

СПЕЦКУРС

1/2 года

кафедры вычислительной математики
механико-математического факультета МГУ

**МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ
МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**

лектор - доцент Попов Анатолий Вадимович

2025 г.

ТЕМА 8.

Многомерные задачи

рабочий конспект

© Механико-математический факультет МГУ, 2025 г.

© А.В.Попов, 2025 г.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В СЛУЧАЕ ДВУХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + f \quad (1)$$

в области $Q = [0, T] \times \Omega$, где $\Omega = [0, X_1] \times [0, X_2]$.

Начальные условия

$$u|_{t=0} = u_0(x_1, x_2). \quad (2)$$

Краевые условия

$$u|_{\partial\Omega} = u_\gamma(t, x_1, x_2). \quad (3)$$

Эта задача является простейшей модельной задачей для многомерных задач. Усложнение реальных задач происходит по следующим направлениям.

1. Коэффициент теплопроводности зависит от точки области Q и различен по разным направлениям.
2. Замена области Ω с прямоугольника на область более сложной формы.
3. Вместо оператора Лапласа в правой части уравнения стоит эллиптический оператор общего типа.
4. Требуется учитывать конвективный перенос (многомерное уравнение Бюргерса).
5. Уравнение становится нелинейным вследствие зависимости коэффициента теплопроводности от неизвестной функции, появления нелинейности в конвективных членах и т.д.
6. Вместо одного уравнения требуется решать систему уравнений, часто составленную из уравнений разного типа.

Возможны другие усложнения задачи (1)-(3).

В численных методах для нестационарных задач математической физики есть два подхода к построению алгоритмов: **явные и неявные схемы**.

Явные методы характеризуются наличием относительно простых алгоритмов поиска приближенного решения по явным формулам, но все они обладают зависимостью временного шага от шага дискретизации по пространственным переменным. Эта зависимость может приводить к тому, что расчет по явным схемам становится невозможным из-за требования колоссального процессорного времени.

Неявные методы, если и имеют ограничения на шаг τ от шага h , то существенно более слабые. Плата за увеличение шага по времени приводит к необходимости решения на каждом временном слое СЛАУ.

НЕЯВНАЯ СХЕМА

$$v_t = \mu(\hat{v}_{x_1\bar{x}_1} + \hat{v}_{x_2\bar{x}_2}) + \hat{f}; \quad (4)$$

$$v_{m_1, m_2}^0 = u_0(m_1 h_1, m_2 h_2), \quad 0 \leq m_k \leq M_k, \quad k = 1, 2; \quad (5)$$

$$v_{m_1, m_2}^n = u_\gamma(n\tau, m_1 h_1, m_2 h_2), \quad \text{при } (m_1 h_1, m_2 h_2) \in \partial\Omega. \quad (6)$$

Решение v разностной схемы (4)-(6) на каждом временном слое ищется в виде решения СЛАУ

$$A\hat{v} = d$$

размерности $M = (M_1 - 1)(M_2 - 1)$.

Опишем структуру матрицы этой системы в случае $h_1 = h_2 = h$. Упорядочим компоненты вектора неизвестных \hat{v} "естественным образом":

$$\hat{v} = (\hat{v}_{11}, \hat{v}_{21}, \dots, \hat{v}_{M_1-1,1}, \hat{v}_{12}, \dots, \hat{v}_{M_1-1, M_2-1})^T.$$

Тогда матрица A имеет блочно-диагональную форму

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{M_1-1, M_2-3} & A_{M_1-2, M_2-2} & A_{M_1-2, M_2-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{M_1-1, M_2-2} & A_{M_1-1, M_2-1} \end{pmatrix},$$

где матрицы A_{ij} размера $(M_1 - 1)$ на $(M_1 - 1)$ имеют вид

$$A_{ii} = E + \frac{\mu\tau}{h^2} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A_{ii\pm 1} = -\frac{\mu\tau}{h^2} E.$$

СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ СЛАУ НЕЯВНЫХ СХЕМ

Матрицы СЛАУ неявных схем являются сильно разреженными, т.е. имеют отличными от нуля элементы всего нескольких диагоналей. Трудность решения систем с такими матрицами состоит в том, что при любой нумерации неизвестных ширина ленты s таких матриц в лучшем случае порядка числа неизвестных по одному из направлений. Обсудим известные подходы к решению СЛАУ с такими матрицами.

1. Самый "лобовой" способ состоит в применении метода Гаусса, вращений или отражений с учетом ширины ленты s . Порядок операций в этом случае $O(Ms^2)$.
2. Один из возможных способов решения систем с блочно-трехдиагональными матрицами является метод матричной прогонки. Например, в случае СЛАУ неявной схемы для двумерного параболического уравнения метод матричной прогонки также требует $O(Ms^2)$ действий.
3. Для прямоугольных областей в случае параболического уравнения применяется прямой метод решения СЛАУ, основанный на использовании дискретного преобразования Фурье. Особенно эффективен этот метод при использовании алгоритма быстрого дискретного преобразования Фурье. В этом случае число требуемых арифметических операций равно $O(M_1 M_2 \log_2 M_1)$, где M_1 и M_2 число точек по пространственным осям.
4. В силу того, что решение на предыдущем временном слое является хорошим приближением для решения на следующем слое, широко применяются итерационные методы решения СЛАУ. Для симметричных матриц лучшим методом является метод сопряженных градиентов (conjugate gradient method — CG), а для произвольных матриц — бисопряженных градиентов (BiCG).

BiCG

Для реализации BiCG требуется умножать вектора как на матрицу A , так и на матрицу A^* , что очень затратно, если матрица сильно разрежена и хранится в виде нескольких векторов. С целью устранения отмеченного недостатка BiCG были созданы его модификации, реализация которых не требует умножения на сопряженную матрицу. Опишем алгоритмы двух таких методов.

Conjugate Gradient Squared Method (CGS)

1. Задается начальное приближение для вектора неизвестных d_0 и произвольный вектор $z^a \neq 0$. Вычисляется невязка $r_0 = b - Ad_0$ и полагается $p_0 = u_0 = r_0$.
2. Далее организовывается итерационный процесс для $j = 0, 1, \dots$, состоящий из последовательности действий:
 - 2.1 $\alpha_j := (r_j, z^a)/(Ap_j, z^a)$,
 - 2.2 $q_j := u_j - \alpha_j Ap_j$,
 - 2.3 $d_{j+1} := d_j + \alpha_j(u_j + q_j)$,
 - 2.4 $r_{j+1} := r_j - \alpha_j A(u_j + q_j)$,
 - 2.5 $\beta_j := (r_{j+1}, z^a)/(r_j, z^a)$,
 - 2.6 $u_{j+1} := r_{j+1} + \beta_j q_j$,
 - 2.7 $p_{j+1} := u_{j+1} + \beta_j(q_j + \beta_j p_j)$.

