

СПЕЦКУРС

1/2 года

кафедры вычислительной математики
механико-математического факультета МГУ

**МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ
МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**

лектор - доцент Попов Анатолий Вадимович

2025 г.

ТЕМА 6.

**Квазигазодинамические уравнения
и методы расчета вязких течений**

рабочий конспект

© Механико-математический факультет МГУ, 2025 г.
© А.В.Попов, 2025 г.

ИСТОРИЯ РОЖДЕНИЯ

Система квазигазодинамических уравнений, расширяющая возможности модели Навье-Стокса, впервые появилась в ходе исследований, выполненных в 80-х годах 20 века небольшой группой сотрудников Института прикладной математики АН СССР им. М.В.Келдыша под руководством чл.корр.РАН Б.Н.Четверушкина. Практически с самого начала активное участие в работе принимает проф. Т.Г.Елизарова. Эти уравнения отличались от классических уравнений динамики газа дополнительными слагаемыми, имеющими вид вторых пространственных производных. Новые модели сразу позволили построить эффективные численные алгоритмы решения уравнений Эйлера, а в последствии и уравнений Навье-Стокса. Эти алгоритмы в начале назывались **кинетически-согласованные разностные схемы**.

Позднее в работах проф. Ю.В.Шеретова квазигазодинамические уравнения были представлены в виде законов сохранения, детально исследованы и теоретически обоснованы. Кроме того, им была построена родственная этим уравнениям квазигидродинамическая система. Принципиальным и существенным отличием КГД подхода от теории Навье-Стокса явилось использование процедуры пространственно-временного осреднения для определения основных газодинамических величин — плотности, скорости и температуры. Дополнительное сглаживание по времени явилось причиной возникновения в уравнениях дополнительных диссипативных слагаемых, которые формально отличают КГД системы от системы Навье-Стокса.

ГРАНИЦЫ ПРИМЕНИМОСТИ

В стационарном случае обе КГД системы отличаются от уравнений Навье-Стокса и друг от друга дивергентными членами, имеющими формальные асимптотические порядки малости $O(Kn^2)$ при $Kn \rightarrow 0$, где Kn — число Кнудсена. Число Kn , названное в честь датского физика Мартина Кнудсена (1871-1949), характеризует степень разреженности газового потока. $Kn = \frac{\lambda}{L}$, где λ — средняя длина свободного пробега молекул в газе, а L — характерный размер течения (например, длина обтекаемого тела, диаметр трубопровода, диаметр свободной струи). Если $Kn \gg 1$ (теоретически возможно $Kn \rightarrow \infty$), то аэродинамические характеристики обтекаемых разреженным газом тел (или течение в вакуумных трубопроводах) можно рассчитывать, не рассматривая столкновений между собой, а учитывая лишь удары молекул о твердую поверхность (свободное молекулярное течение). Практически такие методы становятся применимы уже при $Kn \sim 1$. Если $Kn \ll 1$ (теоретически — при $Kn \rightarrow 0$), справедливо основное предположение гидромеханики о сплошности (континуальности) среды и при расчете течения можно пользоваться уравнениями Эйлера или уравнениями Навье-Стокса с соответствующими граничными условиями. Практически эти методы справедливы и используются при $Kn \sim 10^{-3}$.

Влияние добавочных членов для стационарных и квазистационарных газодинамических течений незначительно при малых числах Кнудсена. Квазистационарным называют течение жидкости или газа при малых числах Струхала: $Sh = L/(Vt) \ll 1$. Здесь L — характерный линейный размер тела, V — характерная скорость (обычно скорость набегающего потока), t — характерное время движения. Число названо по имени чешского ученого Винцента Стругала (1850-1923). Однако для сильно нестационарных течений, а также при числах Kn , близких к единице, их вклад становится существенным. Именно в этом классе задач следует искать преимущество КГД моделей. При численном моделировании дополнительные слагаемые проявляют себя как эффективные регуляризаторы.

Каждой из двух КГД систем соответствует свой способ решения проблемы замыкания. Квазигазодинамические уравнения следует использовать при моделировании течений идеального политропного газа, а квазигидродинамические — при исследовании движений газов и жидкостей с более общими уравнениями состояния.

Газ называется политропным, если внутренняя энергия является линейной функцией температуры

$$\varepsilon = c_V T.$$

ПРОЦЕДУРА ОСРЕДНЕНИЯ

Рассмотрим одноатомный газ, состоящий из достаточно большого числа N атомов-шариков радиуса r_0 и массы m_0 . В евклидовом пространстве R^3 выберем декартову систему координат (x_1, x_2, x_3) и время t .

Движение каждого атома может быть описано уравнениями механики Ньютона. Однако такой подход к моделированию задач газовой динамики оказывается очень далеким от практики, поскольку N очень велико. Кроме того, возникают проблемы с определением начальных условий задачи и последующим осреднением получающихся величин, которое необходимо для вычисления измеряемых величин — скорости, плотности и температуры среды.

В классической гидродинамике используется другой подход, основанный на переходе от большого числа отдельных частиц к сплошной среде с помощью процедур осреднения. Эти процедуры могут быть выбраны по-разному.

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ СРЕДНИЕ

В теории Навье-Стокса используются так называемые мгновенные пространственные средние, которые определяются следующим образом.

Пусть ΔV — объем шара радиуса R_V с центром в точке \mathbf{x} . Пусть атом находится в шаре, если его центр принадлежит этому шару. Пусть $N_{\Delta V}(t)$ — число молекул в объеме времени t . Определим плотность, средний импульс и среднюю энергию единицы объема как

$$\rho(t, \mathbf{x}) = \frac{m_0}{\Delta V} N_{\Delta V}(t), \quad (1)$$

$$\mathbf{I}(t, \mathbf{x}) = \rho \mathbf{u} = \frac{m_0}{\Delta V} \sum_{i=1}^{N_{\Delta V}(t)} \xi_i(t), \quad (2)$$

$$E(t, \mathbf{x}) = \rho \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + \varepsilon \right) = \frac{m_0}{\Delta V} \sum_{i=1}^{N_{\Delta V}(t)} \frac{\xi_i^2(t)}{2}, \quad (3)$$

где $\xi_i(t)$ — скорость i -ой частицы в момент времени t , m_0 — ее масса. В приведенных выражениях $\varepsilon = \varepsilon(t, \mathbf{x})$ — удельная внутренняя энергия. Введем температуру T , которая определяется из выражения

$$\varepsilon = c_v T, \quad (4)$$

где $c_v = c_p - R$ — удельная теплоемкость при постоянном объеме, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, $R = k_B/m_0 = R_*/M$ — газовая постоянная, $k_B = 1,38 \cdot 10^{-16}$ эрг/К — постоянная Больцмана, R_* — универсальная газовая постоянная, M — молекулярная масса газа, $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ — показатель адиабаты.

При изменении объема осреднения объема ΔV значения средних могут изменяться. Примем гипотезу о наличии двух масштабов R_{\max} и R_{\min} таких, что $R_{\max} \gg R_{\min}$ и при фиксированных \mathbf{x} и t при любом $R_{\max} > R_V > R_{\min}$ значения указанных средних практически постоянны и не зависят от ΔV . Тогда соответствующие средние назовем газодинамическими величинами — плотностью, импульсом и полной энергией.

