

**СПЕЦКУРС**

1/2 года

кафедры вычислительной математики  
механико-математического факультета МГУ

**МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ  
НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ  
МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**

лектор - доцент Попов Анатолий Вадимович

**2025 г.**

ТЕМА 9.

**Исследование точности разностных схем  
для задач с негладкими данными**

рабочий конспект

© Механико-математический факультет МГУ, 2025 г.

© А.В.Попов, 2025 г.

При решении дифференциальных уравнений с негладкими данными (начальные и краевые условия, коэффициенты) часто не удается получить оценок сходимости на основании теоремы Филлипова о связи между аппроксимацией, устойчивостью и сходимостью. В то же время такую сходимость можно установить при помощи следующих соображений.

Пусть  $u$  — решение рассматриваемой задачи

$$Lu = f. \quad (1)$$

Приближим (1) некоторой задачей с гладкими данными

$$L^\Delta u^\Delta = f^\Delta.$$

Пусть

$$L_h v = f_h \quad (2)$$

и

$$L_h^\Delta v^\Delta = f_h^\Delta$$

— соответствующие сеточные задачи.

Производя оценку при гладких данных, получаем оценку погрешности

$$\|u_h^\Delta - v^\Delta\| \leq \alpha(\Delta, h).$$

Оценки близости

$$\|u^\Delta - u\| \leq \beta(\Delta) \quad \text{и} \quad \|v^\Delta - v\| \leq \gamma(\Delta, h)$$

находим, исследуя корректность задач (1) и (2) относительно возмущения исходных данных.

Далее воспользуемся оценкой

$$\begin{aligned} \|v - u\| &\leq \|v^\Delta - v\| + \|u^\Delta - v^\Delta\| + \|u^\Delta - u\| \leq \\ &\leq \gamma(\Delta, h) + \alpha(\Delta, h) + \beta(\Delta). \end{aligned} \quad (3)$$

Минимизируя правую часть по  $\Delta$ , получаем

$$\|v - u\| \leq \omega(h) = \inf_{\Delta} (\gamma(\Delta, h) + \alpha(\Delta, h) + \beta(\Delta)).$$

Заметим, что, как правило,  $\gamma(\Delta, h)$  не зависит от  $h$ .

## СПОСОБ СГЛАЖИВАНИЯ

Опишем способ сглаживания негладких функций. Пусть  $K(y)$  — финитная функция, удовлетворяющая условиям:

$$K(y) = 0 \quad \text{при} \quad |y| \geq 1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(y) dy = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(y) y^l dy = 0 \quad \text{при} \quad 0 < l < n.$$

Определим оператор  $P_x^\Delta$  равенством

$$P_x^\Delta g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K\left(\frac{x-y}{\Delta}\right) g(y) dy. \quad (4)$$

Пусть  $g(x) \in C_{m+\lambda}(A)$ , т.е.

$$|g^{(m)}(x_2) - g^{(m)}(x_1)| \leq A |x_2 - x_1|^\lambda.$$

Тогда верны оценки

$$\begin{aligned} \|P_x^\Delta g - g\|_C &\leq C(m+\lambda)A\Delta^{m+\lambda}, \quad \text{если} \quad m < n, \\ \| (P_x^\Delta g)^l \|_C &\leq C(l, m+\lambda)A\Delta^{-\max(l-(m+\lambda), 0)}. \end{aligned} \quad (5)$$

## ПРИМЕР ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу Коши для уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u(0, x) = u_0(x). \quad (6)$$

Скорость переноса, задаваемая известным коэффициентом  $a(t, x)$ , ограничена по модулю величиной  $A_0$ . Будем считать, что функция  $a(t, x)$  дифференцируема по  $x$  и удовлетворяет условиям Гельдера по  $t$ :

$$\left| \frac{\partial a}{\partial x}(t, x) \right| \leq A_1, \quad |a(t_2, x) - a(t_1, x)| \leq A_2 |t_2 - t_1|^\mu.$$

Будем рассматривать случай  $a(t, x) \geq 0$ .

Относительно функции  $u_0(x)$  будем предполагать, что она непрерывна по Гельдеру

$$|u_0(x_2) - u_0(x_1)| \leq A |x_2 - x_1|^\lambda.$$

При указанных условиях решение может не иметь даже первых ограниченных производных, поэтому нельзя доказать оценку погрешности, основываясь на теореме Филлипова о связи между аппроксимацией, устойчивостью и сходимостью. Для получения оценки погрешности воспользуемся описанным выше приемом.

## РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

Для численного решения задачи (6) рассмотрим простейшую разностную схему

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + a_m^n \frac{v_m^n - v_{m-1}^n}{h} = 0, \quad v_m^0 = u_0(mh), \quad (7)$$

где  $a_m^n = a(n\tau, mh)$ . Предполагается, что  $\tau/h = \text{const}$  при  $\tau, h \rightarrow 0$  и выполнено условие устойчивости  $A_0\tau/h \leq 1$ .

Зафиксируем некоторое  $T$  и положим

$$\begin{aligned} \|f\|_C &= \sup_{0 \leq t \leq T, -\infty < x < \infty} |f(t, x)|, & \|f\|_{C_h} &= \sup_{0 \leq n\tau \leq T, -\infty < x < \infty} |f(n\tau, mh)|, \\ \|f\|_{C_h}^n &= \sup_{-\infty < m < \infty} |f(n\tau, mh)|, & \|f\|_C^0 &= \sup_{-\infty < x < \infty} |f(x)|. \end{aligned}$$

Погрешность аппроксимации рассматриваемой схемы оценивается сверху через

$$\frac{\tau}{2} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\|_C + \frac{A_0 h}{2} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|_C.$$

При выполненном условии устойчивости рассматриваемой разностной схемы по теореме Филиппова имеем оценку погрешности

$$\|u - v\|_{C_h} \leq C h \left( \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\|_C + \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|_C \right). \quad (8)$$

Проведем сравнение решения задачи (6) и разностного решения в узлах сетки на отрезке  $0 \leq t \leq T$ .

## ЯВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Пусть  $y_{tx} = y_{tx}(\tau)$  — решение уравнения

$$\frac{dy}{d\tau} = a^\Delta(\tau, y),$$

удовлетворяющее условию  $y_{tx}(t) = x$ .

Положим

$$X(t, x) = y_{tx}(0).$$

Имеем явную формулу для решения задачи (6) с коэффициентом переноса  $a^\Delta$

$$u^\Delta(t, x) = u_0^\Delta(X(t, x)). \quad (9)$$

Выпишем явный вид для производных функции  $u^\Delta$ , считая, что функции  $a^\Delta$  и  $u_0^\Delta$  достаточно гладкие.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^\Delta}{\partial x} &= (u_0^\Delta)'|_{X(t,x)} \frac{\partial X}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 u^\Delta}{\partial x^2} &= (u_0^\Delta)''|_{X(t,x)} \left( \frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 + (u_0^\Delta)'|_{X(t,x)} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial u^\Delta}{\partial t} &= -a^\Delta \frac{\partial u^\Delta}{\partial x} = -a^\Delta (u_0^\Delta)'|_{X(t,x)} \frac{\partial X}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 u^\Delta}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( -a^\Delta \frac{\partial u^\Delta}{\partial x} \right) = -\frac{\partial a^\Delta}{\partial t} \frac{\partial u^\Delta}{\partial x} + a^\Delta \frac{\partial a^\Delta}{\partial x} \frac{\partial u^\Delta}{\partial x} + (a^\Delta)^2 \frac{\partial^2 u^\Delta}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Пользуясь формулой дифференцирования решения по начальным условиям, имеем

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \exp \left[ \int_t^0 \frac{\partial a^\Delta}{\partial x}(\tau, y_{tx}(\tau)) d\tau \right].$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \exp \left[ \int_t^0 \frac{\partial a^\Delta}{\partial x}(\tau, y_{tx}(\tau)) d\tau \right] \int_t^0 \frac{\partial^2 a^\Delta}{\partial x^2}(\tau, y_{tx}(\tau)) \exp \left[ \int_t^\tau \frac{\partial a^\Delta}{\partial x}(\alpha, y_{tx}(\alpha)) d\alpha \right] d\tau.$$

## ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ СГЛАЖЕННОЙ ЗАДАЧИ

Приближим  $a(t, x)$  гладким коэффициентом  $a^\Delta(t, x)$ , а  $u_0(x)$  — гладкой функцией  $u_0^\Delta(x)$ , используя метод сглаживания (4). Возьмем ядро  $K$ , соответствующее  $n = 2$ , и положим

$$a^\Delta = P_x^{\delta_1} P_t^{\delta_2} a, \quad u_0^\Delta = P_x^\delta u_0. \quad (10)$$

Тогда для вторых производных функции  $u^\Delta$  верны оценки

$$\left\| \frac{\partial^2 u^\Delta}{\partial t^2} \right\|_C \leq C \delta^{\lambda-1} (\delta_1^{-1} + \delta_2^{\mu-1}),$$

$$\left\| \frac{\partial^2 u^\Delta}{\partial x^2} \right\|_C \leq C \delta^{\lambda-2}.$$

Откуда для погрешности решения сглаженной задачи получаем оценку

$$\|u^\Delta - v^\Delta\|_{C_h} \leq C h \left( \delta^{\lambda-2} + \delta^{\lambda-1} (\delta_1^{-1} + \delta_2^{\mu-1}) \right). \quad (11)$$

## ОЦЕНКА БЛИЗОСТИ ДВУХ РАЗНОСТНЫХ РЕШЕНИЙ

Пусть  $v^\Delta$  — решение разностной задачи

$$\frac{v_m^{\Delta^{n+1}} - v_m^{\Delta^n}}{\tau} + a_m^{\Delta^n} \frac{v_m^{\Delta^n} - v_{m-1}^{\Delta^n}}{h} = 0, \quad v_m^{\Delta^0} = u_0^\Delta(mh), \quad (12)$$

Вычитая из уравнения (12) уравнение (6), получаем уравнение относительно разности  $r_m^n = v_m^{\Delta^n} - v_m^n$ :

$$\frac{r_m^{n+1} - r_m^n}{\tau} + a_m^n \frac{r_m^n - r_{m-1}^n}{h} + (a_m^{\Delta^n} - a_m^n) \frac{v_m^{\Delta^n} - v_{m-1}^{\Delta^n}}{h} = 0.$$

Отсюда имеем

$$r_m^{n+1} = \left(1 - a_m^n \frac{\tau}{h}\right) r_m^n + a_m^n \frac{\tau}{h} r_{m-1}^n - \tau(a_m^{\Delta^n} - a_m^n) \frac{v_m^{\Delta^n} - v_{m-1}^{\Delta^n}}{h}.$$

Из последнего равенства в силу условия  $A_0\tau/h < 1$  следует оценка

$$\|r\|_{C_h}^{n+1} \leq \|r\|_{C_h}^n + \tau \|a^\Delta - a\|_{C_h} \left\| \frac{v_m^{\Delta^n} - v_{m-1}^{\Delta^n}}{h} \right\|_{C_h}.$$

Откуда с помощью индукции по  $n$  выводим оценку

$$\|r\|_{C_h} \leq \|r\|_{C_h}^0 + \|a^\Delta - a\|_{C_h} \left\| \frac{v_m^{\Delta^n} - v_{m-1}^{\Delta^n}}{h} \right\|_{C_h} T. \quad (13)$$



Продифференцировав разностным образом по  $x$  уравнение (12), получаем

$$\frac{v_{m+1}^{\Delta^{n+1}} - v_m^{\Delta^{n+1}}}{h} = \left(1 - a_{m+1}^{\Delta^n} \frac{\tau}{h}\right) \frac{v_{m+1}^{\Delta^n} - v_m^{\Delta^n}}{h} + a_m^{\Delta^n} \frac{\tau}{h} \frac{v_m^{\Delta^n} - v_{m-1}^{\Delta^n}}{h}.$$

Поскольку

$$\left|1 - a_{m+1}^{\Delta^n} \frac{\tau}{h}\right| + \left|a_m^{\Delta^n} \frac{\tau}{h}\right| \leq 1 + C\tau,$$

то отсюда имеем

$$\left\|\frac{v_{m+1}^{\Delta} - v_m^{\Delta}}{h}\right\|_{C_h}^{n+1} \leq (1 + C\tau) \left\|\frac{v_{m+1}^{\Delta} - v_m^{\Delta}}{h}\right\|_{C_h}^n.$$

