. 2. На нем изображено для электронной плотности красным цветом

изменение во времени в начале координат, а черным цветом — динамика максимального по области значения. Сначала колебания носят регулярный характер, т.е. глобальные по области максимумы и минимумы плотности сменяют друг друга через половину периода и располагаются в начале координат. После седьмого регулярного (центрального) максимума в $t \approx 42.2$ возникает новая структура — внеосевой максимум электронной плотности. При этом регулярные колебания продолжают наблюдаться в окрестности начала координат. Внеосевой максимум, в свою очередь, в момент времени $t \approx 48.8$ возрастает по величине примерно в два раза и на следующем периоде — в $t \approx 55.1$ — на его месте возникает сингулярность электронной плотности.

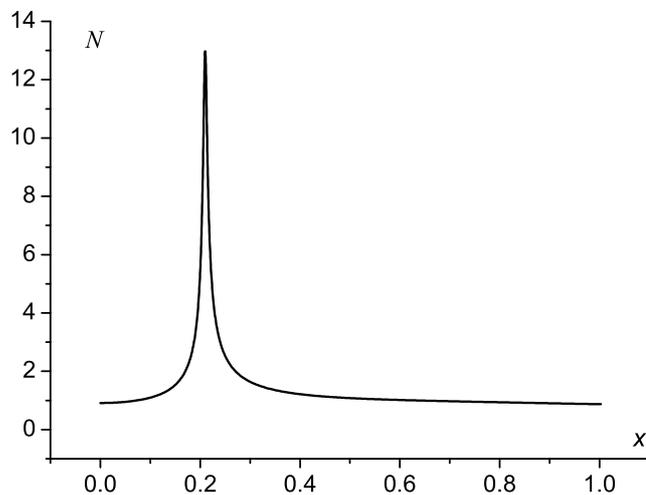


Рис. 3. Пространственное распределение плотности электронов в момент образования второго внеосевого максимума.

Для большей наглядности внеосевого максимума электронной плотности приведены рисунки 3 и 4. На рис. 3 изображено пространственное распределение плотности в момент $t \approx 48.8$, когда он уже полностью сформировался и стал по абсолютной величине сопоставимым с регулярным (осевым) максимумом. Напомним, что функция плотности является в данном случае четной относительно начала координат, поэтому приводится только правая половина графика. График плотности на рис. 3 является следствием распределений скорости V и электрического поля E , изображенных на рис. 4. В свою очередь, функции скорости и

электрического поля в данном случае являются нечетными относительно начала координат, поэтому приводятся только правые половины их графиков. Отметим, что в окрестности максимума плотности функция скорости стремится к скачку производной, а функция электрического поля принимает ступенчатый характер. Именно такие качественные характеристики V и E обеспечивают опрокидывание колебаний в момент $t \approx 55.1$. Важно отметить, что опрокидывание носит характер градиентной катастрофы, т.е. сами функции V и E при этом остаются ограниченными.

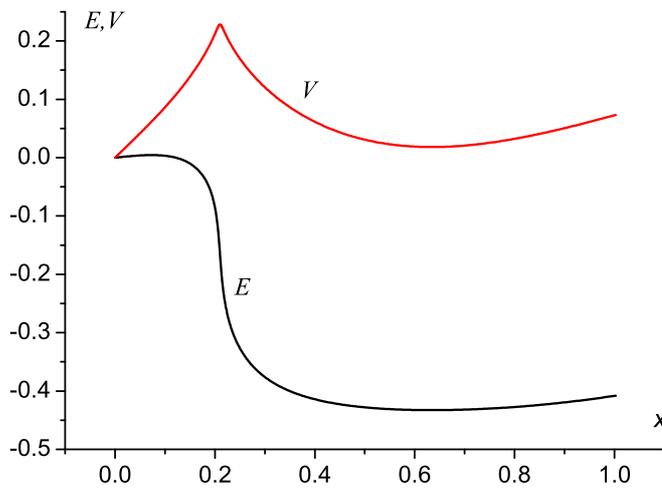


Рис. 4. Пространственное распределение скорости и электрического поля в момент образования второго внеосевого максимума.