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ СРЕДНИЕ

Определим пространственно-временные средние:

$$\rho(t, \mathbf{x}) = \frac{m_0}{\Delta V} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} N_{\Delta V}(\tilde{t}) d\tilde{t}, \quad (5)$$

$$\mathbf{I}(t, \mathbf{x}) = \rho \mathbf{u} = \frac{m_0}{\Delta V} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \left(\sum_{i=1}^{N_{\Delta V}(\tilde{t})} \xi_i(d\tilde{t}) \right) d\tilde{t}, \quad (6)$$

$$E(t, \mathbf{x}) = \rho \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + \varepsilon \right) = \frac{m_0}{\Delta V} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \left(\sum_{i=1}^{N_{\Delta V}(\tilde{t})} \frac{\xi_i^2(d\tilde{t})}{2} \right) d\tilde{t}. \quad (7)$$

Предположим, что помимо двух пространственных масштабов R_{\max} и R_{\min} , существуют также два временных масштаба $\Delta t_{\max} \gg \Delta t_{\min}$, таких, что при любом $\Delta t_{\max} > \Delta t > \Delta t_{\min}$ значения указанных средних практически постоянны и не зависят от ΔV и Δt . Характерные значения указанных масштабов связаны между собой как $\Delta t_{\max} \sim R_{\max}/c$, $\Delta t_{\min} \sim R_{\min}/c$, где c — скорость звука, определяющая скорость распространения возмущений в газе. Тогда соответствующие средние можно рассматривать как газодинамические величины — плотность, импульс и полную энергию.

Введение дополнительного сглаживания по времени при определении газодинамических величин представляется естественным по двум причинам.

1. В экспериментах измерение всех газодинамических величин осуществляется за конечное время, что автоматически приводит к сглаживанию по некоторому временному интервалу.
2. Число частиц в малом объеме ΔV с прозрачными границами естественным образом меняется на временах порядка $\Delta V/c$ за счет частиц, хаотическим образом пересекающих его границу.

При достаточно большом числе частиц в объеме осреднения ΔV пространственные и пространственно-временные средние могут быть очень близки, что соответствует эргодической гипотезе об идентичности мгновенных пространственных и пространственно-временных средних. Далее, чтобы различать эти средние, будем использовать индексы s и st .

УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ

В основу гидродинамики положен принцип сохранения массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} j_m = 0, \quad (8)$$

где j_m — вектор плотности потока массы. Интегральный вид уравнения неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_{\sigma} (j_m, \mathbf{n}) d\sigma = 0 \quad (9)$$

означает, что изменение массы в некотором замкнутом объеме V определяется потоком массы j_m , протекающим через его границу σ . **При этом при построении уравнения (8) определения газодинамических величин не используются!**

Для пространственных средних полагается, что плотность потока массы равна импульсу единицы объема

$$j_{ms} = \rho \mathbf{u}_s. \quad (10)$$

В этом случае уравнение (8) имеет вид

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \operatorname{div} (\mathbf{u}_s(t, \mathbf{x}) \rho_s(t, \mathbf{x})) = 0. \quad (11)$$

При использовании определений пространственно-временных средних уравнение (11) не выполняется! Покажем это. Проинтегрируем уравнение (11) по малому интервалу времени Δt . Тогда, согласно определению ρ_{st} , первое слагаемое примет вид

$$\frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \rho_s(\tilde{t}, \mathbf{x})}{\partial t} d\tilde{t} = \frac{\partial}{\partial t} \rho_{st}(t, \mathbf{x}).$$

Второе слагаемое (11) примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \operatorname{div} (\rho_s(\tilde{t}, \mathbf{x}) \mathbf{u}_s(\tilde{t}, \mathbf{x})) d\tilde{t} = \\ & \operatorname{div} \left(\frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} (\rho_s(\tilde{t}, \mathbf{x}) \mathbf{u}_s(\tilde{t}, \mathbf{x})) d\tilde{t} \right) \neq \operatorname{div} (\rho_{st}(\tilde{t}, \mathbf{x}) \mathbf{u}_{st}(\tilde{t}, \mathbf{x})), \end{aligned}$$

поскольку

$$\int_t^{t+\Delta t} \rho_s(\tilde{t}, \mathbf{x}) \mathbf{u}_s(\tilde{t}, \mathbf{x}) d\tilde{t} \neq \int_t^{t+\Delta t} \rho_s(\tilde{t}, \mathbf{x}) d\tilde{t} \cdot \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{u}_s(\tilde{t}, \mathbf{x}) d\tilde{t}.$$

Это отражает тот факт, что даже за малое время Δt мгновенные значения плотности и импульса единицы объема успевают измениться.

В этом случае выражение для плотности потока массы можно записать в более общем виде. Введем малую добавку к скорости, которую обозначим как ω_{st} , и запишем плотность потока массы как

$$j_{mst} = \rho_{st}(\mathbf{u}_{st} - \omega_{st}).$$

ТОЖДЕСТВО ЭЙЛЕРА-ЛИУВИЛЛЯ

Выделим в области течения ограниченный движущийся материальный объем $V = V(t)$ с гладкой поверхностью $\sigma = \sigma(t)$, ориентированной полем внешних нормалей \mathbf{n} . Будем считать, что объем $V(t)$ возникает из объема $V_0 = V(t_0)$, где t_0 — начальный момент времени, путем непрерывной деформации, обусловленной векторным полем \mathbf{v} . Тогда скорость изменения количества величины φ в объеме V (величина $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$ — некоторое скалярное или векторное поле) выражается известным тождеством Эйлера-Лиувилля

$$\frac{d}{dt} \int_V \varphi dV = \int_V [D\varphi + \varphi \operatorname{div} \mathbf{v}] dV = \int_V \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(\varphi \mathbf{v}) \right] dV, \quad (12)$$

где $D = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$ — дифференциальный оператор.

Пусть в каждой точке \mathbf{x} области течения в момент времени t определен вектор $j_m = j_m(\mathbf{x}, t)$, называемый плотностью потока массы. Пусть объем V_0 перемещается вдоль траекторий, определяемых векторным полем $\mathbf{v} = j_m/\rho$. Тогда тождество Эйлера-Лиувилля примет вид

$$\frac{d}{dt} \int_V \varphi dV = \int_V \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(\varphi j_m/\rho) \right] dV. \quad (13)$$

ПОСТУЛАТЫ МСС

I. Закон сохранения массы:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0. \quad (14)$$

II. Закон сохранения импульса:

$$\frac{d}{dt} \int_V (\rho \mathbf{u}) dV = \int_V (\rho \mathbf{F}) dV + \int_\sigma (\mathbf{n} \cdot P) d\sigma \quad (15)$$

— скорость изменения импульса в объеме V равна сумме приложенных к нему сил.

Первый интеграл в правой части (15) есть объемная сила, действующая со стороны внешнего поля; второй определяет силы давления и внутреннего вязкого трения, приложенные к поверхности σ . Величина $P = P(\mathbf{x}, t)$ называется тензором внутренних напряжений. Запись $(\mathbf{n} \cdot P)$ означает свертку (скалярное произведение) вектора \mathbf{n} и тензора второго ранга P , осуществляемую по первому индексу тензора P . Соответственно, $(P \cdot \mathbf{n})$ — свертка P и \mathbf{n} с участием второго индекса тензора P . В случае симметричного тензора P имеем $(\mathbf{n} \cdot P) = (P \cdot \mathbf{n})$.

III. Закон сохранения полной энергии:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + \varepsilon \right) dV = \int_V (j_m \cdot \mathbf{F}) dV + \int_\sigma (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) d\sigma - \int_\sigma (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) d\sigma. \quad (16)$$

Первый интеграл в правой части (16) равен мощности внешних массовых сил, приложенных к объему V ; второй интерпретируется как мощность поверхностных сил давления и внутреннего вязкого трения. Последний член в (16) описывает приток энергии в единицу времени через поверхность σ за счет процессов теплопроводности. Конкретные выражения для векторных полей $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t, \mathbf{x})$ и $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t, \mathbf{x})$ определяются применяемой моделью.

При необходимости выписываются еще два постулата в интегральной форме.

