

**СПЕЦКУРС**

1/2 года

кафедры вычислительной математики  
механико-математического факультета МГУ

**МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ  
НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ  
МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**

лектор - доцент Попов Анатолий Вадимович

**2025 г.**

ТЕМА 5.

**Схема Годунова**

рабочий конспект

© Механико-математический факультет МГУ, 2025 г.

© А.В.Попов, 2025 г.

## СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Система дифференциальных уравнений, описывающая нестационарное одномерное движение газа, выглядит следующим образом

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(p + \rho u^2)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho(\varepsilon + u^2/2)}{\partial t} + \frac{\partial[\rho u(\varepsilon + u^2/2) + pu]}{\partial x} &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

В систему (1) входят четыре неизвестные функции  $\rho$  (плотность),  $u$  (скорость),  $p$  (давление) и  $\varepsilon$  (внутренняя энергия), поэтому она должна быть дополнена еще одним уравнением. Это уравнение определяется термодинамическими связями. Для определенности будем рассматривать двучленное уравнение состояния

$$\varepsilon(p, \rho) = \frac{p - c_0^2(\rho - \rho_0)}{(\kappa - 1)\rho},\tag{2}$$

где величины  $\rho_0$  и  $c_0$  некоторые постоянные, а величина  $\kappa$  называется показателем адиабаты. При  $c_0 = 0$  двучленное уравнение состояния превращается в уравнение состояния идеального газа.

Уравнением состояния (2) можно пользоваться при изучении процессов, происходящих в воде, а также в металлах при высоких давлениях.

## ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТОЖДЕСТВА

Проинтегрировав уравнения, входящие в систему газовой динамики (1), по любой подобласти  $\Omega$  с границей  $\gamma$ , где решение состоит из гладких функций, получаем интегральные тождества

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \rho dx - \rho u dt &= 0, \\ \oint_{\gamma} \rho u dx - (p + \rho u^2) dt &= 0, \\ \oint_{\gamma} \rho (\varepsilon + u^2/2) dx - [\rho u (\varepsilon + u^2/2) + pu] dt &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Эти тождества являются математическим выражением основных законов физики — законов сохранения массы, импульса и энергии. Естественно считать, что они должны быть выполнены на любых функциях  $\rho(t, x)$ ,  $u(t, x)$ ,  $p(t, x)$ ,  $\varepsilon(t, x)$ , описывающих реальные газовые течения, а не только на достаточно гладких функциях.

В реальных потоках встречаются поверхности, на которых физические величины меняются скачком. Это ударные волны и контактные разрывы. Из интегральных законов сохранения (3) вытекают соотношения, связывающие величины по обе стороны разрыва. Эти условия носят название условий на ударных волнах. Часто их называют условиями Гюгонио

$$\begin{aligned} [\rho]D - [\rho u] &= 0, \\ [\rho u]D - [p + \rho u^2] &= 0, \\ [\rho(\varepsilon + u^2/2)]D - [\rho u(\varepsilon + u^2/2) + pu] &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где  $D = \frac{dx}{dt}$  — скорость движения линии разрыва.

## ЗНАМЕНИТАЯ ОШИБКА РИМАНА

Важно отметить, что не всякий закон сохранения, выполненный на гладких решениях, будет выполнен и на разрывных. Приведем поучительный пример.

Если уравнения газовой динамики (1) с уравнением состояния  $\varepsilon = \varepsilon(\rho, S)$  умножить соответственно на множители

$$-\frac{\varepsilon + \rho\varepsilon_\rho - u^2/2}{\varepsilon_S}, \quad -\frac{u}{\varepsilon_S}, \quad \frac{1}{\varepsilon_S}$$

и сложить, то получим

$$\begin{aligned} & -\frac{\varepsilon + \rho\varepsilon_\rho - u^2/2}{\varepsilon_S} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \right\} - \frac{u}{\varepsilon_S} \left\{ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(p + \rho u^2)}{\partial x} \right\} + \\ & + \frac{1}{\varepsilon_S} \left\{ \frac{\partial \rho(\varepsilon + u^2/2)}{\partial t} + \frac{\partial[\rho u(\varepsilon + u^2/2) + pu]}{\partial x} \right\} \equiv \frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u S)}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Если  $\rho(t, x)$ ,  $u(t, x)$ ,  $S(t, x)$  — гладкие функции, то отсюда следует, что по любому контуру  $\gamma$

$$\oint_{\gamma} \rho S dx - \rho u S dt = 0. \quad (6)$$

Это закон сохранения энтропии, который выполнен на гладких решениях уравнений газовой динамики.