Рассмотренный выше пример диагностики имеет ярко выраженную комбинированную структуру: лагранжев этап анализа уравнений органично дополняет эйлеров этап анализа градиентов начальных условий.

4. Цилиндрические нерелятивистские электронные колебания. Рассмотрим ниже пример, когда при возникновении градиентной катастрофы лагранжев этап диагностики более информативен по сравнению с эйлеровым. Соответствующая система уравнений в безразмерной форме, описывающих цилиндрические одномерные нерелятивистские колебания электронов в холодной плазме имеет вид [12]

$$\frac{\partial V}{\partial t} + E + V \frac{\partial V}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial t} - V \left[1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E) \right] = 0. \quad (4.1)$$

Здесь V — скорость электронов, E — функция, описывающая электрическое поле.

Для постановки задачи Коши эту систему следует снабдить начальными условиями

$$V(\rho, 0) = V^0(\rho), \quad E(\rho, 0) = E^0(\rho), \quad 0 \leq \rho < +\infty. \quad (4.2)$$

Рассмотрим, как и ранее, на эйлеровом этапе диагностики свойства аксиальных решений [21]. Напомним, что под аксиальным решением уравнений (4.1) понимается вещественное решение вида

$$V(\rho, t) = W(t)\rho, \quad E(\rho, t) = D(t)\rho.$$

Несложно убедиться, что множители, зависящие от времени, в данном случае удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$W' + D + W^2 = 0, \quad D' - W + 2WD = 0. \quad (4.3)$$

Дополним полученные уравнения произвольными вещественными начальными условиями

$$W(0) = \beta, \quad D(0) = \alpha \quad (4.3)$$

и выясним условия существования и единственности решения задачи Коши (4.1), (4.2). Имеет место [21]

ЛЕММА 2. *Задача Коши (4.3), (4.4) эквивалентна следующей дифференциально – алгебраической задаче:*

$$\begin{aligned} W' + (\alpha + \beta^2)x + (\alpha - 1/2)x \ln x &= 0, \\ 2W^2 + 1 - (1 + 2\beta^2)x - 2(\alpha - 1/2)x \ln x &= 0, \\ W(0) = \beta, \quad x(0) &= 1. \end{aligned}$$

Это утверждение позволяет начальные условия (4.2) включить в определение многообразия, на котором рассматривается новое дифференциальное уравнение. Далее устанавливается [21]

ТЕОРЕМА 2. *Необходимым и достаточным условием существования и единственности периодического гладкого решения задачи Коши (4.3), (4.4) является выполнение неравенства*

$$\alpha < 1/2. \quad (4.5)$$

Из теоремы 2 следует, что достаточным условием возникновения градиентной катастрофы для задачи (4.1), (4.2) будет выполнение хотя бы для одного значения ρ для начальной функции $E^0(\rho)$ неравенства

$$\frac{\partial E^0(\rho)}{\partial \rho} \geq \frac{1}{2}. \quad (4.6)$$

На этом эйлеров этап диагностики закончен; далее предполагается, что выполнено противоположное неравенство (4.5), т.е. пора переходить к лагранжеву этапу.

Преобразуем уравнения в эйлеровых переменных (4.1) в уравнения относительно лагранжевых переменных:

$$\frac{dV(\rho^L, t)}{dt} = -E(\rho^L, t), \quad \frac{dE(\rho^L, t)}{dt} + \frac{V(\rho^L, t) E(\rho^L, t)}{\rho} = V(\rho^L, t), \quad (4.7)$$

где $d/dt = \partial/\partial t + V\partial/\partial\rho$ — полная производная по времени.

При этом функция $R(\rho^L, t)$, определяющая смещение частицы с лагранжевой координатой ρ^L и траекторией $\rho(\rho^L, t)$

$$\rho = \rho^L + R(\rho^L, t), \quad (4.8)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{dR(\rho^L, t)}{dt} = V(\rho^L, t). \quad (4.9)$$

В случае цилиндрических колебаний простая связь между смещением и электрическим полем (2.7) уже не имеет места, поэтому требуются дополнительные выкладки. Выражая скорость V через смещение R по формуле (4.9), запишем второе уравнение (4.7) в виде

$$(\rho^L + R) \frac{dE}{dt} + E \frac{dR}{dt} = (\rho^L + R) \frac{dR}{dt}. \quad (4.10)$$

