

**СПЕЦКУРС**

1/2 года

кафедры вычислительной математики  
механико-математического факультета МГУ

**МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ  
НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ  
МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**

лектор - доцент Попов Анатолий Вадимович

**2025 г.**

ТЕМА 7.

**Разностные схемы**

**для одномерного движения вязкого газа**

рабочий конспект

© Механико-математический факультет МГУ, 2025 г.

© А.В.Попов, 2025 г.

## НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

Приведем систему уравнений, описывающую нестационарное одномерное движение вязкого баротропного газа

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0, \\ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho f, \\ p &= p(\rho).\end{aligned}\tag{1}$$

Неизвестные функции: плотность  $\rho$  и скорость  $u$  являются функциями переменных Эйлера

$$(t, x) \in Q = [0, T] \times [0, X].$$

Часто систему (1) записывают в дивергентном виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho f, \\ p &= p(\rho).\end{aligned}\tag{2}$$

Эта система в случае гладких функций  $\rho$  и  $u$  эквивалентна системе (1). Для расчета разрывных решений лучше работают алгоритмы, которые аппроксимируют систему, записанную в дивергентном виде.

В начальный момент времени задаются функции, значениями которых являются плотность и скорость газа в точках отрезка  $[0, X]$ :

$$(\rho, u)|_{t=0} = (\rho_0, u_0), \quad x \in [0, X].\tag{3}$$

Простейшими граничными условиями являются условия прилипания

$$u(t, 0) = u(t, X) = 0, \quad t \in [0, T].\tag{4}$$

В этом случае граничные условия на плотность газа не ставятся.

## СХЕМА С ЦЕНТРАЛЬНЫМИ РАЗНОСТЯМИ (ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ)

Систему уравнений, описывающую нестационарное одномерное движение вязкого баротропного газа, при условии гладкости функций  $\rho > 0$  и  $u$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \rho u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{3} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \\ p &= p(\rho). \end{aligned} \quad (5)$$

Для поиска численного решения задачи (5),(3),(4) можно использовать р.с., в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности, а уравнения решаются последовательно методом "прогонки".

$$\begin{aligned} H_t + 0.5 (V \hat{H}_0 + (V \hat{H})_0 + H V_0) &= 0, \quad x \in \omega_h, \\ H_{t,0} + 0.5 ((V \hat{H})_{x,0} + H_0 V_{x,0}) - \\ - 0.25h((HV)_{x\bar{x},1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},2} + H_0 (V_{x\bar{x},1} - 0.5V_{x\bar{x},2})) &= 0, \\ H_{t,M} + 0.5 ((V \hat{H})_{\bar{x},M} + H_M V_{\bar{x},M} + \\ + 0.25h((HV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},M-2} + H_M (V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})) &= 0, \\ V_t + \frac{1}{3} (V \hat{V}_0 + (V \hat{V})_0) + \frac{p(\hat{H})_0}{\hat{H}} &= \tilde{\mu} \hat{V}_{x\bar{x}} - \left( \tilde{\mu} - \frac{\mu}{\hat{H}} \right) V_{x\bar{x}} + f, \quad x \in \omega_h, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\tilde{\mu} = \max_m \frac{\mu}{\hat{H}}$ .

В качестве значений разностного решения на нулевом слое берутся проекции на сетку  $\bar{\omega}_h$  функций  $\rho_0$  и  $u_0$ :

$$H_m^0 = \rho_{0m}, \quad V_m^0 = (u_0)_m, \quad m = 0, 1, \dots, M. \quad (7)$$

Граничные значения функции скорости равны нулю:

$$V_0^n = V_M^n = 0, \quad n = 1, \dots, N. \quad (8)$$

# СИСТЕМА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПЛОТНОСТИ

$$\begin{aligned} b_0^H \cdot \hat{H}_0 + c_0^H \cdot \hat{H}_1 &= d_0^H; \\ a_m^H \cdot \hat{H}_{m-1} + b_m^H \cdot \hat{H}_m + c_m^H \cdot \hat{H}_{m+1} &= d_m^H, \quad m = 1, \dots, M-1; \\ a_M^H \cdot \hat{H}_{M-1} + c_M^H \cdot \hat{H}_M &= d_M^H. \end{aligned} \quad (9)$$

Коэффициенты системы уравнений (9) определяются по формулам

$$\begin{aligned} b_0^H &= \frac{1}{2} - \frac{\tau V_0}{4h}, \quad c_0^H = \frac{\tau V_1}{4h}, \\ d_0^H &= \frac{H_0}{2} - \frac{\tau}{4} H_0 V_{x,0} + \frac{\tau h}{8} ((HV)_{x\bar{x},1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},2} + H_0 (V_{x\bar{x},1} - 0.5V_{x\bar{x},2})), \\ a_m^H &= -\frac{\tau(V_{m-1} + V_m)}{4h}, \quad b_m^H = 1, \quad c_m^H = \frac{\tau(V_m + V_{m+1})}{4h}, \quad d_m^H = H_0 - \frac{\tau}{2} H_m V_{x,m}, \\ a_M^H &= -\frac{\tau V_{M-1}}{4h}, \quad c_M^H = \frac{1}{2} + \frac{\tau V_M}{4h}, \\ d_M^H &= \frac{H_M}{2} - \frac{\tau}{4} H_M V_{\bar{x},M} - \frac{\tau h}{8} ((HV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},M-2} + H_M (V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})). \end{aligned}$$

Таким образом, при известных функциях  $H$  и  $V$  на  $n$ -ом временном слое значения функции  $\hat{H}$  на  $(n+1)$ -ом временном слое ищутся как решение СЛАУ

$$A^H \hat{H} = \mathbf{d}^H,$$

состоящей из  $(M+1)$ -го уравнения. Матрица  $A^H$  — трехдиагональная

$$A^H = \begin{pmatrix} b_0^H & c_0^H & 0 & \dots & 0 \\ a_1^H & b_1^H & c_1^H & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & a_{M-1}^H & b_{M-1}^H & c_{M-1}^H \\ \dots & 0 & 0 & a_M^H & b_M^H \end{pmatrix}$$

и является суммой двух матриц

$$A^H = A_1^H + A_2^H.$$

Матрица  $A_1^H$  — диагональная, первый и последний элемент диагонали равны  $1/2$ , а остальные единице, а матрица  $A_2^H$  — кососимметричная при условии, что  $V_0 = V_M = 0$ . Такие матрицы являются невырожденными, поэтому функция  $\hat{H}$  всегда может быть найдена однозначно. Для решения таких систем можно применять метод "прогонки".