При создании первой математической теории ударных волн (еще до их экспериментального открытия) Риман положил в основу своей теории закон сохранения энтропии на разрывах. Но при этом ему пришлось не учитывать закон сохранения энергии. Эта знаменитая ошибка Римана была исправлена Рэкином и Гюгонио. Оказалось, что закон сохранения энтропии на разрывах не выполняется. При прохождении элемента среды через разрыв энтропия в нем возрастает. Вместо закона сохранения энтропии (6) мы должны считать, что имеет место закон ее неубывания

$$\oint_{\gamma} \rho S dx - \rho u S dt \leq 0. \quad (7)$$

Интегрирование в контурном интеграле подразумевается против часовой стрелки. Контур  $\gamma$  теперь можно считать произвольным (захватывающим и участки разрыва).

Таким образом, на любых кусочно-непрерывных функциях  $\rho(t, x)$ ,  $u(t, x)$ ,  $S(t, x)$ ,  $p(t, x)$ ,  $\varepsilon(t, x)$ , описывающих течения газов, для любого контура должны быть выполнены интегральные законы сохранения (3) и условие (7).

## ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ

Строгое математическое обоснование однозначной разрешимости системы уравнений газовой динамики на сегодняшний день отсутствует, но многочисленные исследования позволили установить условия на функцию состояния, которые считаются необходимыми и достаточными для однозначной разрешимости задачи Коши для этой системы, решение которой понимается в виде функций, удовлетворяющих интегральным условиям (3), выражающим сохранение массы, импульса и энергии, и условию (7) неубывания энтропии.

Пусть уравнение состояния задано в виде функции

$$\varepsilon = \varepsilon(V, S), \quad (8)$$

где  $V = 1/\rho$  — удельный объем, называемой термодинамическим потенциалом, поскольку в силу термодинамического тождества

$$d\varepsilon + p dV = T dS$$

могут быть вычислены давление  $p$  и абсолютная температура  $T$  через параметры  $V, S$  по формулам

$$p = p(V, S) = -\frac{\partial \varepsilon(V, S)}{\partial V},$$

$$T = T(V, S) = \frac{\partial \varepsilon(V, S)}{\partial S}.$$

К настоящему времени считается установленным, функция (8) должна быть выпуклой. Условие выпуклости этой функции состоит в положительной определенности матрицы ее вторых производных, т.е. выполнении условий

$$\varepsilon_{VV} > 0, \quad \varepsilon_{VV}\varepsilon_{SS} - \varepsilon_{VS}^2 > 0. \quad (9)$$

Кроме того, функция  $\varepsilon = \varepsilon(V, S)$  должна удовлетворять дополнительным ограничениям, предложенным Бете и Вейлем

$$\varepsilon_{VS} < 0, \quad \varepsilon_{VVV} < 0.$$

При распаде разрыва в газе, у которого условия Бете-Вейля не выполнены, была обнаружена неединственность решения задачи Коши. Непосредственным дифференцированием можно убедиться, что двучленное уравнение состояния, а следовательно и уравнение состояния идеального газа, удовлетворяют неравенствам Бете-Вейля.

Заметим, что условие неубывания энтропии также является необходимым для единственности решения даже в случае идеального газа.

## РАСПАД РАЗРЫВА

Будем рассматривать среду (газ, жидкость, металл), для которой термодинамические величины: давление  $p$ , плотность  $\rho$ , внутренняя энергия единицы массы  $\varepsilon$  — подчиняются двучленному уравнению состояния

$$\varepsilon = \frac{p + \kappa p_0}{(\kappa - 1)\rho} - \frac{c_0^2}{\kappa - 1}, \quad (10)$$

где  $p_0 = \frac{\rho_0 c_0^2}{\kappa}$ ,  $\kappa$ ,  $\rho_0$ ,  $c_0$  — некоторые постоянные величины. Идеальный газ является частным случаем:  $c_0 = 0$ .

Предположим, что в начальный момент времени  $t = 0$  для точек с координатой  $x < 0$  среда характеризуется значениями параметров  $p_I$ ,  $\rho_I$ ,  $u_I$ , а для точек с  $x > 0$  — значениями  $p_{II}$ ,  $\rho_{II}$ ,  $u_{II}$ . Здесь  $u$  — компонента вектора скорости в направлении координаты  $x$  (другие ее компоненты равны нулю).

Важно отметить, что значения величин  $p_I$ ,  $\rho_I$ ,  $u_I$  и  $p_{II}$ ,  $\rho_{II}$ ,  $u_{II}$  могут быть совершенно произвольными. Между тем мы знаем, что на поверхности разрывов, которые могут существовать в качестве устойчивых многообразий, должны соблюдаться условия Рэнкина-Гюгонио (4). Поэтому очевидно, что в случае, если в начальном разрыве эти необходимые условия не выполнены, он не может существовать как таковой и должен распадаться на несколько разрывов, которые с течением времени будут отходить друг от друга. Общее исследование вопроса о поведении распада разрыва было дано Н.Е.Кочиным в 1924 г. и излагается во всех серьезных курсах МСС.