Уравнение (4.10) имеет первый интеграл

$$(\rho^L + R)E = \frac{1}{2}(\rho^L + R)^2 + C,$$

где постоянная C определяется из условия равенства нулю электрического поля при отсутствии смещения частиц. Тогда отсюда имеем выражение для электрического поля

$$E(\rho^L, t) = \frac{1}{2} \frac{(\rho^L + R(\rho^L, t))^2 - (\rho^L)^2}{\rho^L + R(\rho^L, t)}.$$

Используя полученную формулу, уравнения (4.7),(4.9) можно переписать в более удобном виде

$$\frac{dR(\rho^L, t)}{dt} = V(\rho^L, t), \quad \frac{dV(\rho^L, t)}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{(\rho^L + R(\rho^L, t))^2 - (\rho^L)^2}{\rho^L + R(\rho^L, t)}. \quad (4.10)$$

Из (4.10) следует полезное уравнение относительно $R(\rho^L, t)$:

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{1}{2} \frac{(\rho^L + R)^2 - (\rho^L)^2}{\rho^L + R}, \quad (4.11)$$

в котором лагранжева координата ρ^L , характеризующая частицу, фигурирует в качестве параметра. Это уравнение не является новым; оно было из качественных соображений получено в работе [9], где также использовалось для анализа разрушений электронных колебаний.

Используя стандартную методику [2], для решения (4.11) несложно получить поправку к основной частоте колебаний, зависящую от амплитуды

$$\omega = 1 + \frac{R_0^2(\rho^L)}{12(\rho^L)^2}, \quad R_0(\rho^L) = R(\rho^L, 0).$$

В результате искомое ограниченное решение (4.11) имеет вид (см. [12])

$$R(\rho^L, t) = R_0(\rho^L) \cos \omega t + O(R_0^3(\rho^L)). \quad (4.11)$$

При этом слагаемые третьего порядка малости не являются растущими во времени, как в случае плоских релятивистских колебаний.

Зависимость частоты от начальной амплитуды в формуле (4.11) носит более сложный характер по сравнению с формулой (3.10). В частности, из нее следует, что при линейной зависимости начальной амплитуды от значения лагранжевой координаты ρ^L пересечение траекторий начальных частиц может и не произойти. С другой стороны, если в качестве начальных условий (4.2) для системы (4.1) взять аналог (3.6):

$$V^0(\rho) = 0, \quad E^0(\rho) = \left(\frac{a_*}{\rho_*}\right)^2 \rho \exp\left\{-2\frac{\rho^2}{\rho_*^2}\right\},$$

то численные эксперименты из работы [21] убедительно демонстрируют возникновение „медленной“ градиентной катастрофы (см. рисунки 5 и 6).

Если, аналогично случаям плоских колебаний, выбрать параметры начальных условий, не приводящих к градиентной катастрофе на первом периоде колебаний, то каждый период будет характеризоваться максимумом функции электронной плотности, возникающим строго на оси

симметрии и не меняющим своей величины. На рисунке 5 указанное распределение плотности изображено черным цветом и соответствует значениям $a_* = 0.365$, $\rho_* = 0.6$.

По истечении нескольких периодов колебаний (в данном случае — шести) на некотором расстоянии от оси формируется дополнительный внеосевой максимум функции плотности, являющийся предвестником пересечения траекторий. На рисунке 5 распределение электронной плотности, имеющее первый внеосевой максимум, изображено красным цветом.

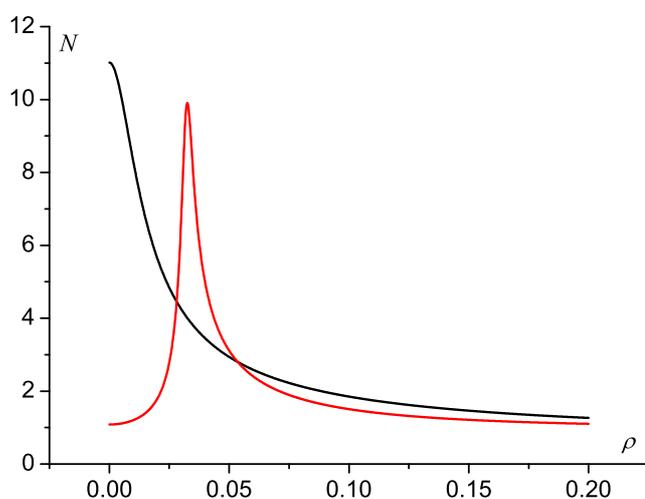


Рис. 5. Пространственное распределение электронной плотности: регулярный максимум на оси симметрии (черный цвет), первый внеосевой максимум (красный цвет).