# СИСТЕМА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СКОРОСТИ

$$a_m^V \cdot \hat{V}_{m-1} + b_m^V \cdot \hat{V}_m + c_m^V \cdot \hat{V}_{m+1} = d_m^V, \quad m = 1, \dots, M-1. \quad (10)$$

Коэффициенты системы уравнений (10) определяются по формулам

$$a_m^V = -\frac{\tau(V_{m-1} + V_m)}{6h} - \frac{\tau\tilde{\mu}}{h^2}, \quad b_m^V = 1 + \frac{2\tau\tilde{\mu}}{h^2}, \quad c_m^V = \frac{\tau(V_{m+1} + V_m)}{6h} - \frac{\tau\tilde{\mu}}{h^2},$$

$$d_m^V = V_m - \frac{p(\hat{H})_0}{\hat{H}} \frac{x}{x} - \left( \tilde{\mu} - \frac{\mu}{\hat{H}} \right) V_{x\bar{x}} + f.$$

Таким образом, при известных функциях  $\hat{H} > 0$  и  $V$  значения функции  $\hat{V}$  во внутренних узлах сетки  $\omega_h$  ищутся как решение СЛАУ

$$A^V \hat{V} = \mathbf{d}^V,$$

состоящей из  $(M-1)$ -го уравнения.

Матрица  $A^V$  — трехдиагональная и является суммой трех матриц

$$A^V = E + A_1^V + A_2^V.$$

Матрица  $E$  — единичная, матрица  $A_1^V$  — кососимметричная, а матрица  $A_2^H$  — симметричная и положительно определенная. Такие матрицы являются невырожденными, поэтому функция  $\hat{V}$  всегда может быть найдена однозначно. Для решения таких систем можно применять метод "прогонки".

## ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ

Предположим относительно задачи (1),(3),(4) выполнение следующих требований.

**Условие 1.** Существует единственное классическое решение задачи.

**Условие 2.**  $u \in C^{2,4}(Q)$ ,  $(\rho, \frac{\partial \rho}{\partial x}) \in C^{2,3}(Q)$ .

**Условие 3.**  $\rho(t, x) \geq m_\rho > 0$ , при  $(t, x) \in Q$ .

**Условие 4.**  $p \in C^3(m_\rho/2; \|\rho\|_Q + m_\rho/2)$ ,  $\max_Q |f| = f_M < \infty$ .

При сделанных предположениях методом энергетических неравенств доказывается следующая теорема.

**ТЕОРЕМА** Существуют величины  $\tau_{\max}$ ,  $h_{\max}$  и  $C$ , зависящие от таких параметров:

- 1) размер области  $Q$ ,
- 2)  $\|u\|_{C^{2,4}(Q)}$ ,  $\|(\rho, \frac{\partial \rho}{\partial x})\|_{C^{2,3}(Q)}$ ,
- 3) констант  $\mu$ ,  $f_M$  и  $m_\rho$ ,
- 4)  $\|p\|_{C^3(m_\rho/2; \|\rho\|_Q + m_\rho/2)}$

такие, что для сеточных норм разности между проекцией точного решения дифференциальной задачи на сетку  $Q_{\tau,h}$  и разностного решения верна оценка

$$\max_{n \leq N} \|(H^n, V^n) - (\rho^n, u^n)\|_{W_{2h}^1}^2 + \tau \sum_{n=1}^M [\|V_{x\bar{x}}^n - u_{x\bar{x}}^n\|^2 + \|V_t^n - u_t^n\|^2] \leq C(\tau + h^2)^2,$$

если  $\tau \leq \tau_{\max}$  и  $h \leq h_{\max}$ .

Из утверждения теоремы следует, что при  $\tau \leq \tau_{\max}$  и  $h \leq h_{\max}$ , значения сеточной функции плотности  $H$  отделены от нуля величиной  $m_\rho/2$ .

## НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ $LOG(\rho)$

Для автоматического обеспечения условия положительности функции плотности заменим вычисление  $H$  на вычисление функции  $G = \ln H$ . Для этого преобразуем систему (1) следующим образом. Раскроем конвективное слагаемое первого уравнения системы, используя формулу дифференцирования произведения функций, и поделим получившееся уравнение на  $\rho$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{u}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Обозначив  $g = \ln \rho$ , получим

$$\frac{\partial g}{\partial t} + u \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

В целях обеспечения единственности решения аппроксимирующей РС, запишем это уравнение в виде

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( u \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial u g}{\partial x} + (2 - g) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0. \quad (11)$$

Второе уравнение системы (1) поделим на  $\rho$  и конвективный член перепишем аналогично проделанному с первым уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{3} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial x} \right) + \tilde{p}'(g) \frac{\partial g}{\partial x} = \mu e^{-g} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \quad (12)$$

где  $\tilde{p}'(g) = \frac{dp}{d\rho}(e^g)$ .