Схематически автомоделная картина возникающего течения на плоскости  $x, t$  изображается одной из пяти возможных конфигураций. Первые четыре из них содержат контактный разрыв КР, отмеченный штриховой линией, на которой испытывает скачок плотность, а давление и поперечная компонента скорости непрерывны. Их одинаковые постоянные значения в областях слева и справа от КР обозначим  $P$  и  $U$ , а различные значения плотности и, следовательно, внутренней энергии,  $R_I$ ,  $E_I$  — для левой и  $R_{II}$ ,  $E_{II}$  — для правой области. В свою очередь, эти области отделены от невозмущенных областей с параметрами  $(p_I, \rho_I, u_I)$  слева и  $(p_{II}, \rho_{II}, u_{II})$  справа либо ударной волной УВ, либо волной разрежения ВР, которые далее для краткости будем условно называть "правой" и "левой". Последняя конфигурация представляет предельный случай, когда в результате "разлета" образуется область вакуума, в которой плотность падает до значения  $\rho = 0$  в двух волнах разрежения, примыкающих к области вакуума справа и слева.

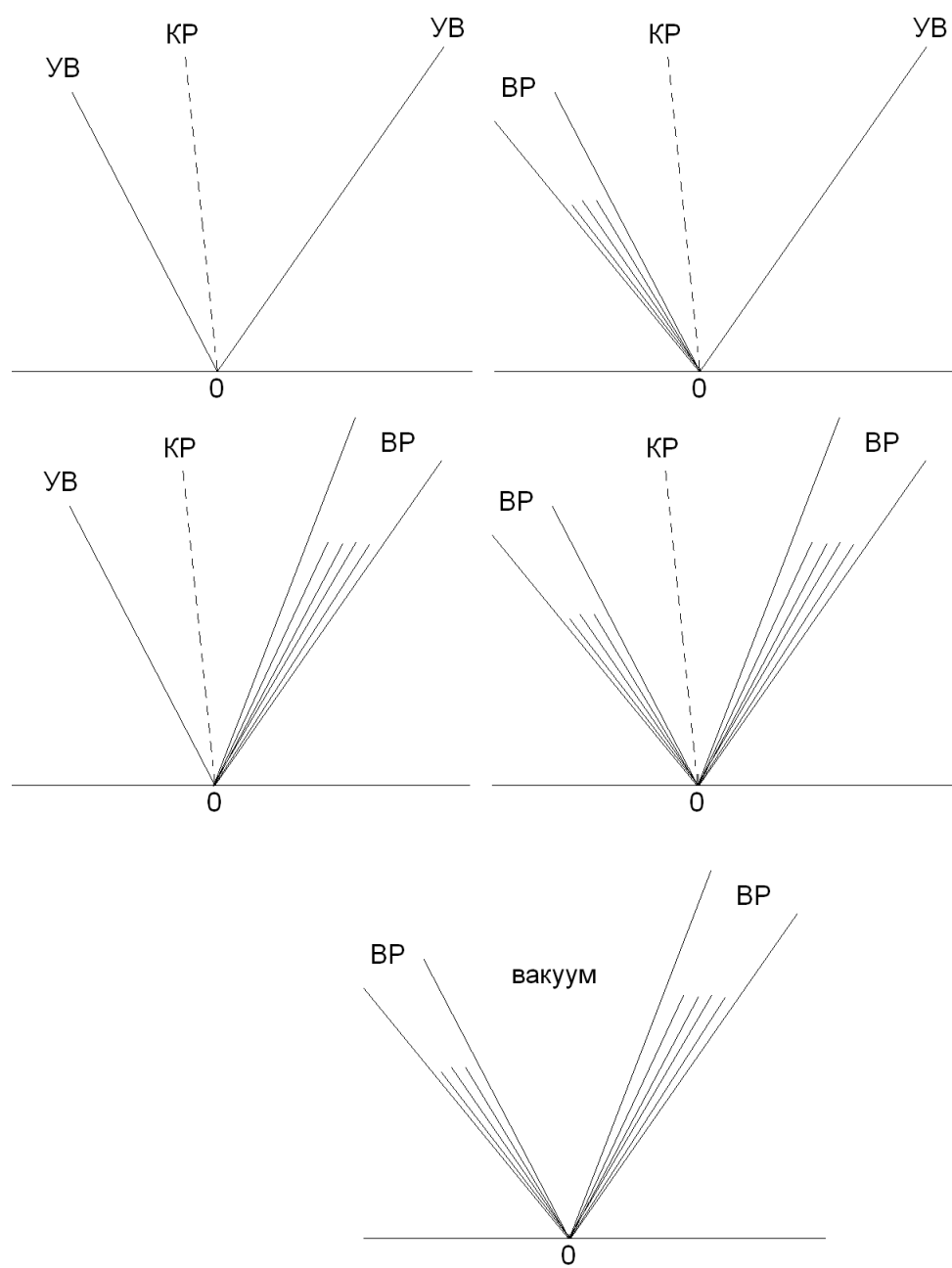


Рис. 1: возможные конфигурации разрыва

## СООТНОШЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Исключая значения амплитуды скоростей на разрыве и величину скорости самого разрыва из условий Рэнкина-Гюгонио (4), можно получить равенство

$$E - \varepsilon - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} \right) (p + P) = 0, \quad (11)$$