Спустя некоторое время указанное распределение исчезает, но примерно через период появляется вновь с большим максимальным значением, превышающем регулярный (осевой) максимум почти в два раза. В отличие от максимума плотности, расположенного на оси, внеосевой максимум плотности после своего появления быстро нарастает от периода к периоду. Таким образом, на фоне регулярных колебаний с минимумом и максимумом плотности, расположенными строго на оси, еще через период на месте внеосевого максимума возникает градиентная катастрофа решения. Такой график (с бесконечным значением плотности) построить проблематично, поэтому на рисунке 6 приведены пространственные распределения скорости и электрического поля, соответствующие

ющие моменту опрокидывания. Здесь ступенчатая функция электрического поля и излом производной скорости наглядно иллюстрируют ситуацию возникновения сингулярности электронной плотности. Напомним, что в данном случае аксиально симметричных колебаний справедлива формула

$$N = 1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E).$$

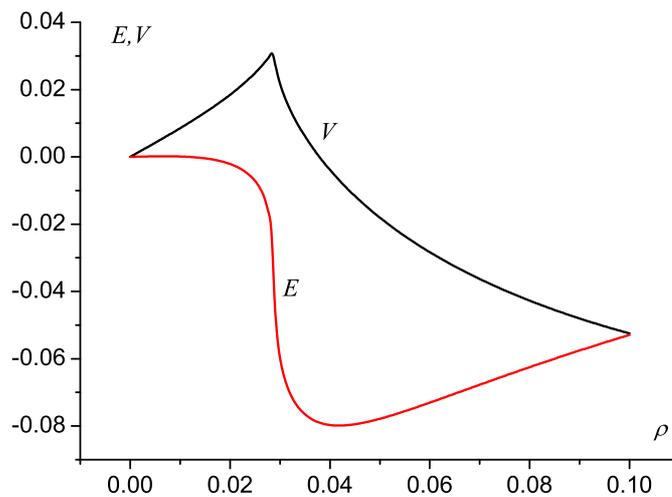


Рис. 6. Пространственное распределение скорости и электрического поля в момент градиентной катастрофы.

Заключение. Для диагностики возникновения градиентной катастрофы в уравнениях гиперболического типа, записанных относительно инвариантов, предлагается двухэтапный (комбинированный) подход.

Первый этап, который удобно называть эйлеровым, предназначен, в первую очередь, для **анализа начальных данных** и заключается в исследовании „blow-up“-свойства у вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Такой подход в диагностике градиентной катастрофы гиперболических систем является традиционным, хотя технические аспекты могут существенно различаться. В статье демонстрируется применение первого этапа как для модельных постановок (уравнение Бюргера, квази-ортогональная система), так и для задач, имеющих содержательный физический смысл.

Второй этап, существенно дополняющий первый, является менее тра-

диционным. Его удобно называть лагранжевым. На этом этапе, в первую очередь, подвергаются **анализу уравнения**, записанные относительно лагранжевых переменных. Здесь, используя методику возмущений для построения равномерно пригодных на длительных интервалах времени решений, представляется возможным выяснить зависимость частоты колебаний от амплитуды, порождаемой начальными условиями. Это порождает предсказание возможного пересечения траекторий отдельных частиц, что также означает возникновение градиентной катастрофы. В статье применяются два этапа диагностики для гиперболических систем, имеющих более сложную структуру решений: плоские нерелятивистские и релятивистские электронные колебания, а также аксиально симметричные нерелятивистские электронные колебания в холодной плазме.

Предлагаемый подход, по существу, базируется на эквивалентной интерпретации опрокидывания колебаний: в лагранжевых переменных — пересечение траекторий частиц, в эйлеровых переменных — сингулярность функции электронной плотности. Результаты работы могут быть обобщены на более сложные постановки, включая влияние динамики ионов на колебательные процессы, а также случаи двух и более пространственных измерений [5],[7].