Дополним систему (11)-(12) начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} (g, u)|_{t=0} &= (\ln(\rho_0), u_0), \quad \mathbf{x} \in [0, X], \\ u(t, 0) &= u(t, X) = 0, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (13)$$

## СХЕМА С ЦЕНТРАЛЬНЫМИ РАЗНОСТЯМИ ДЛЯ $LOG(\rho)$

Сеточную функцию, разностное приближение для функции  $g$ , обозначим  $G$ , а сеточный аналог скорости  $\mathbf{u}$  обозначим  $\mathbf{V}$ . Обе функции заданы на сетке  $\bar{\omega}_h$ . Для поиска численного решения задачи (11)-(13) можно использовать р.с., в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности

$$\begin{aligned}
 G_t + 0.5 (V \hat{G}_0 + (V \hat{G})_0 + 2 \hat{V}_0 - G V_0) &= 0, \quad x \in \omega_h, \\
 G_{t,0} + 0.5 ((V \hat{G})_{x,0} + 2 \hat{V}_{x,0} - G_0 V_{x,0}) - \\
 - 0.25h((GV)_{x\bar{x},1} - 0.5(GV)_{x\bar{x},2} + (2 - G_0)(V_{x\bar{x},1} - 0.5V_{x\bar{x},2})) &= 0, \\
 G_{t,M} + 0.5 ((V \hat{G})_{\bar{x},M} + 2 \hat{V}_{\bar{x},M} - G_M V_{\bar{x},M}) + \\
 + 0.25h((GV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(GV)_{x\bar{x},M-2} + (2 - G_M)(V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})) &= 0, \\
 V_t + \frac{1}{3}(V \hat{V}_0 + (V \hat{V})_0) + \tilde{p}'(G) \hat{G}_0 = \tilde{\mu} \hat{V}_{x\bar{x}} - (\tilde{\mu} - \mu e^{-G}) V_{x\bar{x}} + f, \quad x \in \omega_h,
 \end{aligned} \tag{14}$$

где  $\tilde{\mu} = \mu \|e^{-G}\|_C$ .

В качестве значений разностного решения на нулевом слое берутся проекции на сетку  $\bar{\omega}_h$  функций  $ln(\rho_0)$  и  $u_0$ :

$$G_m^0 = ln((\rho_0)_m), \quad \mathbf{V}_m^0 = (u_0)_m, \quad m = 0, 1, \dots, M. \tag{15}$$

Граничные значения функции скорости равны нулю:

$$V_0^n = V_M^n = 0, \quad n = 1, \dots, N. \tag{16}$$

Теоретическое исследование разностной схемы проводится при предположении, что  $\tilde{p}'(g) = \sigma \equiv const > 0$ .



ОПЕРАТОРНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

$$\begin{aligned} G_t + A_1^g(V)\hat{G} + A_2^g\hat{V} &= B^g(G, V), \quad x \in \bar{\omega}_h, \\ V_t + A_1^v(V)\hat{V} + A_2^v(G)\hat{G} - A_3^v\hat{V} &= B^v(G, V), \quad x \in \omega_{\bar{h}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Выше в уравнениях (17) были использованы следующие обозначения.

$$A_1^g(V)\hat{G} = \begin{cases} 0.5(V\hat{G})_{x,0}; \\ 0.5(V\hat{G}_0 + (V\hat{G})_0), & x \in \omega_h; \\ 0.5(V\hat{G})_{\bar{x},M}. \end{cases} \quad (18)$$

$$A_2^g\hat{V} = \begin{cases} (\hat{V})_{x,0}; \\ (\hat{V})_0, & x \in \omega_h; \\ (\hat{V})_{\bar{x},M}. \end{cases} \quad (19)$$

$$B^g(G, V) = \begin{cases} 0.5G_0(V)_{x,0} + 0.25h((GV)_{x\bar{x},1} - 0.5(GV)_{x\bar{x},2} + (2 - G_0)(V_{x\bar{x},1} - 0.5V_{x\bar{x},2})); \\ 0.5GV_0, & x \in \omega_h; \\ 0.5G_M V_{\bar{x},M} - 0.25h((GV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(GV)_{x\bar{x},M-2} + (2 - G_M)(V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})). \end{cases} \quad (20)$$

$$A_1^v(V)\hat{V} = \frac{1}{3}(V(\hat{V})_0 + (V\hat{V})_0), \quad x \in \omega_{\bar{h}}, \quad (21)$$

$$A_2^v(G)\hat{G} = \tilde{p}'(G)\hat{G}_0, \quad x \in \omega_{\bar{h}}, \quad (22)$$

$$A_3^v\hat{V} = \frac{4}{3}\tilde{\mu}(\hat{V})_{x\bar{x}}, \quad x \in \omega_{\bar{h}}, \quad (23)$$

$$B^v(G, V) = -\frac{4}{3}(\tilde{\mu} - \mu e^{-G})(V)_{x\bar{x}} + f, \quad x \in \omega_{\bar{h}}. \quad (24)$$

## СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ

**ТЕОРЕМА** Решение р.с. (14)-(16) существует и единственно.

**Доказательство.** Решение р.с. (14)-(16) на верхнем временном слое  $x = (\hat{G}, \hat{V})^*$  является решением системы линейных уравнений

$$Ax = b.$$

Матрица  $A$  представима в виде суммы трех матриц

$$A = \tilde{E} + \tau A_1 + \tau A_2. \quad (25)$$

$\tilde{E}$  – диагональная матрица (она соответствует членам  $G_t$  и  $V_t$ ), у которой диагональные элементы равны  $\tilde{p}'(g)$ , если строка матрицы соответствует члену  $G_t$  во внутренних узлах сетки,  $\tilde{p}'(g)/2$ , если строка соответствует члену  $G_t$  в граничных узлах, и 1, если строка соответствует члену  $V_t$ .