Следовательно, справедлива оценка

$$\left\|\frac{v_{m+1}^{\Delta} - v_m^{\Delta}}{h}\right\|_{C_h} \leq e^{CT} \left\|\frac{u_{m+1}^{\Delta} - u_m^{\Delta}}{h}\right\|_{C_h}^0.$$

При используемом способе сглаживания

$$\left\|\frac{u_{m+1}^{\Delta} - u_m^{\Delta}}{h}\right\|_{C_h}^0 \leq \left\|\frac{\partial u_0^{\Delta}}{\partial x}\right\|_C \leq C \delta^{\lambda-1},$$

$$\|a^{\Delta} - a\|_{C_h} \leq C(\delta_1 + \delta_2^{\mu}),$$

$$\|u_0^{\Delta} - u_0\|_{C_h}^0 \leq C \delta^{\lambda}.$$

Поэтому окончательно имеем

$$\|v^{\Delta} - v\|_{C_h} \leq C \left(\delta^{\lambda-1}(\delta_1 + \delta_2^{\mu}) + \delta^{\lambda}\right). \quad (14)$$

## ОЦЕНКА БЛИЗОСТИ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Оценка, аналогичная неравенству (13) может быть получена и в отношении разности  $r^\Delta = u^\Delta - u$

$$\|r^\Delta\|_C \leq \|r^\Delta\|_C^0 + \|a^\Delta - a\|_C \left\| \frac{\partial u^\Delta}{\partial x} \right\|_C T. \quad (15)$$

Докажем ее. Для этого заметим, что при рассматриваемых начальных данных дифференциальная задача (6) не обязательно обладает классическим решением. Решение задачи (6) определяется следующим образом: строится последовательность гладких  $u_0^n(x)$

$$\|u_0^n - u_0\|_C \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Решения (6) с такими начальными данными удовлетворяют условию

$$\|u^n - u^m\|_C \leq \|u^n - u^m\|_C^0,$$

следующему из явного представления решения (9)

$$u(t, x) = u_0(X(t, x)).$$

Поэтому последовательность  $u^n$  является фундаментальной, а ее предел называют решением задачи (6).

Для получения оценки (15) сначала выписывается уравнение

$$\frac{\partial(u^n - u^\Delta)}{\partial t} + a \frac{\partial(u^n - u^\Delta)}{\partial x} + (a^\Delta - a) \frac{\partial u^\Delta}{\partial x} = 0.$$

Отсюда выводим оценку (15) для разности  $u^n - u^\Delta$ , а затем предельным переходом при  $n \rightarrow \infty$  и саму оценку (15).

Аналогично (14) получаем

$$\|u^\Delta - u\|_C \leq C \left( \delta^{\lambda-1} (\delta_1 + \delta_2^\mu) + \delta^\lambda \right). \quad (16)$$

## ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ С НЕГЛАДКИМИ ДАННЫМИ

Применив методику (3) для оценки погрешности решения задачи (6) с негладкими данными по схеме (7) и используя при этом неравенства (11), (14), (16), получим оценку

$$\|u - v\|_{C_h} \leq C \left[ h \left( \delta^{\lambda-2} + \delta^{\lambda-1}(\delta_1^{-1} + \delta_2^{\mu-1}) \right) + \delta^{\lambda-1}(\delta_1 + \delta_2^\mu) + \delta^\lambda \right]. \quad (17)$$

Выберем  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  и  $\delta$  из требования наиболее высокого порядка правой части по  $h$ . Можно показать, что наилучшая по порядку оценка достигается, если

$$\begin{aligned} \delta_1 &\sim C\sqrt{h}, & \delta_2 &\sim Ch, \\ \delta &\sim C\sqrt{h} & \text{при } 1/2 \leq \mu, \\ \delta &\sim Ch^\mu & \text{при } 1/2 > \mu. \end{aligned}$$

Соответственно имеем

$$\|u - v\|_{C_h} \leq \begin{cases} Ch^{\lambda/2} & \text{при } 1/2 \leq \mu, \\ Ch^{\lambda\mu} & \text{при } 1/2 > \mu. \end{cases} \quad (18)$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н.С. Численное решение задач с негладкими данными и интерполяционные теоремы. Труды Математического института АН СССР, 1984, т.166.
2. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
3. Сердюкова С.И. Асимптотические свойства разностных схем максимального нечетного порядка точности. Мат.заметки, 1982, т. 32, N 4, с. 517-522.