Biconjugate Stabilized Method (BiCGSTAB)

1. Задается начальное приближение для вектора неизвестных d_0 и произвольный вектор $z^a \neq 0$. Вычисляется невязка $r_0 = b - Ad_0$ и полагается $p_0 = r_0$.
2. Далее организовывается итерационный процесс для $j = 0, 1, \dots$, состоящий из последовательности действий:
 - 2.1 $\alpha_j := (r_j, z^a)/(Ap_j, z^a)$,
 - 2.2 $s_j := r_j - \alpha_j Ap_j$,
 - 2.3 $w_j := (As_j, s_j)/(As_j, As_j)$,
 - 2.4 $d_{j+1} := d_j + \alpha_j p_j + w_j s_j$,
 - 2.5 $r_{j+1} := s_j - w_j As_j$,
 - 2.6 $\beta_j := (r_{j+1}, z^a)/(r_j, z^a) \cdot \alpha_j / w_j$,
 - 2.7 $p_{j+1} := r_{j+1} + \beta_j(p_j - w_j Ap_j)$.

При решении нестационарных задач математической физики начальное приближение d_0 берется равным решению на предыдущем временном слое. Вектор z^a обычно выбирают либо единичным ортом по одной из осей координат, либо вектором, у которого все координаты равны, а евклидова норма равна 1.

Итерационный процесс заканчивается, когда норма невязки уменьшится в заданное число раз.

ЭКОНОМИЧНЫЕ МЕТОДЫ

Разностную схему, аппроксимирующую задачу со временем, называют **экономичной**, если она безусловно устойчива и при переходе от слоя к слою требуется количество арифметических операций, пропорциональное числу узлов на слое. Иногда условие безусловной устойчивости в определении экономичной схемы отсутствует.

Из определения следует, что чисто неявная схема для одномерного уравнения теплопроводности является экономичной, поскольку решение получающихся СЛАУ с трехдиагональными матрицами требует порядка $8N$ арифметических операций, где N - число используемых узлов.

Самая распространенная идея построения экономичных разностных схем состоит в записи разностного оператора в таком виде, что поиск разностного решения на очередном временном слое сводится к последовательному решению одномерных задач.

Способы построения экономичных разностных схем

1. Разностные схемы с расщепляющимися операторами.
2. Метод переменных направлений.
3. Метод дробных шагов (суммарной аппроксимации).

ИДЕЯ ЯНЕНКО Н.Н.

Рассмотрим задачу (1)-(3) в области $Q = [0, T] \times \Omega$, где $\Omega = [0, X_1] \times [0, X_2]$. Для ее приближенного решения Н.Н.Яненко предложил использовать разностную схему

$$(E - \tau\mu\partial_{x_1}\partial_{\bar{x}_1})(E - \tau\mu\partial_{x_2}\partial_{\bar{x}_2})\hat{v} = v + \tau\hat{f}, \quad (7)$$

где

$$(E - \tau\mu\partial_{x_k}\partial_{\bar{x}_k})v \equiv v - \tau\mu v_{x_k\bar{x}_k}.$$

Начальные и граничные условия для уравнения (7) задаются также как в неявной схеме (4)-(6)

$$v_{m_1, m_2}^0 = u_0(m_1 h_1, m_2 h_2); \quad (8)$$

$$v_{m_1, m_2}^n = u_\gamma(n\tau, m_1 h_1, m_2 h_2), \quad \text{при } (m_1 h_1, m_2 h_2) \in \partial\Omega. \quad (9)$$

Для нахождения решения на верхнем временном слое требуется последовательно решить две СЛАУ

$$A_1 \tilde{v} = (E - \tau\mu\partial_{x_1}\partial_{\bar{x}_1})\tilde{v} = v + \tau\hat{f},$$

$$A_2 \hat{v} = (E - \tau\mu\partial_{x_2}\partial_{\bar{x}_2})\hat{v} = \tilde{v}.$$

Операторы, которые позволяют отыскать решение на верхнем слое в результате последовательного решения двух систем (или трех в трехмерном случае), получили название расщепляющихся, а сами схемы с такими операторами стали называть схемами с расщепляющимися операторами.

Важной особенностью матрицы A_1 первой системы является то, что при нумерации неизвестных так, что в первую очередь меняется индекс по переменной x_1 , а затем уже по x_2 , система распадается на $M_2 - 1$ подсистем с трехдиагональными матрицами. Решениями этих подсистем являются значения функции \tilde{v} при различных m_2 .

Для решения второй системы неизвестные следует нумеровать уже наоборот: в первую очередь меняется индекс по переменной x_2 , а затем уже по x_1 . В этом случае система с матрицей A_2 также распадается на $M_1 - 1$ подсистем с трехдиагональными матрицами. Решениями этих подсистем являются значения функции \hat{v} при различных m_1 .

Таким образом, решение \hat{v} можно найти с помощью метода прогонки за число действий пропорциональное числу неизвестных.

ЗАМЕЧАНИЕ. В качестве граничных условий для функции \tilde{v} при записи первой системы следует брать значения

$$\tilde{v}_{0, m_2} = \left(u_\gamma + \tau\mu v_{\gamma x_2 \bar{x}_2} \right)_{0, m_2},$$

$$\tilde{v}_{M_1, m_2} = \left(u_\gamma + \tau\mu v_{\gamma x_2 \bar{x}_2} \right)_{M_1, m_2}.$$

УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ОШИБКИ

Уравнение (7) переписывается после раскрытия скобок в виде

$$\hat{v} - \tau\mu\hat{v}_{x_1\bar{x}_1} - \tau\mu\hat{v}_{x_2\bar{x}_2} + \tau^2\mu^2\hat{v}_{x_2\bar{x}_2x_1\bar{x}_1} = v + \tau\hat{f}.$$

После перегруппировки слагаемых и деления на τ получаем

$$v_t + \tau\mu^2\hat{v}_{x_2\bar{x}_2x_1\bar{x}_1} = \mu\hat{v}_{x_1\bar{x}_1} + \mu\hat{v}_{x_2\bar{x}_2} + \hat{f}. \quad (10)$$

Точное решение u задачи (1)-(3) удовлетворяет уравнению (10) с невязкой φ

$$\varphi = -u_t - \tau\mu^2\hat{u}_{x_2\bar{x}_2x_1\bar{x}_1} + \mu\hat{u}_{x_1\bar{x}_1} + \mu\hat{u}_{x_2\bar{x}_2} + \hat{f}.$$

Если к стандартным требованиям аппроксимации: ограниченности частных производных функции u

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4},$$

добавить ограниченность смешанной частной производной

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2},$$

то величины φ во всех внутренних узлах сетки будут порядка $O(\tau + h^2)$.