Матрица  $A_1$  состоит из блоков

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_1^g & \tilde{A}_2^g \\ A_2^v & A_1^v \end{pmatrix}.$$

Строки блоков  $\tilde{A}_k^g$  ( $k=1,2$ ) получаются домножением на  $\tilde{p}'(g)/2$  строк матриц  $A_k^g$ , соответствующих граничным узлам сетки, и на  $\tilde{p}'(g)$  для внутренних узлов. В случае  $\tilde{p}'(g) = \text{const} > 0$  матрица  $A_1$  является кососимметричной.

$A_2$  – симметричная неотрицательно определенная матрица, состоящая из блоков

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -A_3^v \end{pmatrix}.$$

Поскольку для любого вектора  $x$ , ( $x \neq 0$ ),

$$(Ax, x) = (\tilde{E}x, x) + \tau(A_1x, x) + \tau(A_2x, x) \geq (\tilde{E}x, x) > 0,$$

то матрица  $A$  – невырождена и решение на  $(n+1)$ -ом временном слое всегда однозначно определяется по  $n$ -ому слою. Следовательно, решение р.с. (14)-(16) существует и единственно.

## МОНОТОНИЗАЦИЯ СХЕМЫ

В схеме используются центральные разности по пространственным переменным и вследствие этого она является немонотонной. Поэтому в целях устранения осцилляций, возникающих на разрывах, в правые части разностных уравнений, аппроксимирующих уравнение (11), добавляются слагаемые, которые играют роль искусственной вязкости

$$\begin{aligned}
 G_t + 0.5 (V\hat{G}_x + (V\hat{G})_x + 2\hat{V}_x - GV_x) &= \eta\tau(\Phi_s\hat{G}_x)_{\bar{x}}, \quad x \in \omega_h, \\
 G_{t,0} + 0.5 ((V\hat{G})_{x,0} + 2\hat{V}_{x,0} - G_0V_{x,0}) - \\
 - 0.25h((GV)_{x\bar{x},1} - 0.5(GV)_{x\bar{x},2} + (2 - G_0)(V_{x\bar{x},1} - 0.5V_{x\bar{x},2})) &= \\
 = 2\eta\tau\Phi_{s,0}\hat{G}_{x,0}, \\
 G_{t,M} + 0.5 ((V\hat{G})_{\bar{x},M} + 2\hat{V}_{\bar{x},M} - G_MV_{\bar{x},M}) \\
 + 0.25h((GV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(GV)_{x\bar{x},M-2} + (2 - G_M)(V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})) &= \\
 = 2\eta\tau\Phi_{\bar{s},M}\hat{G}_{\bar{x},M}.
 \end{aligned} \tag{26}$$

При добавлении искусственной вязкости теорема о существовании и единственности решения разностной схемы остается справедливой. Теоретические оценки точности, доказываемые в случае гладких точных решений, справедливы при любых  $\eta \geq 0$ , что подтверждено тестовыми расчетами. В численных экспериментах используются два вида функций:  $\Phi = H$  и  $\Phi = V^2$ .

## ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ

Для ошибки численного интегрирования по р.с. (14)-(16) с добавленной искусственной вязкостью справедлива следующая теорема.

### ТЕОРЕМА

Пусть для дифференциальной задачи (11)-(13)) выполнены условия:

**Условие 1.** Существует единственное классическое решение задачи.

**Условие 2.**  $u \in C^{2,4}(Q)$ ,  $(\rho, \frac{\partial \rho}{\partial x}) \in C^{2,3}(Q)$ .

**Условие 3.**  $\rho(t, x) \geq m_\rho > 0$ , при  $(t, x) \in Q$ .

**Условие 4.**  $p \in C^3(m/2; \|\rho\|_Q + m/2)$ ,  $\max_Q |f| = f_M < \infty$ .

Тогда существуют величины  $\tau_{max}$ ,  $h_{max}$ , и  $C$ , зависящие от следующих параметров:

- 1) размера области  $Q$ ,
- 2)  $\|(\rho, \nabla \rho)\|_{C^{2,3}(Q)}$ ,  $\|\mathbf{u}\|_{C^{2,4}(Q)}$ ,
- 3) констант  $m$  из условия 3,  $\mu$ ,  $\sigma$  и  $\|f\|_{C(Q)}$ .
- 4) константы  $\eta$  и  $\|\Phi\|_{W_{2,h}^1}$

такие, что

$$\begin{aligned} & \max_{n=1, \dots, N} (\|G^n - g^n\|_1 + \|\mathbf{V}^n - \mathbf{u}^n\|_1) + \sqrt{\tau \sum_{n=1}^N [(|V^n - u^n|_2)^2 + \|V^n - u_t^n\|^2]} \\ & \leq C \left( \|G^0 - g^0\|_1 + \|V^0 - u_0\|_1 + \sqrt{\tau} |V^0 - u_0|_2 + \sqrt{\tau \sum_{n=0}^{N-1} (\|\varphi^n\|_1)^2 + \|\psi^n\|^2} \right), \end{aligned}$$

где через функции  $\varphi^n$  и  $\psi^n$  обозначены величины невязок, возникающих при подстановке точного дифференциального решения в уравнения схемы.