IV. Закон сохранения момента импульса.

V. Второй закон термодинамики — определяющий скорость изменения энтропии в объеме V .

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

При достаточной гладкости макроскопических параметров среды, как функций от временной и пространственных переменных, получаем дифференциальную систему уравнений

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} j_m = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \operatorname{div} (j_m \otimes \mathbf{u}) = \rho \mathbf{F} + \operatorname{div} P, \quad (18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + \varepsilon \right) \right] + \operatorname{div} \left[j_m \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + \varepsilon \right) \right] = (j_m \cdot \mathbf{F}) + \operatorname{div} \mathbf{A} - \operatorname{div} \mathbf{q}. \quad (19)$$

Здесь $j_m \otimes \mathbf{u}$ — тензор второго ранга, полученный в результате прямого произведения векторов j_m и \mathbf{u} . При вычислении дивергенции от тензора второго ранга свертка осуществляется по его первому индексу:

$$j_m \otimes \mathbf{u} = \begin{pmatrix} j_m^1 u_1 & j_m^2 u_1 & j_m^3 u_1 \\ j_m^1 u_2 & j_m^2 u_2 & j_m^3 u_2 \\ j_m^1 u_3 & j_m^2 u_3 & j_m^3 u_3 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{div} (j_m \otimes \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} j_m^1 u_1 + \frac{\partial}{\partial y} j_m^2 u_1 + \frac{\partial}{\partial z} j_m^3 u_1 \\ \frac{\partial}{\partial x} j_m^1 u_2 + \frac{\partial}{\partial y} j_m^2 u_2 + \frac{\partial}{\partial z} j_m^3 u_2 \\ \frac{\partial}{\partial x} j_m^1 u_3 + \frac{\partial}{\partial y} j_m^2 u_3 + \frac{\partial}{\partial z} j_m^3 u_3 \end{pmatrix}.$$

Добавив к системе (17)-(19) начальные условия

$$\rho|_{t=0} = \rho_0(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad T|_{t=0} = T_0(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \in V_0, \quad (20)$$

и граничные условия

$$\mathbf{u}|_{\sigma} = \mathbf{0}, \quad (j_m \cdot \mathbf{n})|_{\sigma} = 0, \quad (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n})|_{\sigma} = 0, \quad t \geq 0, \quad (21)$$

можно показать, что

$$\frac{dS(t)}{dt} \geq 0,$$

где $S(t) = \int_{V_0} \rho s d\mathbf{x}$ — полная термодинамическая энтропия. Из этого неравенства следует, что величина $S(t)$ является неубывающей функцией времени.

Система (17)-(19) не является замкнутой. Необходимо представить величины j_m , P , \mathbf{q} , \mathbf{A} как функции макроскопических параметров среды и их производных.

ЗАМЫКАНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

Рассмотрим случай идеального политропного газа, т.е. будем считать, что уравнение состояния задано в виде

$$p = \rho RT, \quad \varepsilon = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}.$$

Также как и в теории ньютоновских сред положим, что тензор напряжений P и работа сил давления и вязкого трения \mathbf{A} связаны с тензором вязких напряжений Π соотношениями вида:

$$P = \Pi - pI, \quad \mathbf{A} = (\Pi \cdot \mathbf{u}) - p \frac{j_m}{\rho},$$

где I — единичный тензор-инвариант второго ранга.

Замыкающие соотношения имеют вид

$$j_m = \rho(\mathbf{u} - \mathbf{w}),$$

$$P = -pI + \Pi = -pI + \Pi_{NS} + \\ + \tilde{\tau} \otimes [\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p - \rho\mathbf{F}] + \tilde{\tau}I[(\mathbf{u} \cdot \nabla)p + \gamma p \operatorname{div}\mathbf{u}],$$

$$\mathbf{q} = -\kappa\nabla T - \tilde{\tau}\rho\mathbf{u} \left[(\mathbf{u} \cdot \nabla)\varepsilon + p(\mathbf{u} \cdot \nabla) \left(\frac{1}{\rho} \right) \right],$$

где

$$\mathbf{w} = \frac{\tilde{\tau}}{\rho} [\operatorname{div}(\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p - \rho\mathbf{F}]$$

и

$$\Pi_{NS} = \mu \left[(\nabla \otimes \mathbf{u}) + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T - (2/3)I \operatorname{div}\mathbf{u} \right] + \zeta I \operatorname{div}\mathbf{u}$$

— тензор второго ранга, называемый навье-стоксовским тензором вязких напряжений. Верхним индексом T обозначена операция транспонирования.

Выше через $\tilde{\tau}$ обозначен некоторый малый коэффициент размерности времени, который в дальнейшем будем называть параметром релаксации, или сглаживания. При $\tilde{\tau} = 0$ приведенные выше выражения для j_m , P и \mathbf{q} вырождаются в соответствующие величины для уравнений Навье-Стокса. Способы нахождения $\tilde{\tau}$ будут обсуждаться далее.

Вектор \mathbf{A} записывается в следующем виде

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = & (\Pi_{NS} \cdot \mathbf{u}) - p(\mathbf{u} - \mathbf{w}) + \\ & + \tilde{\tau} \mathbf{u} \left[\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)p \right] + \tilde{\tau} \mathbf{u} [(\mathbf{u} \cdot \nabla)p + \gamma p \operatorname{div} \mathbf{u}]. \end{aligned}$$

КВАЗИГАЗОДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

Подставляя выписанные значения векторов и тензора вязких напряжений в общую систему законов сохранения, получим квазизагодинамическую систему в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} j_m = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(j_m \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \rho_* \mathbf{F} + \operatorname{div} \Pi, \quad (23)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + \varepsilon \right) \right] + \operatorname{div} \left[j_m \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) \right] + \operatorname{div} \mathbf{q} = (j_m \cdot \mathbf{F}) + \operatorname{div} (\Pi \cdot \mathbf{u}). \quad (24)$$

Здесь

$$\rho_* = \rho - \tilde{\tau} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u})$$

— приближенное значение плотности в точке $(t + \tilde{\tau}, \mathbf{x})$.

Эта система получена при предположении, что за некоторое физически бесконечно малое время мгновенные значения средней плотности, среднего импульса и энергии единицы объема успевают измениться и была предложена в середине 80-х годов в работах Б.Н.Четверушкина и Т.Г.Елизаровой. Второй способ замыкания системы законов сохранения предложен Ю.В.Шеретовым в конце 90-х годов при предположении, что за бесконечно малое время успевает измениться только мгновенное значение среднего импульса единицы объема, а изменениями мгновенных значений плотности и температуры можно пренебречь. Новая система получила название **квазигидродинамической**.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Выражение для плотности потока массы j_m включает в себя пространственную производную от давления

$$j_m = \rho \mathbf{u} - \tilde{\tau} [\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p - \rho \mathbf{F}].$$

Это делает уравнение неразрывности для обеих КГД систем уравнением второго порядка. Поэтому при постановке начально-краевой задачи для КГД систем требуется дополнительное по сравнению с системой Навье-Стокса граничное условие. Это дополнительное условие может быть получено из условий для вектора плотности потока массы j_m на границе.

Предположим, что граница представляет собой непроницаемую стенку и что внешняя сила равна нулю. Тогда условие непротекания массы

$$(j_m \cdot \mathbf{n}) = 0$$

и условия непротекания для скорости

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) = 0 \tag{25}$$

приводят к условию для давления на границе в виде

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0.$$

Из формул для вычисления тензора вязких напряжений и теплового потока для обеих КГД систем следует, что условие непротекания для скорости (25) приводит к тому, что пропорциональные $\tilde{\tau}$ дополнительные слагаемые в тепловом потоке и тензоре вязких напряжений обращаются в ноль, и для КГД систем на стенке выполняется условие

$$\Pi = \Pi_{NS}, \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}_{NS}.$$

Тем самым формулы для вычисления теплового потока и силы трения на твердой стенке для КГД уравнений совпадают с традиционными выражениями, полученными в рамках уравнений Навье-Стокса.