Введем функцию $w = v - u$ — разность между разностным решением и проекцией на сетку точного решения задачи (1)-(3). Эта функция является решением следующей задачи

$$w_t + \tau\mu^2\hat{w}_{x_2\bar{x}_2x_1\bar{x}_1} = \mu\hat{w}_{x_1\bar{x}_1} + \mu\hat{w}_{x_2\bar{x}_2} + \varphi. \quad (11)$$

Учитывая, что при отсутствии округлений начальные и граничные условия (8)-(9) выполняются точно, получаем начальные и граничные условия для уравнения (11)

$$w^0 = 0, \quad w|_{\gamma_h} = 0. \quad (12)$$

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ В $L_{2,h}$

Домножая скалярно уравнение для ошибки (11) на \hat{w} , получаем

$$(\hat{w}, w_t) + \tau\mu^2(\hat{w}, \hat{w}_{x_2\bar{x}_2x_1\bar{x}_1}) = \mu(\hat{w}, \hat{w}_{x_1\bar{x}_1}) + \mu(\hat{w}, \hat{w}_{x_2\bar{x}_2}) + (\hat{w}, \varphi). \quad (13)$$

”Суммируя по частям” с учетом граничных условий, как и в одномерном случае приходим к неравенству

$$\|\hat{w}\|^2 + 2\tau^2\mu^2\|\hat{w}_{x_2x_1}\|^2 + 2\tau\mu\|\hat{w}_{x_1}\|^2 + 2\tau\mu\|\hat{w}_{x_2}\|^2 \leq \|w\|^2 + 2\tau(\hat{w}, \varphi). \quad (14)$$

Из последнего неравенства, можно получить две оценки погрешности.

ТЕОРЕМА 1.

$$\max_{n=1,\dots,N} \sqrt{\|w^n\|^2 + \tau\mu \sum_{k=1}^n (\|w_{x_1}^k\|^2 + \|w_{x_2}^k\|^2)} \leq \sqrt{\tau \frac{1}{4\mu} \sum_{n=1}^N (\|\Phi_1\|^2 + \|\Phi_2\|^2)}, \quad (15)$$

где $\Phi_{k\bar{x}_k} = \varphi$.

ТЕОРЕМА 2.

$$\max_{n=1,\dots,N} \sqrt{\|w^n\|^2 + 2\tau\mu \sum_{k=1}^n (\|w_{x_1}^k\|^2 + \|w_{x_2}^k\|^2)} \leq e^T \sqrt{\tau \sum_{n=1}^N \|\varphi\|^2}. \quad (16)$$

Заметим, что оценка из первой теоремы неравномерна по μ , а из второй — по T .

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ В $W_{2,h}^1$

Домножая скалярно уравнение для ошибки (11) на $\hat{w}_{x_1\bar{x}_1} + \hat{w}_{x_2\bar{x}_2}$, получаем

$$\begin{aligned} & (\hat{w}_{x_1\bar{x}_1} + \hat{w}_{x_2\bar{x}_2}, w_t) + \tau\mu^2(\hat{w}_{x_1\bar{x}_1} + \hat{w}_{x_2\bar{x}_2}, \hat{w}_{x_2\bar{x}_2x_1\bar{x}_1}) = \\ & = \mu(\hat{w}_{x_1\bar{x}_1} + \hat{w}_{x_2\bar{x}_2}, \hat{w}_{x_1\bar{x}_1}) + \mu(\hat{w}_{x_1\bar{x}_1} + \hat{w}_{x_2\bar{x}_2}, \hat{w}_{x_2\bar{x}_2}) + (\hat{w}_{x_1\bar{x}_1} + \hat{w}_{x_2\bar{x}_2}, \varphi). \end{aligned} \quad (17)$$

”Суммируя по частям” с учетом граничных условий, как и в одномерном случае приходим к неравенству

$$\begin{aligned} |\hat{w}|_1^2 + 2\tau^2\mu^2(\|\hat{w}_{x_2x_1\bar{x}_1}\|^2 + \|\hat{w}_{x_2x_1\bar{x}_1}\|^2) + 2\tau\mu(\|\hat{w}_{x_1\bar{x}_1}\|^2 + 2\|\hat{w}_{x_1\bar{x}_2}\|^2 + \|\hat{w}_{x_2\bar{x}_2}\|^2) \leq \\ \leq |w|_1^2 + 2\tau(\hat{w}_{x_1\bar{x}_1} + \hat{w}_{x_2\bar{x}_2}, \varphi). \end{aligned} \quad (18)$$

Из последнего неравенства, можно получить две оценки погрешности.

ТЕОРЕМА 1.

$$\max_{n=1,\dots,N} \sqrt{|w^n|_1^2 + \tau\mu \sum_{k=1}^n (\|w_{x_1\bar{x}_1}^k\|^2 + 4\|w_{x_1\bar{x}_2}^k\|^2 + \|w_{x_2\bar{x}_2}^k\|^2)} \leq \sqrt{\tau \frac{2}{\mu} \sum_{n=1}^N \|\varphi\|^2}. \quad (19)$$

ТЕОРЕМА 2.

$$\max_{n=1,\dots,N} \sqrt{|w^n|_1^2 + 2\tau\mu \sum_{k=1}^n (\|w_{x_1\bar{x}_1}^k\|^2 + 2\|w_{x_1\bar{x}_2}^k\|^2 + \|w_{x_2\bar{x}_2}^k\|^2)} \leq e^T \sqrt{\tau \sum_{n=1}^N (\|\varphi_{x_1}\|^2 + \|\varphi_{x_2}\|^2)}. \quad (20)$$

Заметим, что оценка из первой теоремы неравномерна по μ , а из второй — по T .

МЕТОД ПЕРЕМЕННЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

Близким по структуре схемам с расщепляющимся оператором является метод переменных направлений. Опишем его на примере задачи (1)-(3). Суть этого метода заключается в переходе от v к \hat{v} по формулам

$$\frac{v^{n+1/2} - v^n}{2\tau} = \mu v_{x_1 \bar{x}_1}^{n+1/2} + \mu v_{x_2 \bar{x}_2} + f_1,$$

$$\frac{\hat{v} - v^{n+1/2}}{2\tau} = \mu v_{x_1 \bar{x}_1}^{n+1/2} + \mu \hat{v}_{x_2 \bar{x}_2} + f_2,$$

где $f = f_1 + f_2$.

Здесь введен промежуточный вектор неизвестных $v^{n+1/2}$. Первое уравнение решается применением прогонки по оси x_1 , а второе — применением прогонки по оси x_2 .

Важным преимуществом метода переменных направлений перед схемами с расщепляющимися операторами является их применимость к областям с криволинейными границами.