Список литературы

- [1] Birdsall C.K. and Langdon A.B. *Plasma physics via computer simulation*. McGraw-Hill Inc., New York, 1985.
- [2] Bogolyubov N.N. and Yu.A. Mitropolsky, *Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations*. Gordon and Breach/Hindustan Publ., New York/Delhi, 1961.
- [3] Чижонков Е.В. Численное моделирование аксиальных решений некоторых нелинейных задач. // Вычисл. методы и программ. **11** (2010), No. 2. 57-69.
- [4] Chizhonkov E.V. To the question of large-amplitude electron oscillations in a plasma slab // Comput. Math., Math. Phys. **51** (2011), No. 3, 423-434.
- [5] Chizhonkov E.V., Frolov A.A. Numerical simulation of the breaking effect in nonlinear axially-symmetric plasma oscillations. // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modeling. **26** (2011), No. 4. 379-396.

- [6] Chizhonkov E.V., Frolov A.A., Gorbunov L.M. Modelling of relativistic cylindrical oscillations in plasma. // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling, **23** (2008), No. 5. 455-467.
- [7] Chizhonkov E.V., Frolov A.A., Milyutin S.V. On overturn of two-dimensional nonlinear plasma oscillations. // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modeling. **30** (2015), No. 4. 213-226.
- [8] Davidson R.S. *Methods in nonlinear plasma theory*. 2nd ed. Academic Press, New York, 1972.
- [9] Dawson J.M. Nonlinear electron oscillations in a cold plasma. // Phys. Review. **113** (1959), No. 2. 383-387.
- [10] Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П. *Математическое моделирование плазмы*. Наука, Москва, 1982.
- [11] Фролов А.А., Чижонков Е.В. О релятивистском опрокидывании электронных колебаний в плазменном слое. // Вычисл. методы и программ. **15** (2014). 537-548.
- [12] Горбунов Л.М., Фролов А.А., Чижонков Е.В. О моделировании нерелятивистских цилиндрических колебаний в плазме. // Вычисл. методы и программ. **9** (2008), No. 1. 58-65.
- [13] Gorbunov L.M., Frolov A.A., Chizhonkov E.V., Andreev N.E. Breaking of nonlinear cylindrical plasma oscillations // Plasma Physics Reports, **36** (2010), No. 4. 345-356
- [14] Goriely A., Hyde C. Necessary and sufficient conditions for finite time singularities in ordinary differential equations. // Journal of Differential Equations. **161** (2000). 422-448.
- [15] Hockney R.W. and Eastwood J.W. *Computer simulation using particles*. McGraw-Hill Inc., New York, 1981.
- [16] Kamke E. *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, I, Gewöhnliche Differentialgleichungen*, B. G. Teubner, Leipzig, 1977.
- [17] Kosinski W. Gradient catastrophe in the solution of nonconservative hyperbolic systems. // Journal of mathematical analysis and applications. **61** (1977). 672-688.

- [18] Kulikovskii A.G., Pogorelov N.V. and Semenov A.Yu. *Mathematical aspects of numerical solution of hyperbolic systems*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2001.
- [19] Мышкис А.Д., Филимонов А.М. Непрерывные решения квазилинейных гиперболических систем с двумя независимыми переменными. // Дифференциальные уравнения. **XVII** (1981), No. 3. 488-499.
- [20] Похожаев С.И. Об априорных оценках и градиентных катастрофах гладких решений гиперболических систем законов сохранения. // Труды математического института им. В.А.Стеклова. **243** (2003). 257-288.
- [21] Попов А.В., Чижонков Е.В. Об одной разностной схеме для расчета плазменных аксиально-симметричных колебаний. // Вычисл. методы и программ. **13** (2012), No. 1. 5-17.
- [22] Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике*. Наука, Москва, 1968.
- [23] Saxton R., Vinod V. Singularity formation in systems of non-strictly hyperbolic equations. // Electronic Journal of Differential Equations. **1995** (1995), No. 09. 1-15.
- [24] Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. *Элементы математической физики*. Наука, Москва, 1973.