где  $(p, \rho, \varepsilon)$  — величины перед ударной волной,  $(P, R, E)$  — за фронтом ударной волны. Исключая из равенства (11)  $\varepsilon$  и  $E$  с помощью уравнения состояния (8), получим адиабату Гюгонио

$$R = \rho \frac{(\kappa + 1)(P + p_0) + (\kappa - 1)(p + p_0)}{(\kappa - 1)(P + p_0) + (\kappa + 1)(p + p_0)}. \quad (12)$$

Вводя в рассмотрение массовую скорость

$$a_I = \rho_I(u_I - D_I) = R_I(U - D_I) \quad (D_I - \text{скорость движения точки разрыва } \mathcal{UB}),$$

из соотношений Рэнкина-Гюгонио, выписанных для левой ударной волны (если она таковой является), получим

$$U - u_I + \frac{P - p_I}{a_I} = 0, \quad (13)$$

$$a_I = \sqrt{\rho_I \left[ \frac{\kappa + 1}{2} (P + p_0) + \frac{\kappa - 1}{2} (p_I + p_0) \right]}. \quad (14)$$

Аналогично, для правой ударной волны (если она является ударной волной) после введения массовой скорости

$$a_{II} = \rho_{II}(D_{II} - u_{II}) = R_{II}(D_{II} - U),$$

из тех же соотношений Рэнкина-Гюгонио получим

$$U - u_{II} - \frac{P - p_{II}}{a_{II}} = 0, \quad (15)$$

$$a_{II} = \sqrt{\rho_{II} \left[ \frac{\kappa + 1}{2} (P + p_0) + \frac{\kappa - 1}{2} (p_{II} + p_0) \right]}. \quad (16)$$



## СООТНОШЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ВОЛНЫ РАЗРЕЖЕНИЯ

В случае волны разрежения вместо условий Ренкина-Гюгонио нужно воспользоваться условиями непрерывности римановых инвариантов

$$[u] \pm \frac{2}{\kappa - 1}[c] = 0, \quad [\sigma(S)] = 0, \quad (17)$$

где  $c$  — скорость звука,  $S$  — энтропия. Квадратными скобками здесь обозначена разность постоянных значений соответствующих величин в областях, примыкающих к волне разрежения слева и справа. Знак плюс в первом из уравнений (17) берется для левой волны разрежения, знак минус — для правой. Для двучленного уравнения состояния (8) величины  $c$ ,  $\sigma(S)$  вычисляются по формулам

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p + p_0}{\rho}}, \quad \sigma(S) = \frac{\kappa(p + p_0)}{\rho^\kappa}. \quad (18)$$

Это позволяет соотношения (17) записать для левой волны разрежения в виде

$$U - u_I - \frac{2}{\kappa - 1}c_I \left[ 1 - \left( \frac{P + p_0}{p_I + p_0} \right)^{\frac{\kappa - 1}{2\kappa}} \right] = 0, \quad (19)$$

а для правой волны разрежения в виде

$$U - u_{II} + \frac{2}{\kappa - 1}c_{II} \left[ 1 - \left( \frac{P + p_0}{p_{II} + p_0} \right)^{\frac{\kappa - 1}{2\kappa}} \right] = 0. \quad (20)$$

В целях единообразия этим соотношениям можно придать ту же форму, что и в случае ударных волн

$$\begin{aligned} U - u_I + \frac{P - p_I}{a_I} &= 0 && \text{для левой волны,} \\ U - u_{II} + \frac{P - p_{II}}{a_{II}} &= 0 && \text{для правой волны,} \end{aligned}$$

если ввести условные массовые скорости с помощью формул

$$a_I = \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \rho_I c_I \frac{1 - \frac{P + p_0}{p_I + p_0}}{1 - \left( \frac{P + p_0}{p_I + p_0} \right)^{\frac{\kappa - 1}{2\kappa}}}, \quad (21)$$

$$a_{II} = \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \rho_{II} c_{II} \frac{1 - \frac{P + p_0}{p_{II} + p_0}}{1 - \left( \frac{P + p_0}{p_{II} + p_0} \right)^{\frac{\kappa - 1}{2\kappa}}}. \quad (22)$$

## ИТЕРАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ ПОИСКА ПАРАМЕТРОВ РАСПАДА РАЗРЫВА

В начале требуется задать начальное значение величины  $P = P^0$ . О способе задания величины  $P^0$  будет сказано дальше.

$m$ -ый итерационный шаг состоит в последовательном вычислении следующих величин.

1.  $a_I^{m-1} = a_I(P^{m-1})$  по формуле для ударной волны, если  $P^{m-1} \geq p_I$ , и по формуле для волны разрежения, если  $P^{m-1} < p_I$ .