## СХЕМА А.Г.СОКОЛОВА (ПЛОТНОСТЬ-ИМПУЛЬС)

А.Г.Соколов (старший научный сотрудник кафедры вычислительной математики) предложил использовать для расчетов течений газа оригинальную разностную схему. Будем рассматривать баротропное течение газа с уравнением состояния

$$p = \rho^\gamma.$$

Функции  $H$  (сеточная плотность), заданная в узлах сетки  $\omega_h^{1/2}$ , и  $V$  (сеточная скорость), заданная в узлах сетки  $\omega_h$ , ищутся по схеме, аппроксимирующей систему (2)

$$H_t + (\sigma\{\hat{H}, V\}V)_x = 0, \quad 0 \leq m < M, \quad n \geq 0, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} (H_{\bar{s}}V)_t + \frac{1}{2} \left( (\sigma\{\hat{H}\hat{V}, V\}V)_x + (\sigma\{\hat{H}\hat{V}^{+1}, V\}V)_{\bar{x}} \right) + \frac{\gamma}{\gamma-1} \hat{H}_{\bar{s}}((\hat{H})^{\gamma-1})_{\bar{x}} = \\ = \mu \hat{V}_{x\bar{x}} + \hat{H}_{\bar{s}}f, \quad \text{при } \hat{H}_{\bar{s}} \neq 0, \\ \hat{V} = 0, \quad \text{при } \hat{H}_{\bar{s}} = 0, \\ 0 < m < M, \quad n \geq 0, \\ \hat{V}_0 = \hat{V}_M = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

В формулах (27)-(28) были использованы обозначения

$$\sigma\{H, V\} = H \frac{|V| - V}{2|V|} + H^{(-1)} \frac{|V| + V}{2|V|} = \begin{cases} H, & \text{если } V < 0, \\ H^{(-1)}, & \text{если } V \geq 0, \end{cases} \quad (29)$$

# ИНДЕКСНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ СХЕМЫ А.Г.СОКОЛОВА

Разностные уравнения (27)-(28) в индексах имеют вид

$$\begin{aligned} & \frac{H_m^{n+1} - H_m^n}{2h} + \\ & + \frac{(V_{m+1}^n - |V_{m+1}^n|)H_{m+1}^{n+1} + (V_{m+1}^n + |V_{m+1}^n| - V_m^n + |V_m^n|)H_m^{n+1} - (V_m^n + |V_m^n|)H_{m-1}^{n+1}}{2h} = 0, \\ & 0 \leq m < M, n \geq 0. \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(H_{m-1}^{n+1} + H_m^{n+1})V_m^{n+1} - (H_{m-1}^n + H_m^n)V_m^n}{2h} - \\ & - \frac{((|V_{m-1}^n| + V_{m-1}^n)H_{m-2}^{n+1} + (|V_m^n| + V_m^n)H_{m-1}^{n+1})V_{m-1}^{n+1}}{2h} + \\ & + \frac{((|V_{m-1}^n| - V_{m-1}^n + |V_m^n| + V_m^n)H_{m-1}^{n+1} + (|V_{m+1}^n| + V_{m+1}^n + |V_m^n| - V_m^n)H_m^{n+1})V_m^{n+1}}{2h} - \\ & - \frac{((|V_m^n| - V_m^n)H_m^{n+1} + (|V_{m+1}^n| - V_{m+1}^n)H_{m+1}^{n+1})V_{m+1}^{n+1}}{2h} + \\ & + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{H_m^{n+1} + H_{m-1}^{n+1}}{2} \frac{(H_m^{n+1})^{\gamma-1} - (H_{m-1}^{n+1})^{\gamma-1}}{2} = \\ & = \mu \frac{V_{m-1}^{n+1} - 2V_m^{n+1} + V_{m+1}^{n+1}}{h^2} + \frac{h}{2} \frac{H_{m-1}^{n+1} + H_m^{n+1}}{2} f_m^{n+1}, \\ & \text{при } H_{m-1}^{n+1} + H_m^{n+1} \neq 0, \\ & V_m^{n+1} = 0, \quad \text{при } H_{m-1}^{n+1} + H_m^{n+1} = 0, \\ & 0 < m < M, n \geq 0, \\ & V_0^{n+1} = V_M^{n+1} = 0. \end{aligned} \tag{31}$$

## СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ПЛОТНОСТИ

Матрица сеточного оператора

$$A\hat{H} \equiv (\sigma\{\hat{H}, V\}V)_x$$

выглядит следующим образом

$$\frac{1}{2h} \begin{pmatrix} v_1 + |v_1| & v_1 - |v_1| & 0 & \dots & 0 \\ -v_1 - |v_1| & -v_1 + |v_1| + v_2 + |v_2| & v_2 - |v_2| & 0 & \dots \\ 0 & -v_2 - |v_2| & -v_2 + |v_2| + v_3 + |v_3| & v_3 - |v_3| & 0 \\ 0 & \dots & -v_3 - |v_3| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & A_{N-2, N-1} \\ 0 & \dots & 0 & A_{N-1, N-2} & A_{N-1, N-1} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица имеет следующие свойства:

- 1) на диагонали стоят неотрицательные числа;
- 2) вне диагонали стоят неположительные числа;
- 3) сумма элементов по столбцу равна нулю;
- 4) матрица  $A$  является трехдиагональной, причем если для какого-нибудь  $i$  выполняется  $A_{i, i+1} \neq 0$ , то  $A_{i+1, i} = 0$ ;
- 5) если у матрицы  $A$  имеется три ненулевых элемента в столбце для какого-нибудь  $i$ , то в  $i$ -ой строке ненулевым будет только диагональный элемент.

Сеточная функция плотности на верхнем временном слое ищется из СЛАУ

$$B\hat{H} = H,$$

где матрица  $B = E + \tau A$ . У матрицы  $B$  по диагонали стоят положительные числа большие или равные 1. В силу свойства 3 матрица  $B$  имеет строгое диагональное преобладание по столбцам, из чего следует однозначная разрешимость системы при любом векторе  $H$ .

## НЕОТРИЦАТЕЛЬНОСТЬ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ

Для доказательства, что сеточная функция плотности, найденная по схеме А.Г.Соколова, имеет неотрицательные значения, достаточно доказать, что  $\hat{H}$  имеет все значения неотрицательные, если  $H \geq 0$ . Для этого достаточно доказать неотрицательность элементов обратной матрицы

$$(E + \tau A)^{-1}.$$

Рассмотрим матрицу  $D = (E + \tau A)^T$ . У нее имеется строгое диагональное преобладание по строке. Для матриц с таким свойством итерационные методы Якоби и Зейделя сходятся с любого начального приближения.