МЕТОД СУММАРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Опишем метод суммарной аппроксимации на примере задачи (1)-(3). Переход от n -го слоя к $n + 1$ -му осуществляется по формулам

$$P_1 v \equiv \frac{v^{n+1/2} - v^n}{2\tau} - \mu v_{x_1 \bar{x}_1}^{n+1/2} - f_1^{n+1/2} = 0, \quad (21)$$

$$P_2 v \equiv \frac{\hat{v} - v^{n+1/2}}{2\tau} - \mu \hat{v}_{x_2 \bar{x}_2} - f_2^{n+1} = 0, \quad (22)$$

где $f = f_1 + f_2$. Таким образом, алгоритм заключается в последовательном решении уравнений (21), (22). При этом вычисленное значение функции является начальным условием для следующего уравнения.

Ясно, что каждое из уравнений (21), (22) не аппроксимирует исходную задачу. Найдем погрешность аппроксимации. Имеем

$$P_1 u = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - f_1 + O(h^2 + \tau),$$

$$P_1 u - \left[\frac{\partial u}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - f \right] = -\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + f_2 + O(h^2 + \tau) \equiv \psi_1.$$

Аналогично,

$$P_2 u = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - f_2 + O(h^2 + \tau),$$

$$P_2 u - \left[\frac{\partial u}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - f \right] = -\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + f_1 + O(h^2 + \tau) \equiv \psi_2.$$

В общем случае $\psi_k = O(1)$, поэтому уравнения (21), (22) аппроксимируют уравнение (1) с порядком $O(1)$. Однако

$$\psi_1 + \psi_2 = O(h^2 + \tau).$$

В этом случае говорят, что схема (21), (22) **аппроксимирует исходную задачу с суммарным смыслом**, т.е. хотя каждое из уравнений (21), (22) не аппроксимирует исходную задачу, сумма погрешностей аппроксимаций этих уравнений равна $O(h^2 + \tau)$.

ТЕОРЕМА Схема (21), (22) устойчива в сеточной норме C_h и при достаточно гладком решении

$$\|v - u\|_{C_h} \leq C_1(h^2 + \tau),$$

где C_1 не зависит от h и τ .

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА СУММАРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Метод суммарной аппроксимации применяют не только в линейных задачах, но и в нелинейных.

В общем случае для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P^1(u) + \dots + P^k(u), \quad (23)$$

где операторы $P^i(u)$, вообще говоря, нелинейные и не обязательно одномерные, схема метода суммарной аппроксимации (дробных шагов) заключается в следующем. Решение на шаге уравнения (23) заменяется последовательным решением на шаге уравнений

$$\frac{1}{k} \frac{\partial u_i}{\partial t} = P^i(u), \quad i = 1, \dots, k.$$

При этом в качестве начального условия на шаге для каждого из уравнений берется значение, вычисленное из предыдущего уравнения.

Метод суммарной аппроксимации применим в областях достаточно произвольной формы.

ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ БЮРГЕРСА В СЛУЧАЕ ДВУХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + f \quad (24)$$

в области $Q = [0, T] \times \Omega$, где $\Omega = [0, X_1] \times [0, X_2]$.

Начальные условия

$$u|_{t=0} = u_0(x_1, x_2). \quad (25)$$

Краевые условия

$$u|_{\partial\Omega} = u_\gamma(t, x_1, x_2). \quad (26)$$

Коэффициенты a_1 и a_2 , задающие скорость конвективного переноса, будем считать известными гладкими функциями от независимых переменных и принимающими нулевые значения на границе области Ω .

Для построения разностной схемы с расщепляющимся оператором перепишем уравнение (24) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(a_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial a_1 u}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{2} \left(a_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial a_2 u}{\partial x_2} \right) - \frac{u}{2} \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \right) = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + f. \quad (27)$$

СХЕМА С РАСЩЕПЛЯЮЩИМСЯ ОПЕРАТОРОМ

Для задачи (24)-(26) рассмотрим разностную схему с расщепляющимся оператором

$$\begin{aligned} \left(E + \frac{\tau}{2} \left(a_1 \partial_{x_1} + \partial_{x_1} a_1 \right) - \tau \mu \partial_{x_1} \partial_{\bar{x}_1} \right) \left(E + \frac{\tau}{2} \left(a_2 \partial_{x_2} + \partial_{x_2} a_2 \right) - \tau \mu \partial_{x_2} \partial_{\bar{x}_2} \right) \hat{v} = \\ = v + \tau v \left(((a_1)_0)_{x_1} + ((a_2)_0)_{x_2} \right) + \tau \hat{f}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$v^0 = u_0, \quad v^n|_{\gamma_h} = 0. \quad (29)$$

Для получения оценки погрешности численного интегрирования уравнение (28) запишем в виде

$$\begin{aligned} v_t + \frac{1}{2} \left(a_1 \hat{v}_0 + (a_1 \hat{v})_0 + a_2 \hat{v}_0 + (a_2 \hat{v})_0 \right) + \\ + \frac{\tau}{4} \left(a_1 \left(a_2 \hat{v}_0 \right)_0 + \left(a_1 a_2 \hat{v}_0 \right)_0 + a_1 \left(a_2 \hat{v} \right)_0 + \left(a_1 (a_2 \hat{v})_0 \right)_0 \right) - \\ - \frac{\tau \mu}{2} \left(a_1 \hat{v}_{x_2 \bar{x}_2 x_1} + (a_1 \hat{v}_{x_2 \bar{x}_2})_0 + (a_2 \hat{v}_0)_{x_1 \bar{x}_1} + (a_2 \hat{v})_0 \right) + \\ + \tau \mu^2 \hat{v}_{x_2 \bar{x}_2 x_1 \bar{x}_1} = \mu \hat{v}_{x_1 \bar{x}_1} + \mu \hat{v}_{x_2 \bar{x}_2} + v \left(((a_1)_0)_{x_1} + ((a_2)_0)_{x_2} \right) + \hat{f}. \end{aligned} \quad (30)$$