2.  $a_{II}^{m-1} = a_{II}(P^{m-1})$  по формуле для ударной волны, если  $P^{m-1} \geq p_{II}$ , и по формуле для волны разрежения, если  $P^{m-1} < p_{II}$ .

3.  $P^m = \phi(P^{m-1}) \equiv \frac{a_{II}^{m-1}p_I + a_I^{m-1}p_{II} + a_I^{m-1}a_{II}^{m-1}(u_I - u_{II})}{a_I^{m-1} + a_{II}^{m-1}}$ . Эта формула получается исключением из системы двух уравнений (13) и (15) величины  $U$ .

Величина  $U$  находится по формуле

$$U = \frac{a_I u_I + a_{II} u_{II} + p_I - p_{II}}{a_I + a_{II}}$$

после завершения итерационного процесса.

Процесс может не сходиться, если в результате распада получаются очень сильные волны разрежения. Для сходимости процесса в этом случае рекомендуется вычислять на каждой итерации очередное значения  $P^m$  по несколько измененным формулам

$$P^m = \frac{\alpha_{m-1}P^{m-1} + \phi(P^{m-1})}{1 + \alpha_{m-1}},$$

$$\alpha_{m-1} = \begin{cases} \frac{\kappa - 1}{3\kappa} \frac{1 - z_{m-1}}{z_{m-1}^{\frac{\kappa+1}{2\kappa}} \left(1 - z_{m-1}^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}\right)} - 1, \\ \text{если это выражение больше нуля,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$z_{m-1} = \frac{P^{m-1} + p_0}{(p_I + p_0) + (p_{II} + p_0)}.$$

## УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ДАВЛЕНИЯ

Решение задачи о распаде разрыва является массовой элементарной операцией при численном интегрировании задач газовой динамики. Поэтому был разработан еще один алгоритм ее решения, использующий метод Ньютона и обеспечивающий очень быструю сходимость процесса. Опишем это алгоритм.

Исключая из уравнений

$$U - u_I + \frac{P - p_I}{a_I} = 0,$$

$$U - u_{II} - \frac{P - p_{II}}{a_{II}} = 0,$$

скорость контактного разрыва  $U$ , приходим к уравнению для давления  $P$ :

$$F(P) \equiv f(P, p_I, \rho_I) + f(P, p_{II}, \rho_{II}) = u_I - u_{II}, \quad (23)$$

где для значений  $n = I, II$

$$f(P, p_n, \rho_n) = \begin{cases} \frac{P - p_n}{\rho_n c_n \sqrt{\frac{\kappa + 1}{2\kappa} \pi_n + \frac{\kappa - 1}{2\kappa}}}, & \text{если } P \geq p_n, \\ \frac{2}{\kappa - 1} c_n \left( \pi_n^{\frac{\kappa - 1}{2\kappa}} - 1 \right), & \text{если } P < p_n, \end{cases} \quad (24)$$

$$\pi_n = \frac{P + p_0}{p_n + p_0}, \quad c_n = \sqrt{\kappa \frac{p_n + p_0}{\rho_n}}.$$

## ВЫПУКЛОСТЬ ФУНКЦИИ $F(P)$

Вычислим первую и вторую производные функции  $f(P, p_n, \rho_n)$  по переменной  $P$ :

$$f'(P, p_n, \rho_n) = \begin{cases} \frac{(\kappa + 1)\pi_n + (3\kappa - 1)}{4\kappa\rho_n c_n \sqrt{\left(\frac{\kappa + 1}{2\kappa}\pi_n + \frac{\kappa - 1}{2\kappa}\right)^3}}, & \text{если } P \geq p_n, \\ \frac{1}{\kappa(P + p_0)} c_n \pi_n^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}, & \text{если } P < p_n, \end{cases} \quad (25)$$

$$f''(P, p_n, \rho_n) = \begin{cases} \frac{(\kappa + 1)[(\kappa + 1)\pi_n + (7\kappa - 1)]}{16\kappa\rho_n^2 c_n^3 \sqrt{\left(\frac{\kappa + 1}{2\kappa}\pi_n + \frac{\kappa - 1}{2\kappa}\right)^5}}, & \text{если } P \geq p_n, \\ -\frac{\kappa + 1}{2\kappa^2(P + p_0)^2} c_n \pi_n^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}, & \text{если } P < p_n. \end{cases} \quad (26)$$

Следовательно, при всех  $P > -p_0$  будем иметь

$$f'(P, p_n, \rho_n) > 0, \quad f''(P, p_n, \rho_n) < 0, \quad (27)$$

т.е. левая часть уравнения (23) для давления  $P$  является монотонно возрастающей выпуклой функцией аргумента  $P$ .

Поскольку при  $P = p_n$  из формулы (25) следует, что

$$\lim_{P \rightarrow p_n - 0} f'(P, p_n, \rho_n) = \lim_{P \rightarrow p_n + 0} f'(P, p_n, \rho_n) = \frac{1}{\rho_n c_n},$$

ее первая производная непрерывна.