ВЕКТОР ПЛОТНОСТИ ПОТОКА МАССЫ

Формально во всех уравнениях КГД системы присутствуют дополнительные по сравнению с системой Навье-Стокса диссипативные слагаемые, представляющие собой вторые пространственные производные от плотности, скорости и давления, перед которыми стоит численный коэффициент $\tilde{\tau}$. При $\tilde{\tau} \rightarrow 0$ КГД уравнения переходят в уравнения Навье-Стокса.

Коэффициент $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}(\rho, T)$, названный параметром релаксации, или сглаживания, связан с включением в определение газодинамических величин осреднения по времени. Это дополнительное осреднение позволяет учесть влияние малых флуктуаций числа частиц в объеме ΔV , которым в классической гидродинамике пренебрегается. Величина параметра сглаживания может изменяться в широких пределах в зависимости от типа рассматриваемого течения.

Для определения величины параметра $\tilde{\tau}$ рассмотрим структуру вектора плотности потока массы j_m . Для определенности остановимся на квазигазодинамической системе уравнений для стационарного течения идеального политропного газа. В этом случае плотность потока массы вычисляется по формуле

$$j_m = \rho(\mathbf{u} - \mathbf{w}) = \rho\mathbf{u} - \tilde{\tau} [\text{div}(\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p - \rho\mathbf{F}].$$

Перегруппировав слагаемые и используя уравнение состояния идеального газа, получаем

$$j_m = \rho\mathbf{u} + \tilde{\tau}\rho\mathbf{F} - \tilde{\tau}RT\nabla\rho - \tilde{\tau}R\rho\nabla T - \tilde{\tau}\text{div}(\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}). \quad (26)$$

Первый член в правой части описывает плотность потока массы, связанного с конвективным движением газа. Второе слагаемое — поток, определяемый движением частиц во внешнем поле. Третье слагаемое — поток массы за счет самодиффузии. Четвертое слагаемое — так называемый термодиффузионный поток. Последнее слагаемое — вклад в поток массы за счет градиента скорости. В реальных течениях все эти потоки тесно связаны между собой и не могут быть разделены.

ПЛОТНОСТЬ ПОТОКА МАССЫ ЗА СЧЕТ САМОДИФФУЗИИ

Плотность потока массы за счет самодиффузии имеет вид

$$j_\rho = -D\nabla\rho.$$

Коэффициент самодиффузии D для многих сред хорошо известен из экспериментов с изотопами. В политропном газе коэффициент самодиффузии связан с коэффициентом самодиффузии как

$$D = \frac{\mu}{\rho Sc}, \quad (27)$$

где Sc — число Шмидта.

Число Шмидта — безразмерное число, показывающее соотношение интенсивностей диффузии импульса (то есть вязкость) и диффузии вещества, то есть характеризует относительную роль молекулярных процессов переноса количества движения и переноса массы диффузией. Оно является критерием подобия для течений жидкости, в которых наблюдаются одновременно как переносы вещества, так и вязкие эффекты.

По одной версии число было названо в честь немецкого инженера Эрнста Шмидта, по другой — в честь австрийского геофизика Вильгельма Матеуса Шмидта.

Число Шмидта равно отношению коэффициентов кинематической вязкости к коэффициенту диффузии вещества (или коэффициенту массопереноса). Оно также равно отношению толщин гидродинамического пограничного слоя и слоя массопереноса. Таким образом, его величина показывает, насколько импульс переносится эффективнее вещества.

В совершенных газах $Sc = 1$, в реальных газах оно может отличаться от 1 на десятки процентов. В жидкостях оно порядка 1000, в жидких металлах порядка 10. Совершенным газом называют газ с уравнением состояния Менделеева-Клайперона $P = R\rho T$ и имеющий постоянные удельные теплоемкости c_V и c_p .

Таким образом, число Шмидта в газе близко к единице и может быть получено как

$$Sc = \frac{5}{7 - \omega}.$$

Сравнивая коэффициент самодиффузии (27) и выражение для этого коэффициента в соответствующем члене формулы вектора плотности потока массы получаем, что для газа с уравнением Менделеева-Клайперона параметр релаксации равен

$$\tilde{\tau} = \frac{\mu}{p Sc}.$$

Таким образом, с точностью до числа Шмидта величина $\tilde{\tau}$ совпадает с так называемым максвелловским временем релаксации

$$\tilde{\tau}_m = \frac{\mu}{p},$$

то есть близка к среднему времени свободного пробега частиц в газе.

ПЛОТНОСТЬ ПОТОКА МАССЫ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Рассмотрим теперь второе слагаемое выражения для плотности потока массы. Если рассматривать каждую молекулу как броуновскую частицу, то плотность потока массы этих частиц можно связать с массовой плотностью внешних сил соотношением

$$j_{\mathbf{F}} = \rho b m_0 \mathbf{F},$$

где коэффициент b называется подвижностью молекулы. Подвижность молекулы связана с коэффициентом самодиффузии соотношением Эйнштейна

$$D = b k_B T.$$

Подставляя в выражение для плотности потока массы во внешнем поле подвижность молекулы через соотношение Эйнштейна, вновь приходим к формуле

$$\tilde{\tau} = \frac{\mu}{p S c}$$

для коэффициента релаксации $\tilde{\tau}$.

ПЛОТНОСТЬ ПОТОКА МАССЫ ТЕРМОДИФФУЗИОННОГО ПОТОКА

Термодиффузионный поток, который описывается четвертым слагаемым в формуле для плотности потока массы, представляется в виде

$$j_T = -\rho D \frac{k_T}{T} \nabla T,$$

где k_T — безразмерная величина, называемая термодиффузионным отношением, которое определяет связь коэффициентов термодиффузии D_T и самодиффузии D в виде $D_T = D k_T$.

Сопоставляя четвертое слагаемое и выражение для j_T , опять приходим к уже полученному нами ранее выражению для параметра релаксации с точностью до коэффициента k_T в виде

$$\tilde{\tau} = k_T \frac{\mu}{p S c}.$$

ВЫБОР ПАРАМЕТРА РЕЛАКСАЦИИ

В 2000 году Ю.В.Шеретов предложил общую формулу для вычисления параметра релаксации

$$\tilde{\tau} = \frac{\gamma}{Sc} \frac{\mu}{\rho c^2}. \quad (28)$$

При учете формулы Лапласа для скорости звука в газе

$$c^2 = \frac{\gamma p}{\rho},$$

выражение (28) преобразуется к формуле для $\tilde{\tau}$, приведенной ранее.

Для плотных газов и жидкостей величина параметра сглаживания, выбранная в соответствии с (28), оказывается весьма малой, и влиянием членов в КГД уравнениях, содержащих $\tilde{\tau}$, можно пренебречь. Например, для воздуха при температуре $T = 20^\circ C$, $\gamma = 1.4$, $Sc = 0.74$, $c = 3.4 \cdot 10^4$ см/сек, $\nu = \mu/\rho = 0.15$ см²/сек получаем $\tilde{\tau} = 2.45 \cdot 10^{-10}$ сек. Для воды при аналогичных условиях $\gamma = 1$, $Sc = 1$, $c = 1.45 \cdot 10^5$ см/сек, $\nu = 0.01$ см²/сек получается $\tilde{\tau} = 4.75 \cdot 10^{-13}$ сек.

Однако параметр сглаживания может быть достаточно большим в случаях

1. течений разреженного газа;
2. при описании быстропеременных и турбулентных течений.

При проведении расчетов слагаемые с коэффициентом $\tilde{\tau}$ могут использоваться как удобные и эффективные регуляризаторы для нахождения численного решения. При этом величина $\tilde{\tau}$ уже не связывается с молекулярными свойствами газа, а определяется шагом пространственной сетки и выбирается из условий сходимости и точности разностного решения задачи.