Введем функцию ошибки $w = v - u$. Она является решением следующей задачи

$$\begin{aligned} w_t + \frac{1}{2} \left(a_1 \hat{w}_0 + (a_1 \hat{w})_0 + a_2 \hat{w}_0 + (a_2 \hat{w})_0 \right) + \\ + \frac{\tau}{4} \left(a_1 \left(a_2 \hat{w}_0 \right)_0 + \left(a_1 a_2 \hat{w}_0 \right)_0 + a_1 \left(a_2 \hat{w} \right)_0 + \left(a_1 (a_2 \hat{w})_0 \right)_0 \right) - \\ - \frac{\tau \mu}{2} \left(a_1 \hat{w}_{x_2 \bar{x}_2 x_1} + (a_1 \hat{w}_{x_2 \bar{x}_2})_0 + (a_2 \hat{w}_0)_{x_1 \bar{x}_1} + (a_2 \hat{w})_0 \right) + \\ + \tau \mu^2 \hat{w}_{x_2 \bar{x}_2 x_1 \bar{x}_1} = \mu \hat{w}_{x_1 \bar{x}_1} + \mu \hat{w}_{x_2 \bar{x}_2} + w \left(((a_1)_0)_{x_1} + ((a_2)_0)_{x_2} \right) + \varphi. \end{aligned} \quad (31)$$

$$w^0 = 0, \quad w^n|_{\gamma_h} = 0. \quad (32)$$

Выше через φ была обозначена невязка, с которой точное решение дифференциальной задачи u удовлетворяет уравнениям разностной схемы

$$\begin{aligned} \varphi = -u_t - \frac{1}{2} \left(a_1 \hat{u}_0 + (a_1 \hat{u})_0 - a_2 \hat{u}_0 - (a_2 \hat{u})_0 \right) - \\ - \frac{\tau}{4} \left(a_1 \left(a_2 \hat{u}_0 \right)_0 + \left(a_1 a_2 \hat{u}_0 \right)_0 + a_1 \left(a_2 \hat{u} \right)_0 + \left(a_1 (a_2 \hat{u})_0 \right)_0 \right) + \\ + \frac{\tau \mu}{2} \left(a_1 \hat{u}_{x_2 \bar{x}_2 x_1} + (a_1 \hat{u}_{x_2 \bar{x}_2})_0 + (a_2 \hat{u}_0)_{x_1 \bar{x}_1} + (a_2 \hat{u})_0 \right) - \\ - \tau \mu^2 \hat{u}_{x_2 \bar{x}_2 x_1 \bar{x}_1} + \mu \hat{u}_{x_1 \bar{x}_1} + \mu \hat{u}_{x_2 \bar{x}_2} + u \left(((a_1)_0)_{x_1} + ((a_2)_0)_{x_2} \right) + \hat{f}. \end{aligned}$$

Заметим, что при условии достаточной гладкости точного решения дифференциальной задачи u и коэффициентов a_1 и a_2 функция невязки φ имеет значения порядка $\tau + h^2$.

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ В $L_{2,h}$

Для получения оценки в норме $L_{2,h}$ домножим скалярно уравнение (31) на \hat{w}

$$\begin{aligned}
 & (\hat{w}, w_t) + \frac{1}{2}(\hat{w}, a_1 \hat{w}_0 + (a_1 \hat{w})_0 + a_2 \hat{w}_0 + (a_2 \hat{w})_0) + \\
 & + \frac{\tau}{4} \left(\left(\hat{w}, a_1 \left(a_2 \hat{w}_0 \right)_{x_2} \right)_{x_1} + \left(\hat{w}, \left(a_1 a_2 \hat{w}_0 \right)_{x_2} \right)_{x_1} + \left(\hat{w}, a_1 \left(a_2 \hat{w} \right)_{x_2 x_1} \right) + \left(\hat{w}, \left(a_1 \left(a_2 \hat{w} \right)_{x_2} \right)_{x_1} \right) \right) - \\
 & - \frac{\tau \mu}{2} (\hat{w}, a_1 \hat{w}_{x_2 \bar{x}_2 x_1} + (a_1 \hat{w}_{x_2 \bar{x}_2})_0 + (a_2 \hat{w}_0)_{x_1 \bar{x}_1} + (a_2 \hat{w})_0_{x_2 x_1 \bar{x}_1}) = \\
 & = -\tau \mu^2 (\hat{w}, \hat{w}_{x_2 \bar{x}_2 x_1 \bar{x}_1}) + \mu (\hat{w}, \hat{w}_{x_1 \bar{x}_1} + \hat{w}_{x_2 \bar{x}_2}) + (\hat{w}, w(((a_1)_0 + (a_2)_0))) + (\hat{w}, \varphi).
 \end{aligned} \tag{33}$$

Слагаемые из первой строчки тождества (33) оцениваются как и в одномерном случае следующим образом

$$\begin{aligned}
 & (\hat{w}, w_t) + \frac{1}{2}(\hat{w}, a_1 \hat{w}_0 + (a_1 \hat{w})_0 + a_2 \hat{w}_0 + (a_2 \hat{w})_0) \geq \\
 & \geq \frac{1}{2\tau} (\|\hat{w}\|^2 - \|w\|^2).
 \end{aligned} \tag{34}$$

Слагаемые из правой части тождества (33), суммируя по частям, оцениваются сверху выражением

$$\begin{aligned}
 & -\tau \mu^2 (\hat{w}, \hat{w}_{x_2 \bar{x}_2 x_1 \bar{x}_1}) + \mu (\hat{w}, \hat{w}_{x_1 \bar{x}_1} + \hat{w}_{x_2 \bar{x}_2}) + (\hat{w}, w(((a_1)_0 + (a_2)_0))) + (\hat{w}, \varphi) \leq \\
 & \leq -\tau \mu^2 [\hat{w}_{x_2 x_1}]^2 - \mu [\hat{w}_{x_1}]^2 - \mu [\hat{w}_{x_2}]^2 + C_1 \|\hat{w}\|^2 + C_2 \|w\|^2 + \frac{1}{2} \|\varphi\|^2.
 \end{aligned} \tag{35}$$

Для оставшихся слагаемых тождества (33) верны неравенства

$$\begin{aligned}
 & \frac{\tau}{4} \left| \left(\hat{w}, a_1 \left(a_2 \hat{w}_0 \right)_{x_2} \right)_{x_1} + \left(\hat{w}, \left(a_1 a_2 \hat{w}_0 \right)_{x_2} \right)_{x_1} + \left(\hat{w}, a_1 \left(a_2 \hat{w} \right)_{x_2 x_1} \right) + \left(\hat{w}, \left(a_1 \left(a_2 \hat{w} \right)_{x_2} \right)_{x_1} \right) \right| \leq \\
 & \leq \tau C_3 (\|\hat{w}\|_2^1)^2,
 \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\tau \mu}{2} (\hat{w}, a_1 \hat{w}_{x_2 \bar{x}_2 x_1} + (a_1 \hat{w}_{x_2 \bar{x}_2})_0 + (a_2 \hat{w}_0)_{x_1 \bar{x}_1} + (a_2 \hat{w})_0_{x_2 x_1 \bar{x}_1}) \leq \\
 & \leq \tau \frac{C_4}{\varepsilon} (([\hat{w}_{x_1}]^2 + [\hat{w}_{x_2}]^2) + \tau \varepsilon [\hat{w}_{x_2 x_1}]^2).
 \end{aligned} \tag{37}$$