Для упрощения изложения ниже будем считать, что

$$p_I \leq p_{II}. \quad (28)$$

Это не является ограничением общности, т.к. в противном случае можно изменить направление отсчета на оси  $x$ , т.е. знаки у скоростей  $u_I, u_{II}$  и поменять местами индексы  $I, II$  для исходных параметров, а после проведения расчета проделать обратную операцию.

В общем случае, когда  $p_I \neq p_{II} \neq -p_0$ , график функции  $F(P)$  схематично изображен на рисунке (2).

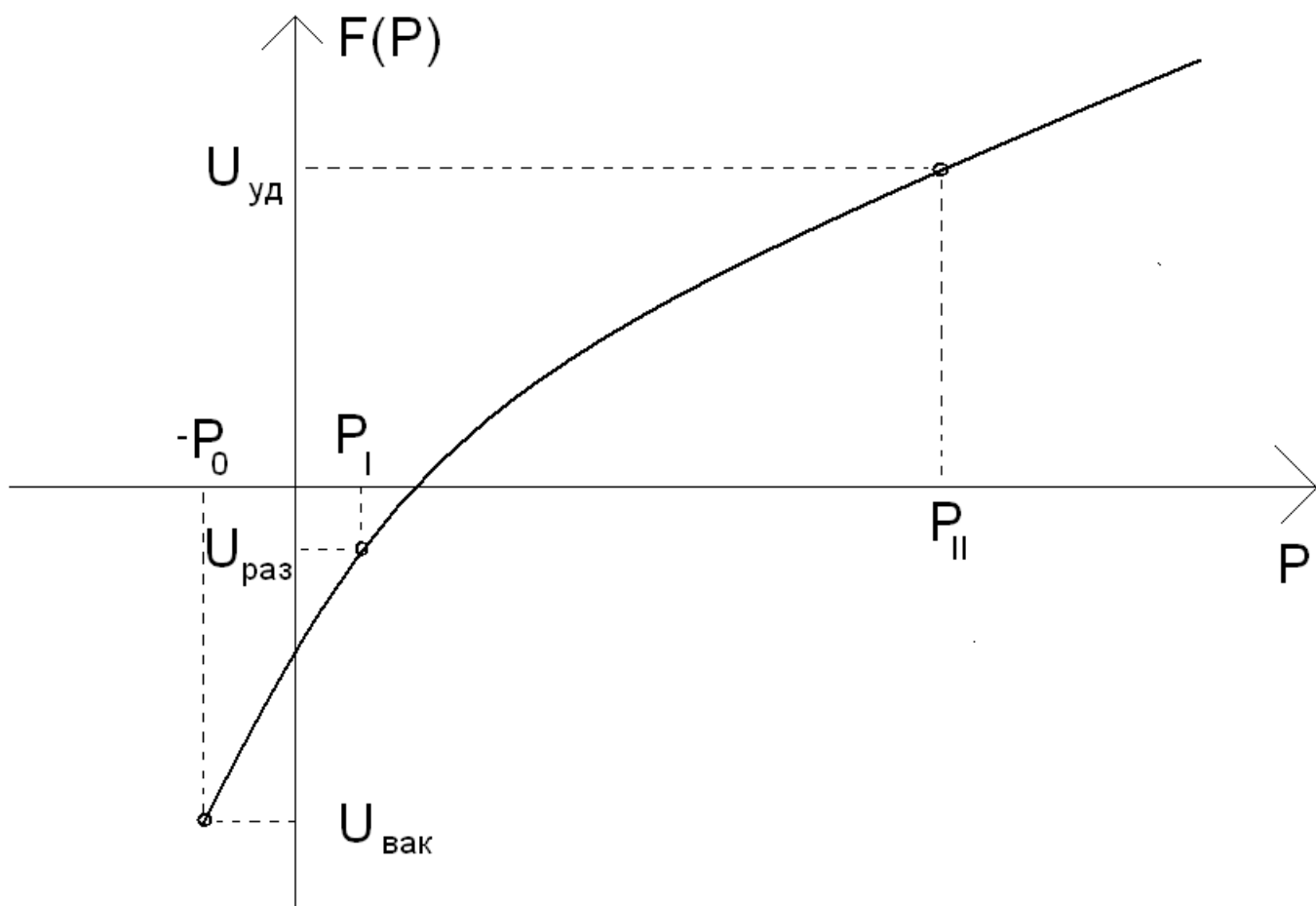


Рис. 2: график функции  $F(P)$

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНФИГУРАЦИИ РАЗРЫВА

Значения функции  $F(P)$  в точках  $P = -p_0, p_I, p_{II}$  позволяют еще до решения уравнения

$$F(P) = u_I - u_{II}$$

определить, какая из конфигураций распада разрыва возникнет. Эти значения таковы

$$\begin{aligned} F(p_{II}) &= U_{\text{уд}} = \frac{p_{II} - p_I}{\sqrt{\rho_I \left[ \frac{\kappa+1}{2}(p_{II} + p_0) + \frac{\kappa-1}{2}(p_I + p_0) \right]}}, \\ F(p_I) &= U_{\text{раз}} = -\frac{2c_{II}}{\kappa-1} \left[ 1 - \left( \frac{p_I + p_0}{p_{II} + p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} \right], \\ F(-p_0) &= U_{\text{вак}} = -\frac{2c_I}{\kappa-1} - \frac{2c_{II}}{\kappa-1}. \end{aligned} \tag{29}$$

В зависимости от величины  $u_I - u_{II}$  возможны следующие ситуации.