СЛУЧАЙ ОДНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В качестве примера численного решения КГД системы рассмотрим задачу с одной пространственной переменной в рамках уравнений Эйлера (т.е. в приближении невязкого нетеплопроводного газа) и отсутствии внешних сил. КГД уравнения в этом случае имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_m}{\partial x} = 0, \quad (29)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial j_m u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad (30)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial j_m H}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial(\Pi u)}{\partial x}. \quad (31)$$

Здесь E и H — полная энергия единицы объема и полная удельная энтальпия, которые вычисляются по формулам:

$$E = \frac{\rho u^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1}, \quad H = \frac{E + p}{\rho}.$$

Вектор плотности потока массы вычисляется как

$$j_m = \rho(u - w),$$

где

$$w = \frac{\tilde{\tau}}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p).$$

Компонента тензора вязких напряжений, входящая в систему уравнений, определяется как

$$\Pi = \frac{4}{3} \mu \frac{\partial u}{\partial x} + u \tilde{\tau} \left(\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \tilde{\tau} \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Вектор теплового потока q равен

$$q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} + \tilde{\tau} \rho u \left[\frac{u}{\gamma - 1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} \right) + p u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right].$$

Релаксационный параметр и коэффициенты вязкости и теплопроводности в безразмерном виде вычисляются как

$$\tilde{\tau} = \alpha \frac{h}{c}, \quad \mu = \tilde{\tau} \cdot p \cdot Sc, \quad \kappa = \frac{\tilde{\tau} \cdot p \cdot Sc}{Pr(\gamma - 1)}.$$

Отметим, что коэффициенты вязкости и теплопроводности пропорциональны параметру релаксации. Коэффициент α выбирается методом подбора и является величиной порядка единицы.

Коэффициент Pr — число Прандтля — один из критериев подобия тепловых процессов в жидкостях и газах, учитывает влияние физических свойств теплоносителя на теплоотдачу.

Для системы (29)-(31) ставятся следующие начальные условия

$$(\rho, u, p)|_{t=0} = (\rho_0, u_0, p_0). \quad (32)$$

СХЕМА ДЛЯ ОДНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Краевые условия для КГД систем требуют больше данных, чем для аналогичных задач, поставленных для системы Навье-Стокса. Фактически их корректная постановка требует отдельного рассмотрения для каждого типа решаемых задач. Поэтому для первоначального знакомства с разностной схемой будем считать, что она предназначена для задачи Коши в полуплоскости

$$Q = \{(t, x) \mid t \geq 0\}.$$

Введем равномерную сетку по координате x с шагом h , а также сетку с шагом τ по временной переменной. По координате x будем использовать также сетку с полуцелыми узлами. Для численного решения задачи (29)-(32) Б.Н.Четверушкиным и Т.Г.Елизаровой была предложена явная р.с. с центральными разностями и стандартной аппроксимацией вторых разностных производных. Чтобы не путать читателя изложим алгоритм, следуя книге Т.Г.Елизаровой. Поэтому для численного решения задачи будем использовать те же буквы, что и для дифференциального. Решение ищется в узлах сетки с целыми индексами по следующей схеме

$$\hat{\rho}_i = \rho_i - \frac{\tau}{h}(j_{m,i+1/2} - j_{m,i-1/2}), \quad (33)$$

$$\hat{\rho}_i \hat{u}_i = \rho_i u_i + \frac{\tau}{h}[(\Pi_{i+1/2} - \Pi_{i-1/2}) - (p_{i+1/2} - p_{i-1/2}) - (j_{m,i+1/2} u_{i+1/2} - j_{m,i-1/2} u_{i-1/2})], \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \hat{E}_i = E_i + \frac{\tau}{h} \left[(\Pi_{i+1/2} u_{i+1/2} - \Pi_{i-1/2} u_{i-1/2}) - (q_{i+1/2} - q_{i-1/2}) - \right. \\ \left. \left(\frac{j_{m,i+1/2}}{\rho_{i+1/2}} (E_{i+1/2} + p_{i+1/2}) - \frac{j_{m,i-1/2}}{\rho_{i-1/2}} (E_{i-1/2} + p_{i-1/2}) \right) \right], \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$p_i = (\gamma - 1) \left(E_i - \frac{\rho_i u_i^2}{2} \right), \quad (36)$$

$$j_{m,i+1/2} = \rho_{i+1/2} (u_{i+1/2} - w_{i+1/2}), \quad (37)$$

$$w_{i+1/2} = \frac{\tilde{\tau}_{i+1/2} \rho_{i+1} u_{i+1}^2 + p_{i+1} - \rho_i u_i^2 - p_i}{\rho_{i+1/2} h}, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{i+1/2} = \frac{4}{3} \mu \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + \tilde{\tau} u_{i+1/2} \left(\rho_{i+1/2} u_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + \frac{p_{i+1} - p_i}{h} \right) + \\ + \tilde{\tau} \left(u_{i+1/2} \frac{p_{i+1} - p_i}{h} + \gamma p \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right), \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} q_{i+1/2} = -\kappa \frac{T_{i+1} - T_i}{h} + \\ + \tilde{\tau} \rho_{i+1/2} u_{i+1/2} \left(\frac{u_{i+1/2} p_{i+1} / \rho_{i+1} - p_i / \rho_i}{\gamma - 1} + p_{i+1/2} u_{i+1/2} \frac{1/\rho_{i+1} - 1/\rho_i}{h} \right). \end{aligned} \quad (40)$$

Значения функций в полуцелых точках вычисляются в виде среднего арифметического значений в ближайших целых узлах

$$\rho_{i+1/2} = \frac{\rho_{i+1} + \rho_i}{2}, \quad p_{i+1/2} = \frac{p_{i+1} + p_i}{2}, \quad u_{i+1/2} = \frac{u_{i+1} + u_i}{2}. \quad (41)$$

СВОЙСТВА СХЕМЫ ДЛЯ ОДНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Предположим, что на n -ом временном шаге разностное решение схемы (33)-(35) найдено, т.е. известны функции ρ^n , E^n и u^n в целых точках. Тогда вычисление решения на $n + 1$ -ом слое ведется по формулам (33)-(41) в следующей последовательности: сначала вычисляются значения p^n , затем ищутся ρ^n , p^n и u^n в полуцелых точках, потом находятся значения Π^n , q^n , w^n , j_m^n и в конце по формулам схемы находятся значения функций ρ^{n+1} , E^{n+1} и u^{n+1} .

Отметим, что выбор ненулевого $\tilde{\tau}$ означает введение в разностные уравнения искусственной вязкости. Значение этого параметра зависит от коэффициента α

$$\tilde{\tau} = \alpha \frac{h}{c},$$

значение которого подбирается экспериментально для каждой задачи. Например, многочисленные численные эксперименты по расчету одной задачи о распаде сильного разрыва показали, что оптимальным с точки зрения точности и устойчивости являются значения $\alpha \approx 0.3$. При числах α близких к единице фронт разрыва сильно размывался, а при числах близких к нулю на границе разрыва появлялись сильные осцилляции.