Используя неравенства (34)-(37), из тождества (33) получаем неравенство

$$\begin{aligned}
 & \|\hat{w}\|^2 - \|w\|^2 + 2\tau^2(\mu^2 - \varepsilon)[\hat{w}_{x_2 x_1}]^2 + 2\tau \left(\mu - \tau \left(C_3 + \frac{C_4}{\varepsilon} \right) \right) ([\hat{w}_{x_1}]^2 + [\hat{w}_{x_2}]^2) \leq \\
 & \leq \tau C (\|\hat{w}\|^2 + \|w\|^2) + \tau \|\varphi\|^2.
 \end{aligned} \tag{38}$$

Выбрав $\varepsilon = \mu^2$ и наложив ограничения на шаг

$$\tau \leq \frac{\mu}{2 \left(C_3 + \frac{C_4}{\mu^2} \right)},$$

из неравенства (38) по разностной лемме Гронуолла получаем оценку

$$\max_{n=1, \dots, N} \sqrt{\|w^n\|^2 + \tau \mu \sum_{k=1}^n |w^k|_1^2} \leq e^T \sqrt{\tau \sum_{n=1}^N \|\varphi\|^2}. \tag{39}$$

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ В $W_{2,h}^1$

Для получения оценки в норме $W_{2,h}^1$ домножим скалярно уравнение (31) на $\hat{w}_{x_1\bar{x}_1} + \hat{w}_{x_2\bar{x}_2}$

$$\begin{aligned}
& (\hat{w}_{x_1\bar{x}_1} + \hat{w}_{x_2\bar{x}_2}, w_t) + \frac{1}{2}(\hat{w}_{x_1\bar{x}_1} + \hat{w}_{x_2\bar{x}_2}, a_1 \hat{w}_{x_1}^0 + (a_1 \hat{w})_{x_1}^0 + a_2 \hat{w}_{x_2}^0 + (a_2 \hat{w})_{x_2}^0) + \\
& + \frac{\tau}{4} \left(\left(\hat{w}_{x_1\bar{x}_1} + \hat{w}_{x_2\bar{x}_2}, a_1 \left(a_2 \hat{w}_{x_2}^0 \right)_{x_1}^0 \right) + \left(\hat{w}_{x_1\bar{x}_1} + \hat{w}_{x_2\bar{x}_2}, \left(a_1 a_2 \hat{w}_{x_2}^0 \right)_{x_1}^0 \right) + \right. \\
& + \left(\hat{w}_{x_1\bar{x}_1} + \hat{w}_{x_2\bar{x}_2}, a_1 \left(a_2 \hat{w} \right)_{x_2 x_1}^0 \right) + \left. \left(\hat{w}_{x_1\bar{x}_1} + \hat{w}_{x_2\bar{x}_2}, \left(a_1 \left(a_2 \hat{w} \right)_{x_2}^0 \right)_{x_1}^0 \right) \right) - \\
& - \frac{\tau\mu}{2} (\hat{w}_{x_1\bar{x}_1} + \hat{w}_{x_2\bar{x}_2}, a_1 \hat{w}_{x_2\bar{x}_2 x_1}^0 + (a_1 \hat{w}_{x_2\bar{x}_2})_{x_1}^0 + (a_2 \hat{w}_{x_2}^0)_{x_1\bar{x}_1} + (a_2 \hat{w})_{x_2 x_1\bar{x}_1}^0) = \\
& = -\tau\mu^2 (\hat{w}_{x_1\bar{x}_1} + \hat{w}_{x_2\bar{x}_2}, \hat{w}_{x_2\bar{x}_2 x_1\bar{x}_1}) + \mu (\hat{w}_{x_1\bar{x}_1} + \hat{w}_{x_2\bar{x}_2}, \hat{w}_{x_1\bar{x}_1} + \hat{w}_{x_2\bar{x}_2}) + \\
& + (\hat{w}_{x_1\bar{x}_1} + \hat{w}_{x_2\bar{x}_2}, w(((a_1)_{x_1}^0 + (a_2)_{x_2}^0)) + (\hat{w}_{x_1\bar{x}_1} + \hat{w}_{x_2\bar{x}_2}, \varphi).
\end{aligned} \tag{40}$$

Слагаемые из первой строчки тождества (40) оцениваются как и в одномерном случае следующим образом

$$\begin{aligned}
& (\hat{w}_{x_1\bar{x}_1} + \hat{w}_{x_2\bar{x}_2}, w_t) + \frac{1}{2}(\hat{w}_{x_1\bar{x}_1} + \hat{w}_{x_2\bar{x}_2}, a_1 \hat{w}_{x_1}^0 + (a_1 \hat{w})_{x_1}^0 + a_2 \hat{w}_{x_2}^0 + (a_2 \hat{w})_{x_2}^0) \leq \\
& \leq -\frac{1}{2\tau} (|\hat{w}|_1^2 - |w|_1^2) + C_1(\varepsilon) (\|\hat{w}\|_2^1)^2 + \varepsilon (\|\hat{w}_{x_1\bar{x}_1}\|^2 + \|\hat{w}_{x_2\bar{x}_2}\|^2).
\end{aligned} \tag{41}$$

Слагаемые из правой части тождества (40) после суммирования по частям оцениваются сверху выражением

$$\begin{aligned}
& -\tau\mu^2 (\hat{w}_{x_1\bar{x}_1} + \hat{w}_{x_2\bar{x}_2}, \hat{w}_{x_2\bar{x}_2 x_1\bar{x}_1}) + \mu (\hat{w}_{x_1\bar{x}_1} + \hat{w}_{x_2\bar{x}_2}, \hat{w}_{x_1\bar{x}_1} + \hat{w}_{x_2\bar{x}_2}) + \\
& + (\hat{w}_{x_1\bar{x}_1} + \hat{w}_{x_2\bar{x}_2}, w(((a_1)_{x_1}^0 + (a_2)_{x_2}^0)) + (\hat{w}_{x_1\bar{x}_1} + \hat{w}_{x_2\bar{x}_2}, \varphi) \leq \\
& \leq \tau\mu^2 (\|\hat{w}_{x_2\bar{x}_2 x_1}\|^2 + \|\hat{w}_{x_2 x_1\bar{x}_1}\|^2) + \mu (\|\hat{w}_{x_1\bar{x}_1}\|^2 + \|\hat{w}_{x_2\bar{x}_2}\|^2 + 2\|\hat{w}_{x_1 x_2}\|^2) + \\
& + C_2(\varepsilon) (\|w\|^2 + \|\varphi\|^2) + \varepsilon (\|\hat{w}_{x_1\bar{x}_1}\|^2 + \|\hat{w}_{x_2\bar{x}_2}\|^2).
\end{aligned} \tag{42}$$