1.  $u_I - u_{II} > U_{\text{уд}}$ . Тогда  $P > p_{II}$  и, следовательно,  $P > p_I$ . Поэтому вправо и влево распространяются ударные волны.
2.  $U_{\text{раз}} < u_I - u_{II} < U_{\text{уд}}$ . Тогда  $p_I < P < p_{II}$ . Поэтому влево распространяется ударная волна, а вправо — волна разряжения.
3.  $U_{\text{вак}} < u_I - u_{II} < U_{\text{раз}}$ . Тогда  $-p_0 < P < p_I$ . Возникают две волны разряжения.
4.  $u_I - u_{II} < U_{\text{вак}}$ . Возникает область вакуума, в которой следует полагать  $P = -p_0$ ,  $R = 0$ . Попытка решить уравнение для  $P$  обречена на неудачу, т.к. у него нет вещественных корней.

## МЕТОД НЬЮТОНА ПОИСКА ПАРАМЕТРОВ РАСПАДА РАЗРЫВА

В силу монотонности и выпуклости функции  $F(P)$  наиболее целесообразным для поиска решения уравнения

$$F(P) = u_I - u_{II}$$

использовать метод Ньютона:

$$P^m = P^{m-1} - \frac{f(P^{m-1}, p_I, \rho_I) + f(P^{m-1}, p_{II}, \rho_{II}) - (u_I - u_{II})}{f'(P^{m-1}, p_I, \rho_I) + f'(P^{m-1}, p_{II}, \rho_{II})}.$$

Входящие сюда функции и их производные были определены выше формулами (24) и (25).

Поскольку функция  $F(P)$  выпукла вверх, ибо  $F''(P) < 0$ , начальное приближение  $P^0$  рекомендуется выбирать так, чтобы было выполнено условие

$$F(P^0) < u_I - u_{II}.$$

В этом случае последовательные приближения сходятся к искомому корню снизу, монотонно возрастаая.

Убывание погрешности происходит по закону

$$P^m - P^* = \frac{1}{2} \frac{F''(\tilde{P})}{F'(P^{m-1})} [P^{m-1} - P^*],$$

где  $P^*$  — искомый корень, а  $\tilde{P}$  — некоторая точка на отрезке  $[P^{m-1}, P^m]$ .

## ВЫБОР НАЧАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

**I.** В качестве одного из возможных алгоритмов расчета начального приближения  $P^0$  можно рекомендовать "звуковой распад разрыва". Вместо нелинейного уравнения (23) в этом случае рассматривается результат его линеаризации

$$\frac{P - p_I}{\rho_I c_I} + \frac{P - p_{II}}{\rho_{II} c_{II}} = u_I - u_{II},$$

из которого определяется

$$P^0 = \frac{p_I \rho_{II} c_{II} + p_{II} \rho_I c_I + (u_I - u_{II}) \rho_I c_I \rho_{II} c_{II}}{\rho_I c_I + \rho_{II} c_{II}}.$$

Эта формула дает приближение для искомого корня  $P^*$  снизу, т.е. удовлетворяет "желательному" условию на начальное приближение  $P^0$ .

В случае, когда величины  $(p_I, \rho_I, u_I)$  мало отличаются от  $(p_{II}, \rho_{II}, u_{II})$  "звуковое приближение" без всякого итерационного процесса может оказаться вполне удовлетворительным.

**II.** Хорошие результаты, особенно в случае двух ударных волн, дает замена уравнения (23), имеющего в этом случае вид

$$\frac{P - p_I}{\sqrt{\rho_I \left( \frac{\kappa + 1}{2} P + \frac{\kappa - 1}{2} p_I + \kappa p_0 \right)}} + \frac{P - p_{II}}{\sqrt{\rho_{II} \left( \frac{\kappa + 1}{2} P + \frac{\kappa - 1}{2} p_{II} + \kappa p_0 \right)}} = u_I - u_{II},$$

на "приближенное уравнение"

$$\frac{P - p_I}{\sqrt{\theta_I \rho_I (P + p_0)}} + \frac{P - p_{II}}{\sqrt{\theta_{II} \rho_{II} (P + p_0)}} = u_I - u_{II},$$

где  $\theta_I, \theta_{II}$  — некоторые постоянные. Оно в свою очередь сводится к квадратному уравнению для  $P$ , и в качестве  $P^0$  следует брать его больший корень. Что касается величин  $\theta_I, \theta_{II}$ , то можно рекомендовать полагать

$$\theta_I = \theta_{II} = \frac{\kappa + 1}{2},$$

если ожидается  $P \gg p_{II} > p_I$ , или

$$\theta_I = \theta_{II} = \kappa,$$

если  $P \approx p_{II} \approx p_I$ .