Пусть решается СЛАУ  $Dx = b$  методом Якоби с начального приближения  $x_0 = 0$  и с вектором правой части  $b$ , состоящим из неотрицательных чисел. Из вычислительной схемы метода Якоби

$$x_i^{n+1} = \frac{1}{D_{i,i}}(b_i - \sum_{k=1, k \neq i}^M B_{i,k} x_k^n), \quad i = 1, 2, \dots, M$$

и свойств неположительности внедиагональных и положительности диагональных элементов матрицы  $D$  ( $D_{k,i} = B_{i,k} \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, M$ ) следует, что  $x_i^n \geq 0$  для  $i = 1, 2, \dots, M, n = 1, 2, \dots$ . Предельный вектор также будет неотрицательным. Таким образом, для любого неотрицательного вектора  $b$  вектор  $x = D^{-1}b$  будет неотрицательным. Значит матрица  $D^{-1}$  состоит из неотрицательных чисел. Соответственно матрица

$$(E + \tau A)^{-1} = (D^{-1})^T$$

существует и состоит из неотрицательных чисел.



## КОНСЕРВАТИВНОСТЬ СХЕМЫ

**ТЕОРЕМА** Разностная схема для уравнения неразрывности

$$H_t + (\sigma\{\hat{H}, V\}V)_x = 0$$

с любой заданной сеточной функцией  $V$  имеет единственное решение, причем если  $H^0 \geq 0$ , то и  $H^n \geq 0$  для всех  $n$ . Разностная схема является консервативной, т.е.

$$\sum_{i=0}^{M-1} hH_i^n = \sum_{i=0}^{M-1} hH_i^0.$$

Из неотрицательности и консервативности следует

$$\|H^n\|_{L_{1,h}} = const \quad \text{для} \quad \forall n.$$

Если  $V$  заданная функция и  $H^0 \geq 0$ , то полученное равенство является условием слабой устойчивости разностной схемы.

Однако,  $L_{1,h} \not\rightarrow L_1$  при  $h \rightarrow 0$ .

**Пример.** При решении уравнения неразрывности с функцией  $u = \sin(3\pi x)$  его решение будет со временем собираться в две  $\delta$ -функции в точках  $x = \pi$  и  $x = 3\pi$  с разными коэффициентами в зависимости от начального условия  $\rho^0 \geq 0$ , а в остальных точках отрезка  $[0, 1]$

$$\rho(t, x) \rightarrow 0, \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty.$$

## ИНТЕГРАЛЬНОЕ ТОЖДЕСТВО

Докажем следующее интегральное тождество для решения системы (1) при выполнении однородных граничных условий (4), уравнении состояния  $p = \rho^\gamma$  и  $\mu = 0$ .

$$\int_0^X \rho(t, x) \frac{u^2(t, x)}{2} + \frac{p(t, x)}{\gamma - 1} dx = \int_0^X \rho(0, x) \frac{u^2(0, x)}{2} + \frac{p(0, x)}{\gamma - 1} dx. \quad (32)$$

Для этого домножим первое уравнение системы (1) на  $\frac{1}{2}u^2$ , а второе на  $u$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2}u^2 \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{1}{2}\rho \frac{\partial u^2}{\partial t} + \frac{1}{2}\rho u \frac{\partial u^2}{\partial x} + u \frac{\partial \rho^\gamma}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

Сложив уравнения и проинтегрировав по области  $Q = [0, T] \times [0, X]$ , получим

$$\int_Q \frac{1}{2} \frac{\partial \rho u^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho u^3}{\partial x} + u \frac{\partial \rho^\gamma}{\partial x} dQ = 0.$$

Заметим, что интеграл от второго слагаемого в силу однородных граничных условий на функцию  $u$  равен нулю, а интеграл от третьего слагаемого можно преобразовать следующим образом

$$\begin{aligned} \int_Q u \frac{\partial \rho^\gamma}{\partial x} dx &= \int_Q \gamma \rho^{\gamma-2} \rho u \frac{\partial \rho}{\partial x} dx = \int_Q \frac{\gamma}{\gamma-1} \rho u \frac{\partial \rho^{\gamma-1}}{\partial x} dx = - \int_Q \frac{\gamma}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1} \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx = \\ &= \int_Q \frac{\gamma}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx = \int_Q \frac{1}{\gamma-1} \frac{\partial \rho^\gamma}{\partial t} dx. \end{aligned}$$

В результате имеем

$$\int_Q \frac{1}{2} \frac{\partial \rho u^2}{\partial t} + \frac{1}{\gamma-1} \frac{\partial p}{\partial t} dQ = 0.$$

Откуда следует тождество (32).

ПОЛНОСТЬЮ НЕЯВНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА СОКОЛОВА А.Г.

$$H_t + (\sigma\{\hat{H}, \hat{V}\}\hat{V})_x = 0, \quad 0 \leq m < M, \quad n \geq 0, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} (H_{\bar{s}}V)_t + \frac{1}{2} \left( (\sigma\{\hat{H}\hat{V}, \hat{V}\}\hat{V})_x + (\sigma\{\hat{H}\hat{V}^{+1}, \hat{V}\}\hat{V})_{\bar{x}} \right) + \frac{\gamma}{\gamma-1} \hat{H}_{\bar{s}}((\hat{H})^{\gamma-1})_{\bar{x}} &= 0 \quad \text{при } \hat{H}_{\bar{s}} \neq 0, \\ \hat{V} &= 0, \quad \text{при } \hat{H}_{\bar{s}} = 0, \\ 0 < m < M, \quad n &\geq 0, \\ \hat{V}_0 &= \hat{V}_M = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Для полностью неявной разностной схемы справедлива теорема.