Для оставшихся слагаемых тождества (40) верны неравенства

$$\begin{aligned}
& \frac{\tau}{4} \left| \left(\hat{w}_{x_1\bar{x}_1} + \hat{w}_{x_2\bar{x}_2}, a_1 \left(a_2 \hat{w}_{x_2}^0 \right)_{x_1}^0 \right) + \left(\hat{w}_{x_1\bar{x}_1} + \hat{w}_{x_2\bar{x}_2}, \left(a_1 a_2 \hat{w}_{x_2}^0 \right)_{x_1}^0 \right) + \right. \\
& + \left. \left(\hat{w}_{x_1\bar{x}_1} + \hat{w}_{x_2\bar{x}_2}, a_1 \left(a_2 \hat{w} \right)_{x_2 x_1}^0 \right) + \left(\hat{w}_{x_1\bar{x}_1} + \hat{w}_{x_2\bar{x}_2}, \left(a_1 \left(a_2 \hat{w} \right)_{x_2}^0 \right)_{x_1}^0 \right) \right| \leq \\
& C_3 (\|\hat{w}_{x_1\bar{x}_1}\|^2 + \|\hat{w}_{x_2\bar{x}_2}\|^2 + (\|\hat{w}\|_2^1)^2),
\end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\tau\mu}{2} (\hat{w}_{x_1\bar{x}_1} + \hat{w}_{x_2\bar{x}_2}, a_1 \hat{w}_{x_2\bar{x}_2 x_1}^0 + (a_1 \hat{w}_{x_2\bar{x}_2})_{x_1}^0 + (a_2 \hat{w}_{x_2}^0)_{x_1\bar{x}_1} + (a_2 \hat{w})_{x_2 x_1\bar{x}_1}^0) \leq \\
& \leq \tau^2 C_4(\varepsilon) (\|\hat{w}_{x_2\bar{x}_2 x_1}\|^2 + \|\hat{w}_{x_2 x_1\bar{x}_1}\|^2 + \|\hat{w}_{x_2\bar{x}_2}\|^2 + \|\hat{w}_{x_1 x_2}\|^2 + (\|\hat{w}\|_2^1)^2) + \\
& + \varepsilon (\|\hat{w}_{x_1\bar{x}_1}\|^2 + \|\hat{w}_{x_2\bar{x}_2}\|^2).
\end{aligned} \tag{44}$$

Используя неравенства (41)-(44), из тождества (40) получаем неравенство

$$\begin{aligned}
& |\hat{w}|_1^2 - |w|_1^2 + 2\tau(\tau\mu^2 - \tau^2 C_4(\varepsilon)) (\|\hat{w}_{x_2 \bar{x}_2 x_1}\|^2 + \|\hat{w}_{x_2 x_1 \bar{x}_1}\|^2) + \\
& + 2\tau(\mu - 3\varepsilon - \tau(C_3 + \tau C_4(\varepsilon))) (\|\hat{w}_{x_1 \bar{x}_1}\|^2 + \|\hat{w}_{x_2 \bar{x}_2}\|^2 + 2\|\hat{w}_{x_1 x_2}\|^2) \leq \\
& \leq \tau C ((\|\hat{w}\|_2^1)^2 + \|w\|^2 + \|\varphi\|^2).
\end{aligned} \tag{45}$$

Сложив неравенства (38) и (45), выберем ε и ограничение на шаг τ так, что

$$\tau\mu^2 - \tau^2 C_3(\varepsilon) \geq 0 \quad \text{и} \quad \mu - 3\varepsilon - \tau(C_3 + \tau C_4(\varepsilon)) \geq \mu/2.$$

Из получившегося неравенства по разностной лемме Гронуолла получаем оценку

$$\max_{n=1, \dots, N} \sqrt{(\|w^n\|_2^1)^2 + \tau\mu \sum_{k=1}^n |w^k|_2^2} \leq e^{CT} \sqrt{\tau \sum_{n=1}^N \|\varphi\|^2}. \tag{46}$$

УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА В СЛУЧАЕ ДВУХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial a_1 u}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2 u}{\partial x_2} = 0 \quad (47)$$

в области $Q = [0, T] \times \Omega$, где $\Omega = [0, X_1] \times [0, X_2]$.

Вектор $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ будем считать известной гладкой вектор-функцией от переменных (t, \mathbf{x}) , принимающей нулевые значения в точках границы

$$\mathbf{a}|_{[0, T] \times \partial\Omega} = \mathbf{0}. \quad (48)$$

Начальные условия

$$u|_{t=0} = u_0(x_1, x_2). \quad (49)$$

Поскольку при условии (48), характеристики уравнения (47) являются вертикальными в точках границы, то краевые условия для задачи (47), (49) ставить не нужно.

Для построения р.с. уравнение (47) перепишем в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(a_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial a_1 u}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial a_2 u}{\partial x_2} \right) = \frac{u}{2} \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \right). \quad (50)$$

СХЕМА РАСЩЕПЛЕНИЯ

Для вычисления приближенного решения задачи (47), (49) можно использовать схему с расщепляющимся оператором

$$(E + \tau A_1^1(\hat{a}_k) + \lambda \tau^2 A_1^2(\hat{\mathbf{a}})) \times (E + \tau A_2^1(\hat{a}_k) + \lambda \tau^2 A_2^2(\hat{\mathbf{a}})) \hat{v} = v + \tau d, \quad (51)$$

где λ — положительный числовой параметр (исходя из теоретических оценок λ рекомендуется брать равным 3).

Операторы $A_k^1(a_k)$ аппроксимируют часть дифференциального оператора дивергенции, содержащую производную по переменной x_k :

$$A_k^1(a_k)v = \begin{cases} \left(a_k v_{x_k}^0 + (a_k v)_{x_k}^0 \right) / 2, & \mathbf{x}_i \in \bar{\omega}_h \setminus (\gamma_{-k} \cup \gamma_k), \\ (a_k v)_{x_k}, & \mathbf{x}_i \in \gamma_{-k}, \\ (a_k v)_{\bar{x}_k}, & \mathbf{x}_i \in \gamma_k. \end{cases} \quad (52)$$

Операторы $A_k^2(\mathbf{a})$ появляются вследствие расщепления разностного оператора и играют роль регуляризаторов:

$$A_k^2(\mathbf{a})v = \begin{cases} -(\Phi_k v_{x_k})_{\bar{x}_k}, & \mathbf{x}_i \in \bar{\omega}_h \setminus (\gamma_{-k} \cup \gamma_k), \\ -2h_k^{-1} \Phi_k v_{x_k}, & \mathbf{x}_i \in \gamma_{-k}, \\ 2h_k^{-1} \Phi_k v_{\bar{x}_k}, & \mathbf{x}_i \in \gamma_k. \end{cases} \quad (53)$$

Через Φ_1 и Φ_2 обозначены функции, заданные на сетке $\bar{\omega}_h$:

$$\Phi_1 = |\mathbf{a}|_{s_1 s_2 \bar{s}_2}^2, \quad \Phi_2 = |\mathbf{a}|_{s_2 s_1 \bar{s}_1}^2.$$

При этом считается, что функция $|\mathbf{a}|^2$ четным образом продолжена за границу сетки $\bar{\omega}_h$.