В 2004 году Ю.В.Шеретов методом энергетических неравенств получил достаточное условие устойчивости типа Куранта для КГД алгоритма. Им рассматривалось одномерное течение в рамках уравнений Эйлера в акустическом приближении. Для одномерной по пространству разностной схемы с постоянным шагом h полученное условие устойчивости имеет вид

$$\tau \leq \beta \frac{h}{c_*},$$

где $c_* = \sqrt{\gamma R T_*}$ — средняя по пространству скорость звука в начальный момент времени. Коэффициент β равен

$$\beta = \min(\beta_A, \beta_B, \beta_C), \quad \text{где } \beta_A = \frac{A}{A^*}, \beta_B = \frac{B}{B^*}, \beta_C = \frac{C}{C^*}.$$

Значения A , B , C и A^* , B^* , C^* определяются величинами γ , Pr и α по формулам

$$A = \frac{\alpha}{\gamma}, \quad B = \frac{\alpha}{\gamma} \left(\frac{4}{3} + \gamma \right), \quad C = \frac{\alpha}{Pr(\gamma - 1)},$$

$$A^* = 2\gamma A^2 + 2(\gamma - 1)AC + \gamma A + B + \frac{1}{2\gamma},$$

$$B^* = 2B^2 + A + \frac{B}{\gamma} + \frac{(\gamma - 1)C}{\gamma} + \frac{1}{2},$$

$$C^* = (\gamma - 1)C(2A + 2C + 1).$$

КГД СИСТЕМА В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

В цилиндрических координатах в двумерном случае КГД система имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rj_{mr})}{\partial r} + \frac{\partial j_{mz}}{\partial z} = 0, \quad (42)$$

$$\frac{\partial(\rho u_r)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rj_{mr}u_r)}{\partial r} + \frac{\partial(j_{mz}u_r)}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r\Pi_{rr})}{\partial r} + \frac{\partial \Pi_{zr}}{\partial z} - \frac{\Pi_{\phi\phi}}{r}, \quad (43)$$

$$\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rj_{mr}u_z)}{\partial r} + \frac{\partial(j_{mz}u_z)}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r\Pi_{rz})}{\partial r} + \frac{\partial \Pi_{zz}}{\partial z}, \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rj_{mr}H)}{\partial r} + \frac{\partial(j_{mz}H)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rq_r)}{\partial r} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = \\ = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}[r(\Pi_{rr}u_r + \Pi_{rz}u_z)] + \frac{\partial}{\partial z}(\Pi_{zr}u_r + \Pi_{zz}u_z), \end{aligned} \quad (45)$$

где E — полная энергия единицы объема и H — полная удельная энтальпия:

$$E = \rho \frac{u_r^2 + u_z^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1}, \quad H = \frac{E + p}{\rho}, \quad p = \rho RT.$$

Здесь u_r и u_z — проекции скорости \mathbf{u} на оси r и z . Влияние внешних сил не учитывается.

Компоненты вектора плотности потока массы j_m вычисляются по формулам

$$j_{mr} = \rho(u_r - w_r), \quad j_{mz} = \rho(u_z - w_z),$$

где

$$\begin{aligned} w_r &= \frac{\tilde{\tau}}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\rho u_r^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_r u_z) + \frac{\partial p}{\partial r} \right], \\ w_z &= \frac{\tilde{\tau}}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\rho u_r u_z) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z^2) + \frac{\partial p}{\partial z} \right]. \end{aligned}$$

Компоненты тензора вязких напряжений Π выпишем в виде, удобном для программной реализации

$$\Pi_{rr} = \Pi_{rr}^{NS} + u_r w_r^* + R^*, \quad \Pi_{rr}^{NS} = 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{u},$$

$$\Pi_{rz} = \Pi_{rz}^{NS} + u_r w_z^*, \quad \Pi_{rz}^{NS} = \Pi_{zr}^{NS} = \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right),$$

$$\Pi_{zr} = \Pi_{zr}^{NS} + u_z w_r^*,$$

$$\Pi_{\phi\phi} = \Pi_{\phi\phi}^{NS} + R^*, \quad \Pi_{\phi\phi}^{NS} = 2\mu \frac{u_r}{r} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{u},$$

$$\Pi_{zz} = \Pi_{zz}^{NS} + u_z w_z^* + R^*, \quad \Pi_{zz}^{NS} = 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{u},$$

где Π_{rr}^{NS} , Π_{rz}^{NS} , Π_{zr}^{NS} , $\Pi_{\phi\phi}^{NS}$, Π_{zz}^{NS} — компоненты навье-стоксовского тензора напряжений. Величины w_r^* , w_z^* , R^* вычисляются по формулам

$$w_r^* = \tilde{\tau} \left[\rho u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \rho u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial r} \right],$$

$$w_z^* = \tilde{\tau} \left[\rho u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \rho u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} \right],$$

$$R^* = \tilde{\tau} \left[u_r \frac{\partial p}{\partial r} + u_z \frac{\partial p}{\partial z} + \gamma p \operatorname{div} \mathbf{u} \right],$$

а дивергенция вектора скорости равна

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Компоненты вектора теплового потока \mathbf{q} находятся по формулам

$$q_r = q_r^{NS} - u_r R^q, \quad q_z = q_z^{NS} - u_z R^q,$$

$$R^q = \tilde{\tau} \rho \left[\frac{u_r}{\gamma - 1} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \frac{u_z}{\gamma - 1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho} \right) + p u_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho} \right) + p u_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right],$$

где навье-стоксовские слагаемые задаются формулами

$$q_r^{NS} = -\kappa \frac{\partial T}{\partial r}, \quad q_z^{NS} = -\kappa \frac{\partial T}{\partial z}.$$

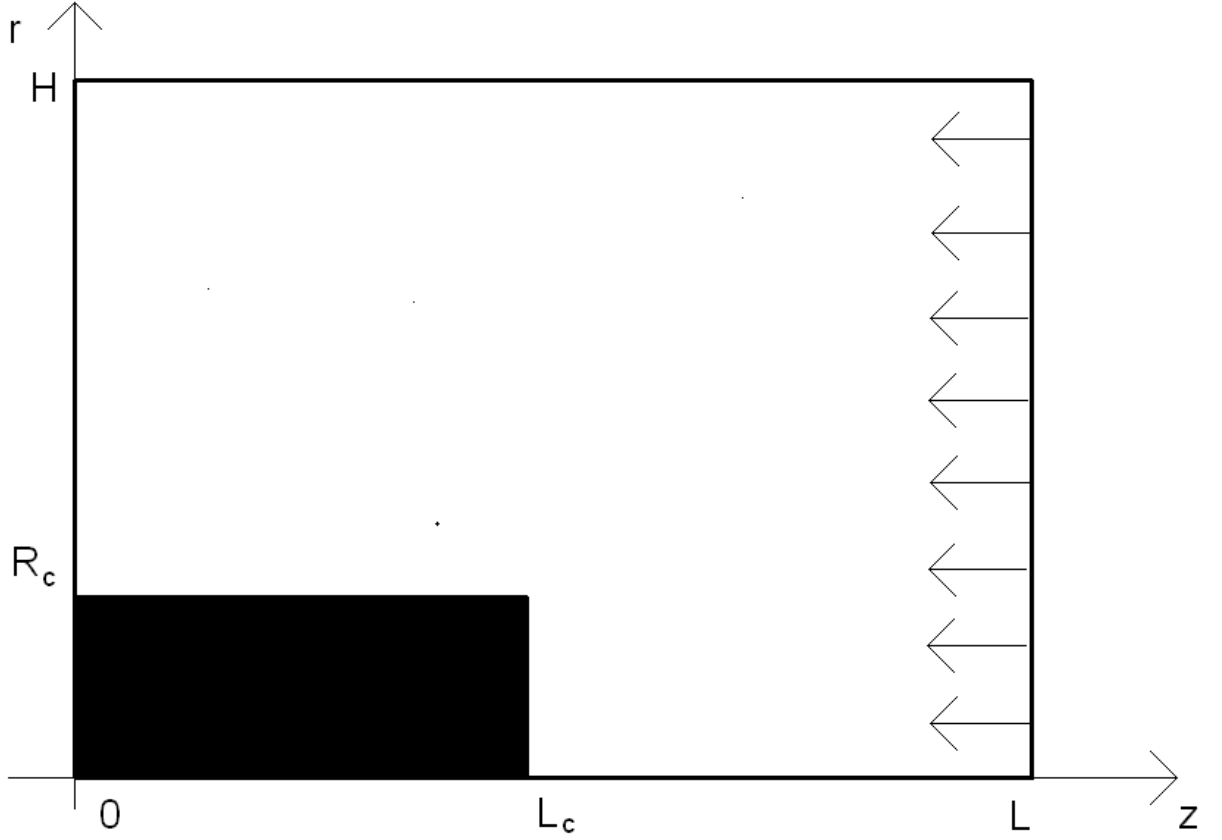


Рис. 1: расчетная область

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Постановка граничных условий определяется конкретной задачей. В качестве примера приведем вариант постановки граничных условий для задачи о сверхзвуковом течении газа в окрестности цилиндра в осесимметричной геометрии. Схема расчетной области изображена на рисунке 1.