**ТЕОРЕМА.** Пусть в начальный момент времени функция  $H^0$  больше или равна нулю. Тогда существует решение разностной схемы (33)-(34) для которого выполнено энергетическое неравенство

$$\sum_{m=0}^{M-1} \frac{h}{\gamma-1} (\hat{H}^\gamma - H^\gamma) + \sum_{m=0}^{M-1} \frac{h}{2} (\hat{H}\hat{V}^2 - HV^2) \leq 0.$$

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ СИСТЕМА В ЛАГРАЖЕВЫХ МАССОВЫХ КООРДИНАТАХ

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p(\eta)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right) + g, \\ \rho &= 1/\eta.\end{aligned}\tag{35}$$

Функция  $\eta$  задает удельный объем газа ( $\eta = 1/\rho$ ), а функция  $u$  — скорость газа. Решение системы  $z = (\eta, u)$  является функциями от лагражевых массовых координат в области  $Q = (0, T) \times (0, X)$ .

Начальные и граничные условия для системы (35)

$$u|_{x=0, x=X} = 0, \quad \eta|_{t=0} = \eta^0, \quad u|_{t=0} = u^0.\tag{36}$$

Рассматриваются решения задачи из класса  $W_2^{1,1}(Q) \times W_2^{1,2}(Q)$  такие, что  $\eta > 0$ . Положим  $z^0 = (\eta^0, u^0)$ ,  $\rho^0 = 1/\eta^0$ .

Потребуем, чтобы функция  $p(\eta)$  удовлетворяла условиям  $p, p' \in L_\infty^{loc}(R^+)$ ,  $p \geq 0$ , и для  $\eta \in R^+ = (0, +\infty)$  — неравенству

$$\eta p(\eta) \leq C^0[E^0(\eta) + C^1\eta], \quad E^0(\eta) = \int_\eta^1 p(\xi) d\xi,$$

с положительными постоянными  $C^0$  и  $C^1$ . Неравенство налагает ограничения на поведение  $p(\eta)$  только при  $\eta \rightarrow +0$  и  $\eta \rightarrow +\infty$ . В последнем случае это неравенство эквивалентно, с учетом других условий на  $p$ , условию  $p = O(1)$ .

**Можно показать, что функция  $p(\eta) = p_1\eta^{-\gamma}$  с  $p_1 > 0$ ,  $\gamma \geq 0$  удовлетворяет этому неравенству.**

### ТЕОРЕМА КАЖИХОВА А.В.

Пусть  $N > 1$  — произвольное число. Через  $K(N)$  ниже обозначены различные положительные неубывающие функции (они могут зависеть от  $X, T, \nu$  и  $p$  как от параметров), а через  $k(N)$  — аналогичные невозрастающие функции.

Обозначим

$$\frac{\partial}{\partial t} = D_t, \quad \frac{\partial}{\partial x} = D.$$

#### ТЕОРЕМА КАЖИХОВА.

Если  $\|z^0\|_{W_2^1(0,X)} + \|g\|_{L_2(Q)} \leq N$ ,  $N^{-1} \leq \eta^0$ , и  $u^0|_{x=0, x=X} = 0$ , то задача (35)-(36) имеет единственное решение, причем для него верны оценки

$$1/K_0(N) \leq \eta \leq K_0(N), \quad \|\eta\|_{W_2^{(1,1)}(Q)} + \|D_t D \eta\|_{L_2(Q)} + \|u\|_{W_2^{(1,2)}(Q)} \leq K(N).$$

# ОБОБЩЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ КАЖИХОВА А.В.

Обозначим

$$(I_t \omega)(t) = \int_0^t \omega(\theta) d\theta$$

и

$$|\cdot| = \|\cdot\|_{L_{\infty,2}(Q)} + \|\cdot\|_{W_2^{(0,1)}(Q)}, \quad \|\omega\|^{(1/2,0)} = \sup_{0 < \gamma < T} \gamma^{-1/2} \|\omega(t + \gamma, x) - \omega(t, x)\|_{L_2(Q_{T-\gamma})}.$$

## ТЕОРЕМА.

1. Если выполнены условия теоремы Кажихова и

$$\|D^2 u^0\|_{L_2(0,X)} + \|g^{(1)}\|_{L_2(Q)} + \|g^{(2)}\|_{L_2(Q)} + \|g\|_{L_2(Q)} + \|D_t g^{(1)}\|_{L_{1,2}(Q)} \leq N,$$

причем  $g = g^{(1)} + DI_t g^{(2)}$ , то

$$|D_t u| + \|D_t u\|^{(1/2,0)} \leq K(N).$$

2. Если выполнены условия теоремы Кажихова и

$$\|D^2 u^0\|_{L_2(0,X)} + \|(D_t u)^0\|_{W_2^1(0,X)} + \|D_t g\|_{L_2(Q)} \leq N, \quad (D_t u)^0|_{x=0,X} = 0, \quad p'' \in L_{\infty}^{loc}(R^+),$$