Сеточная функция d определена на сетке $\bar{\omega}_h$:

$$d = \begin{cases} -v \left(a_{10}^{x_1} + a_{20}^{x_2} \right) / 2, & \mathbf{x}_i \in \omega_h, \\ -\left(v a_{k x_k} - h_k \left[v \left(a_{k x_k \bar{x}_k}^{(+1_k)} - a_{k x_k \bar{x}_k}^{(+2_k)} / 2 \right) + (v a_k)_{x_k \bar{x}_k}^{(+1_k)} - (v a_k)_{x_k \bar{x}_k}^{(+2_k)} / 2 \right] \right) / 2, & \mathbf{x}_i \in \gamma_{-k}, \\ -\left(v a_{k \bar{x}_k} + h_k \left[v \left(a_{k x_k \bar{x}_k}^{(-1_k)} - a_{k x_k \bar{x}_k}^{(-2_k)} / 2 \right) + (v a_k)_{x_k \bar{x}_k}^{(-1_k)} - (v a_k)_{x_k \bar{x}_k}^{(-2_k)} / 2 \right] \right) / 2, & \mathbf{x}_i \in \gamma_k, \\ 0, & \mathbf{x}_i \in \gamma_*. \end{cases}$$

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ

Для исследования уравнение (51) переписывается в виде

$$v_t + \alpha_0(v, \hat{v}, \hat{\mathbf{a}}) + \sum_{i=1}^3 \tau^i \alpha_i(\hat{v}, \hat{\mathbf{a}}) = 0, \quad (54)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_0(v, \hat{v}, \hat{\mathbf{a}}) &= (A_1^1(\hat{a}_1) + A_2^1(\hat{a}_2))\hat{v} - d, \\ \alpha_1(\hat{v}, \hat{\mathbf{a}}) &= (A_1^1(\hat{a}_1)A_2^1(\hat{a}_2) + \lambda(A_1^2(\hat{\mathbf{a}}) + A_2^2(\hat{\mathbf{a}})))\hat{v}, \\ \alpha_2(\hat{v}, \hat{\mathbf{a}}) &= 3(A_1^1(\hat{a}_1)A_2^2(\hat{\mathbf{a}}) + A_1^2(\hat{\mathbf{a}})A_2^1(\hat{a}_2))\hat{v}, \\ \alpha_3(\hat{v}, \hat{\mathbf{a}}) &= \lambda^2 A_1^2(\hat{\mathbf{a}})A_2^2(\hat{\mathbf{a}})\hat{v}. \end{aligned}$$

Точное решение u задачи (47), (49) удовлетворяет уравнению (54) с невязкой ϕ . Во всех узлах сетки значения функции ϕ оцениваются по модулю величиной порядка $\tau + h^2$ при условии достаточной гладкости u . Более того, функция u удовлетворяет и продифференцированному разностным образом уравнению (54) с невязкой такого же порядка.

Строгое обоснование оценки погрешности численного интегрирования по схеме (51)-(53) требует достаточно скрупулезного исследования уравнения для ошибки. Это уравнение записывается по разному во внутренних точках сетки ω_h и в граничных точках, что приводит к большому объему выкладок. Поэтому приведем лишь конечный результат этого исследования.

ТЕОРЕМА

$$\max_{n \leq N} \|v - u\|_{W_{2,h}^1} \leq C(\tau + h^2).$$

ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu_1(u) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu_2(u) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + f \quad (55)$$

в области $Q = [0, T] \times \Omega$, где $\Omega = [0, X_1] \times [0, X_2]$.

Начальные условия

$$u|_{t=0} = u_0(x_1, x_2). \quad (56)$$

Краевые условия

$$u|_{\partial\Omega} = u_\gamma(t, x_1, x_2). \quad (57)$$

Выбор разностной схемы для решения задач с уравнением типа (55) сильно зависит от вида функций $\mu_k(u)$. Рассмотрим неявную разностную схему для задачи (55)-(57) с расщепляющимся оператором, поиск решения которой сводится к решению СЛАУ

$$\begin{aligned} & (E - \tau \tilde{\mu}_1 \partial_{x_1} \partial_{\bar{x}_1})(E - \tau \tilde{\mu}_2 \partial_{x_2} \partial_{\bar{x}_2}) \hat{v} = \\ & = v + \tau \left((\mu_1(v)_{s_1} v_{x_1})_{\bar{x}_1} - \tilde{\mu}_1 v_{x_1 \bar{x}_1} + (\mu_2(v)_{s_2} v_{x_2})_{\bar{x}_2} - \tilde{\mu}_2 v_{x_2 \bar{x}_2} + \hat{f} \right), \end{aligned} \quad (58)$$

где $\tilde{\mu}_k = \max \mu_k(v)_{s_k}$.

Для решения, найденного по этой схеме, верна оценка

$$\max_{n \leq N} \sqrt{\|v - u\|_{W_{2,h}^1}^2 + \tau(\tilde{\mu}_1 - \delta_1) \|v_{x_1 \bar{x}_1} - u_{x_1 \bar{x}_1}\|^2 + \tau(\tilde{\mu}_2 - \delta_2) \|v_{x_2 \bar{x}_2} - u_{x_2 \bar{x}_2}\|^2} \leq C(\tau + h^2),$$

при условии гладкости точного решения u задачи (55)-(57) и $\mu_k(u) \geq \delta_k > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2000 г.
2. Богачев К.Ю. Практикум на ЭВМ. Методы решения линейных систем и нахождения собственных значений. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом ф-те МГУ, 1999.
3. Марчук Г.И. Методы расщепления. М.: Наука, 1988.
4. Ковеня В.М. Алгоритмы расщепления при решении многомерных задач аэрогидродинамики. Новосибирск, изд-во Сибирского отделения РАН, 2014.
5. Popov A.V. A study of cost-effective finite difference scheme for the system of equations for two-dimensional flow of a viscous barotropic gas. // Sov.J.Numer.Mat.Modelling (1990) 5, 395-417.
6. Попов А.В. Исследование экономичного конечно-разностного метода для двухмерных уравнений вязкого теплопроводного газа. //Ж. выч. мат. и мат. физ. т.30, 1991 г. N 7, с. 1066-1080.
7. Slugin D.G., Popov A.V. Investigation of cost-effective finite difference scheme for the transport equation. //Mathematical Modelling and Analysis. V.8, 2003, N 3, pp. 247-258.
8. Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems. SIAM, 2ed., 2003.