Профиль течения на входной границе, расположенной в плоскости $z = L$ (вертикальная стенка), зададим в виде

$$\rho = \rho_\infty, \quad u_z = u_{z\infty}, \quad u_r = 0, \quad p = p_\infty.$$

На оси симметрии, совпадающей с осью z , поставим условия симметрии

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0, \quad u_r = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0.$$

На свободных границах, где предполагается, что газ вытекает из рассматриваемой области, поставим так называемые "мягкие" граничные условия, или условия "сноса". В этих условиях предполагается равенство нулю нормальных производных плотности,

давления и компонент скорости. Например, для границы $z = 0$ такие условия запишутся так

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u_r}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

Пусть одной из границ является непроницаемая твердая стенка. На твердой стенке можно поставить условия непротекания $u_n = 0$ и прилипания $u_t = 0$ или скольжения $\partial u_t / \partial n = 0$ для скорости, где u_n и u_t — соответственно нормальная и тангенциальная компоненты скорости течения. Эти условия следует дополнить граничным условием для температуры, которое определяется физическими условиями на твердой стенке.

В КГД системе уравнений вектор плотности потока массы вычисляется как

$$j_m = \rho(\mathbf{u} - \mathbf{w}) = \rho \mathbf{u} - \tilde{\tau} (\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p).$$

Для того, чтобы нормальная составляющая потока массы, протекающая через твердую границу и вычисляемая по этой формуле была равна нулю, условия непротекания для скорости необходимо дополнить условием для давления вида $\partial p / \partial n = 0$. Это соотношение представляет собой дополнительное условие, необходимое для замыкания КГД уравнений и отличающее постановку задачи в рамках КГД системы от постановки этой же задачи в рамках модели Навье-Стокса.

Для определенности на боковой поверхности $r = R_c$ в качестве граничных условий поставим условия прилипания для скорости, зададим постоянную температуру и будем полагать, что поверхность непроницаема. Тогда граничные условия запишутся следующим образом

$$u_z = 0, \quad u_r = 0, \quad T = T_0, \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0.$$

Выпишем выражения для теплового потока и силы трения на границе с условием непротекания $u_n = 0$. Пусть граница расположена в плоскости $z = L_c$ (торец цилиндра). Сила трения на этой границе определяется компонентой тензора вязких напряжений Π_{zr} , а тепловой поток q_z равен

$$q_z = q_z^{NS} - u_z R^q,$$

$$\Pi_{zr} = \Pi_{zr}^{NS} + \tilde{\tau} \left[\rho u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \rho u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial r} \right].$$

С учетом условия непротекания на стенке ($u_z = 0$), сразу получаем выражение для теплового потока и коэффициента трения на стенке в виде

$$q_z = q_z^{NS} = -\kappa \frac{\partial T}{\partial z},$$

$$\Pi_{zr} = \Pi_{zr}^{NS} = \mu \frac{\partial u_r}{\partial z}.$$

То есть для КГД уравнений выражения для теплового потока и силы трения на стенке совпадают с соответствующими величинами для уравнений Навье-Стокса.

БЕЗРАЗМЕРНЫЙ ВИД УРАВНЕНИЙ

Для численного решения уравнений газовой динамики удобно записывать их в безразмерном виде. Это позволяет оперировать при расчетах величинами порядка единицы и выделить в уравнениях безразмерные коэффициенты, от которых зависит решение задачи — так называемые параметры подобия.

Проведем обезразмеривание системы на примере обтекания цилиндра. В качестве основных размерных параметров выберем линейный размер R_c (радиус цилиндра), плотность ρ_∞ и c_∞ — плотность и скорость звука набегающего невозмущенного потока.

Запишем соотношения между размерными и безразмерными величинами, обозначая безразмерные величины знаком * .

$$\rho = \rho^* \rho_\infty, \quad u = u^* c_\infty, \quad c = c^* c_\infty, \quad p = p^* \rho_\infty c_\infty^2,$$

$$x = x^* R_c, \quad t = t^* \frac{R_c}{c_\infty},$$

$$T = \frac{p}{R\rho} = \frac{p^* \rho_\infty c_\infty^2}{R \rho^* \rho_\infty} = \frac{p^* \gamma}{\rho^*} \frac{1}{R \gamma} c_\infty^2 = T^* \frac{c_\infty^2}{\gamma R}.$$

Введем числа Маха и Рейнольдса

$$Ma_\infty = \frac{u_\infty}{c_\infty}, \quad Re_\infty = \frac{\rho_\infty u_\infty R_c}{\mu u_\infty}.$$

Выражение полной энергии через безразмерные величины остается прежним

$$E^* = \frac{\rho^* u^{*2}}{2} + \frac{p^*}{\gamma - 1}.$$

При обезразмеривании скорость звука преобразуется как

$$c = \sqrt{\gamma R T} \quad \Rightarrow \quad c^* = \sqrt{T^*}.$$

Уравнение состояния:

$$p = \rho R T, \quad p^* \rho_\infty c_\infty^2 = \rho^* \rho_\infty T^* \frac{c_\infty^2}{\gamma R} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{\rho^* T^*}{\gamma}.$$

Подставляя эти соотношения в уравнения, убеждаемся, что обезразмеривание не меняет внешний вид системы. При этом безразмерные коэффициенты вязкости, теплопроводности и параметр $\tilde{\tau}$ вычисляются как

$$\mu^* = \frac{Ma}{Re} T^{*\omega}, \quad \kappa^* = \frac{1}{(\gamma - 1) Pr} \frac{Ma}{Re} T^{*\omega}, \quad \tilde{\tau}^* = \frac{Ma}{Re Sc} \frac{T^{*\omega}}{p^*}.$$

Далее, используя безразмерные КГД уравнения и уравнения связи, знак * будем опускать.

ПРИМЕР РАСЧЕТНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим течение одноатомного газа твердых сфер со следующими параметрами:

$$\gamma = 5/3, \quad Pr = 2/3, \quad Re = 1000, \quad Sc = 0.77, \quad \omega = 0.5.$$

В качестве начальных условий используем параметры набегающего потока

$$\rho|_{t=0} = \rho_\infty, \quad u_z|_{t=0} = -U_\infty, \quad u_r|_{t=0} = 0, \quad p|_{t=0} = p_\infty.$$

После введения безразмерных величин, эти параметры равны

$$\rho_\infty = 1, \quad U_\infty = -Ma, \quad p_\infty = 1/\gamma.$$

На правой границе ($z = L$, $0 < r < H$) задаются параметры набегающего потока

$$\rho = 1, \quad u_z = -Ma, \quad u_r = 0, \quad p = 1/\gamma.$$

На оси симметрии ($r = 0$, $L_c < z < L$) — "условия симметрии"

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0, \quad u_r = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0.$$

На торце цилиндра ($z = L_c$, $0 < r < R_c$) — "условия скольжения" для скорости

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u_r}{\partial z} = 0, \quad u_z = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

На боковой поверхности цилиндра ($r = R_c$, $0 < z < L_c$) — "условие прилипания" для скорости

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = 0, \quad u_z = 0, \quad u_r = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0.$$

На левой выходной и верхней свободной границах ставятся так называемые "мягкие" граничные условия, то есть предполагается равенство нулю нормальных производных плотности, давления и компонент скорости.