где  $(D_t u)^0 = D(\nu \rho^0 D u^0 - p(\eta^0)) + g|_{t=0}$  — начальное ускорение газа, то

$$\|D_t u\|_{W_2^{(1,2)}(Q)} \leq K(N).$$

3. Если выполнены условия п.2 и

$$\|D^2(D_t u)^0\|_{L_2(0,X)} + \|D_t^2 g\|_{L_2^{(1,2)}(Q)} \leq N,$$

то

$$|D_t^2 u| + \|D_t^2 u\|^{(1/2,0)} \leq K(N).$$

**СЛЕДСТВИЕ 1.** В условиях теоремы Кажихова для  $2 \leq q \leq \infty$  из  $\|D\eta^0\|_{L_q(0,X)} + \|I_t g\|_{L_{\infty,q}(Q)} \leq N$  вытекает оценка

$$\|D\eta\|_{L_{\infty,q}(Q)} \leq K(N).$$

**СЛЕДСТВИЕ 2.** В условиях п.1 для  $2 \leq q \leq \infty$ ,  $1 \leq r \leq 2/(0.5 - q^{-1})$  из  $\|D\eta^0\|_{L_q(0,X)} + \|g\|_{L_{r,q}(Q)} \leq N$  вытекает оценка

$$\|D^2 u\|_{L_{r,q}(Q)} \leq K(N).$$

## РАЗНОСТНАЯ СХЕМА В ЛАГРАЖЕВЫХ МАССОВЫХ КООРДИНАТАХ

Разностное решение  $Z = (H, U)$  состоит из двух функций, задающих приближенно удельный объем и скорость газа. Функция  $H$  определена на сетке  $\bar{\omega}_\tau \times \omega_h^{1/2}$ , а  $U$  на сетке  $\bar{\omega}_\tau \times \omega_h$ . Семейство разностных схем, предложенное Амосовым А.А. и Злотником А.А., выглядит следующим образом

$$H_t = (U_x + \hat{U}_x), \quad (37)$$

$$U_t + P_x = (\nu \tilde{R}(U_x + \hat{U}_x))_x + G, \quad (38)$$

$$U_0 = U_M = 0, \quad H^n|_{n=0} = H^0, \quad U^n|_{n=0} = U^0. \quad (39)$$

Здесь  $\tilde{R}(\hat{H}, H) = \frac{\ln \hat{H} - \ln H}{\hat{H} - H}$  при  $\hat{H} \neq H$ , а  $\tilde{R}(\hat{H}, \hat{H}) = \frac{1}{\hat{H}}$ .

Вид сеточного давления  $P = P(\hat{H}, H)$  не зафиксирован и в дальнейшем достаточно произволен. Его выбор будет обсужден ниже.

Благодаря выбору аппроксимации  $\tilde{R}$  для плотности в уравнении (37) второе уравнение р.с. в силу формулы  $\tilde{H}_t = (\ln H)_t$  и первого уравнения р.с. допускает запись в виде

$$U_t = \nu (\ln H)_{xt} - P_x + G.$$

Эта запись играет существенную роль в исследовании свойств р.с.

## ФУНКЦИЯ СЕТОЧНОГО ДАВЛЕНИЯ

Эталонным служит сеточное давление

$$\tilde{P}(\hat{H}, H) = -\frac{E^0(\hat{H}) - E^0(H)}{\hat{H} - H}$$

при  $\hat{H} \neq H$ , а

$$\tilde{P}(\hat{H}, \hat{H}) = p(\hat{H}).$$

Заметим, что

$$\tilde{R} = \tilde{P},$$

если  $p(\eta) = \eta^{-1}$ .

Верны интегральные представления

$$\tilde{R}(\hat{H}, H) = \int_0^1 (H^{(\lambda)})^{-1} d\lambda, \quad \tilde{P}(\hat{H}, H) = \int_0^1 p(H^{(\lambda)}) d\lambda. \quad (40)$$

В качестве сеточного давления можно выбирать хорошо известные в литературе следующие функции  $P$ :

$$P_s(\hat{H}, H) = p\left(\frac{\hat{H} + H}{2}\right),$$

$$P_t(\hat{H}, H) = \frac{p(\hat{H}) + p(H)}{2},$$

$$P_S(\hat{H}, H) = \frac{p(\hat{H}) + 4p((\hat{H} + H)/2) + p(H)}{6},$$

представляющие собой квадратурные формулы для второго интеграла в (40).

Амосов и Злотник предложили еще несколько видов записи сеточного давления, а также общее условие, которое следует наложить на функцию давления, чтобы все доказанные для схемы результаты оставались верными.



## РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

Свойства разностной схемы (37)-(39) исследованы достаточно полно. Это исследование опирается на технику, разработанную в непрерывном случае, а также достаточно общие теоремы, использующиеся для доказательства разрешимости нелинейных задач.

Приведем лишь описания результатов без указания технических условий теорем.

**СВОЙСТВО 1.** Решение р.с. единственно при ограничении на максимальный шаг сетки по времени в зависимости от выбора  $P$ . Этого ограничения нет, если  $p'(\rho) > 0$ .

**СВОЙСТВО 2.** Решение р.с. существует, ограничено и  $H$  отделено от нуля при условии ограниченности начальных данных и правой части.

**СВОЙСТВО 3.** Решение р.с. устойчиво.

**СВОЙСТВО 4.** Для решения р.с. доказаны оценки погрешности, охватывающие случай негладких начальных данных и правой части.

**СВОЙСТВО 5.** Для поиска приближенного решения р.с. предложены метод простой итерации и метод Ньютона. Произведена оценка скорости сходимости этих методов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Попов А.В. Исследование конечно-разностного метода для системы уравнений одномерного движения вязкого теплопроводного газа в переменных Эйлера. Препринт ОВМ АН СССР, 1988, N 198.- 25 с.
2. Попов А.В., Жуков К.А. Неявная разностная схема для нестационарного движения вязкого баротропного газа. Вычислительные методы и программирование. т.14, 2013 г. N 2. с. 516-523.
3. Имранов Ф.Б., Кобельков Г.М., Соколов А.Г. О разностной схеме баротропного газа. Доклады РАН, т.478, 2018 г., N 4, 388-391.
4. Амосов А.А., Злотник А.А. Разностные схемы второго порядка точности для уравнений одномерного движения вязкого газа. ЖВМиМФ. т.27, 1987 г. N 7. с. 1032-1049.