Выходная граница ($z = 0$, $R_c < r < H$)

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u_r}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Свободная граница ($r = H$, $0 < z < L$)

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial u_r}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0.$$

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

$$\rho_t + \frac{1}{r}(\rho_{s_r}(r_{s_r}u_{s_r}^r - (r\omega^r)_{s_r}))_{\bar{r}} + (\rho_{s_z}(u^z - \omega^z)_{s_z})_{\bar{z}} = 0, \quad (46)$$

$$\begin{aligned} (\rho u^r)_t + \frac{1}{r}(\rho_{s_r}(r_{s_r}u_{s_r}^r - (r\omega^r)_{s_r}))u_{s_r}^r_{\bar{r}} + (\rho_{s_z}(u^z u_{s_z}^r - (\omega^z u^r)_{s_z}))_{\bar{z}} + p_{s_r \bar{r}} = \\ = \frac{1}{r}(r_{s_r} \Pi^{rr})_{\bar{r}} + (\Pi^{zr})_{\bar{z}} - \frac{\Pi^{\varphi\varphi}}{r}, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} (\rho u^z)_t + \frac{1}{r}(\rho_{s_r}(r_{s_r}u_{s_r}^r - (r\omega^r)_{s_r}))u_{s_r}^z_{\bar{r}} + (\rho_{s_z}((u_{s_z}^z)^2 - (\omega^z u^z)_{s_z}))_{\bar{z}} + p_{s_r \bar{r}} = \\ = \frac{1}{r}(r_{s_r} \Pi^{rz})_{\bar{r}} + (\Pi^{zz})_{\bar{z}}, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} E_t + \frac{1}{r}(\rho_{s_r}(r_{s_r}u_{s_r}^r - (r\omega^r)_{s_r}))H_{s_r}_{\bar{r}} + (\rho_{s_z}(u^z H_{s_z} - (\omega^z H)_{s_z}))_{\bar{z}} + \frac{1}{r}(r_{s_r} q_{s_r}^r)_{\bar{r}} + q_{s_z \bar{z}}^z = \\ = \frac{1}{r}(r_{s_r} \Pi^{rr} u_{s_r}^r)_{\bar{r}} + \frac{1}{r}(r_{s_r} \Pi^{rz} u_{s_r}^z)_{\bar{r}} + (\Pi^{zr} u_{s_z}^r)_{\bar{z}} + (\Pi^{zz} u_{s_z}^z)_{\bar{z}}. \end{aligned} \quad (49)$$

Аппроксимации для компонент тензора вязких напряжений Π выписываются аналогично.

К системе (46)-(49) добавляются начальные и граничные условия.

ФИКТИВНЫЕ ТОЧКИ

Для единообразного вычисления газодинамических величин во всех внутренних точках расчетной области, включая приграничные узлы, вводится система фиктивных ячеек, примыкающих к каждой из границ. При этом граница области располагается в полупространстве. Значения плотности, компонент скорости и давления в фиктивных ячейках задаются таким образом, чтобы аппроксимировать соответствующее граничное условие.

Пусть, например, на границе, расположенной в точке $i = 1/2$, задано значение функции f_ω . Точка $i = 0$ является фиктивной, а точка $i = 1$ — ближайшей прилегающей к границе внутренней точкой, значение в которой вычисляется на каждом временном слое. Тогда f_0 в фиктивной точке выбирается из условия

$$f_\omega = \frac{f_0 + f_1}{2} \quad \Rightarrow \quad f_0 = 2f_\omega - f_1.$$

Если на границе задано условие на производную вида $\partial f / \partial n = 0$, то f_0 в фиктивной точке равно

$$\frac{f_0 - f_1}{h} = 0 \quad \Rightarrow \quad f_0 = f_1.$$

Таким образом, алгоритм нахождения плотности, компонент скорости и давления на каждом временном слое состоит из двух этапов. Сначала на основе вычисленных значений заполняются фиктивные ячейки по указанному выше правилу, а затем вычисляются по формулам (46)-(49) значения неизвестных функций во всех внутренних точках на следующем временном слое.

ВВЕДЕНИЕ ИСКУССТВЕННОЙ ДИССИПАЦИИ

При численном моделировании газодинамических течений возникают различные особенности решения, например, разрывы решения — ударные волны и контактные разрывы, пограничные слои и другие зоны с большими градиентами параметров. В этих случаях оказывается невозможным провести расчет непосредственно по разностным схемам, полученным центрально-разностными аппроксимациями исходных уравнений.

Известным способом расчета ударной волны без явного выделения на сетке ее фронта является метод "размазывания" фронта за счет введения в систему разностных уравнений диссипативных членов, называемых псевдовязкостью или искусственной вязкостью.

Вводимые добавки моделируют действие реальной вязкости, то есть приводят к диссипации кинетической энергии. Например, хорошо известны добавки к давлению вида

$$p \rightarrow p + \omega,$$

где величина ω интерпретируется как искусственная вязкость. Наиболее часто рассматривается линейная вязкость

$$\omega = -\nu\rho\frac{\partial u}{\partial x},$$

или квадратичная вязкость

$$\omega = -\nu\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2.$$

Здесь ν — некоторый коэффициент, пропорциональный шагу пространственной сетки h . При решении задач газовой динамики для политропного газа, теплопроводность которого равна нулю, используется вязкость Неймана-Рихтмайера, где

$$\nu = \frac{h}{V} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|.$$

Таким образом, искусственная вязкость представляет собой некоторый регуляризатор, позволяющий осуществить сквозной расчет ударных волн или других особенностей решения без явного их выделения на сетке. Под областью фронта в этом случае понимается зона резкого изменения параметров течения. При расчете ударных волн ширина ударного перехода, обусловленная действием псевдовязкости, пропорциональна h и не имеет никакого отношения к реальной ширине фронта волны, которая составляет несколько длин свободного пробега молекул.

ИСКУССТВЕННАЯ ВЯЗКОСТЬ В КГД УРАВНЕНИЯХ

В алгоритмах, основанных на КГД уравнениях, в качестве регуляризатора выступают слагаемые, пропорциональные коэффициенту $\tilde{\tau}$.

Для обеспечения устойчивости КГД алгоритма в формулу для вычисления релаксационного параметра $\tilde{\tau}$ вводится добавка, пропорциональная шагу пространственной сетки. Эта добавка определяет дополнительную искусственную диссипацию. Безразмерный коэффициент $\tilde{\tau}$ вычисляется как:

$$\tilde{\tau} = \frac{Ma}{Re} \frac{T^\omega}{p Sc} + \alpha \frac{h}{c}, \quad (50)$$

где α — численный коэффициент порядка единицы, который определяется подбором. Для выписанной выше схемы в цилиндрических координатах

$$h = \sqrt{h_z^2 + h_r^2}.$$

Коэффициенты динамической вязкости μ и теплопроводности κ вычисляются через релаксационный параметр $\tilde{\tau}$ как

$$\mu = \tilde{\tau} p Sc, \quad \kappa = \tilde{\tau} \frac{p Sc}{Pr(\gamma - 1)}.$$

Таким образом, стабилизирующая добавка $\alpha h/c$ включается в μ и κ , а следовательно, и в выражения для теплового потока и силы трения на границе.

Исходя из (50) сеточную вязкость можно считать малой, когда

$$\alpha h < \frac{Ma}{Re} \frac{T^{\omega+1/2}}{p}.$$

Введение искусственной диссипации, пропорциональной шагу сетки h , делает результирующую разностную схему схемой первого порядка точности по пространству.

ЛИТЕРАТУРА

1. Елизарова Т.Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007.
2. Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. Москва-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2009.
3. Шеретов Ю.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь: Тверской госуниверситет, 2016.