**III.** Если выполняется одно из неравенств

$$|u_I - u_{II} - U_{уд}| < \delta,$$

$$|u_I - u_{II} - U_{раз}| < \delta,$$

$$|u_I - u_{II} - U_{вак}| < \delta,$$

где  $\delta$  — предусмотренная мера точности, то сразу полагают  $P^* = p_{II}$ ,  $P^* = p_I$ ,  $P^* = -p_0$  соответственно.



## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ КОНФИГУРАЦИИ

В результате выполнения итерационного процесса найдется величина  $P$ . Используя формулы (14), (16), (21), (22) по найденному давлению находятся массовые скорости  $a_I$  и  $a_{II}$ . После чего находим скорость контактного разрыва по формуле

$$U = \frac{a_I u_I + a_{II} u_{II} + p_I - p_{II}}{a_I + a_{II}}.$$

Если левая волна является ударной, то ее скорость равна

$$D_I = u_I - \frac{a_I}{\rho_I},$$

а плотность  $R_I$  вычисляется по адиабате Гюгонио

$$R_I = \rho_I \frac{(\kappa + 1)(P + p_0) + (\kappa - 1)(p_I + p_0)}{(\kappa - 1)(P + p_0) + (\kappa + 1)(p_I + p_0)} = \frac{\rho_I a_I}{a_I - \rho_I(u_I - U)}.$$

Если левая волна является волной разряжения, то скорости крайних характеристик, ее ограничивающих, вычисляются по формулам

$$D_I = u_I - c_I, \quad D_I^* = U - c_I^*,$$

где

$$c_I^* = c_I + \frac{\kappa - 1}{2}(u_I - U),$$

а плотность  $R_I$  в области слева от контактного разрыва — по формуле

$$R_I = \kappa \frac{P + p_0}{(c_I^*)^2}.$$

Аналогичные формулы выписываются для правой волны. Если она является ударной волной, то

$$D_{II} = u_{II} + \frac{a_{II}}{\rho_{II}}, \quad R_{II} = \frac{\rho_{II} a_{II}}{a_{II} + \rho_{II}(u_{II} - U)},$$

а если волной разряжения, то

$$D_{II} = u_{II} - c_{II}, \quad c_{II}^* = c_{II} + \frac{\kappa - 1}{2}(u_{II} - U),$$

$$D_{II}^* = U + c_{II}^*, \quad R_{II} = \kappa \frac{P + p_0}{(c_{II}^*)^2}.$$

## СХЕМА ГОДУНОВА

Пусть приближенное решение  $(V, H, G, Q)$  системы уравнений газовой динамики с уравнением состояния  $\varepsilon = \varepsilon(p, \rho)$  известно в момент времени  $t$  в виде кусочно постоянных функций на интервалах  $(x_{m-1}, x_m)$ . Обозначим постоянные значения компонент решения на интервале  $(x_{m-1}, x_m)$  через  $(V_{m-1/2}, H_{m-1/2}, G_{m-1/2}, Q_{m-1/2})$ . Решение  $(\hat{V}, \hat{H}, \hat{G}, \hat{Q})$  на следующем временном слое  $t + \tau$  ищется по следующей схеме

$$\begin{aligned} \frac{\hat{H}_{m-1/2} - H_{m-1/2}}{\tau} + \frac{M_m - M_{m-1}}{x_m - x_{m-1}} &= 0, \\ \frac{\hat{H}_{m-1/2} \hat{V}_{m-1/2} - H_{m-1/2} V_{m-1/2}}{\tau} + \frac{J_m - J_{m-1}}{x_m - x_{m-1}} &= 0, \\ \frac{\hat{H}_{m-1/2} \left( \hat{Q}_{m-1/2} + \frac{\hat{V}_{m-1/2}^2}{2} \right) - H_{m-1/2} \left( Q_{m-1/2} + \frac{V_{m-1/2}^2}{2} \right)}{\tau} + \frac{E_m - E_{m-1}}{x_m - x_{m-1}} &= 0, \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} M_m &= (RU)_m, \\ J_m &= (P + RU^2)_m, \\ E_m &= \left[ RU \left( E + \frac{U^2}{2} \right) + PU \right]_m \end{aligned}$$

для величин, которые представляют потоки массы, импульса и энергии на единицу длины бокового ребра прямоугольной ячейки сетки.

Величины  $(U_m, R_m, P_m, E_m)$  являются решением задачи о распаде разрыва с начальными данными  $(V_{m-1/2}, H_{m-1/2}, G_{m-1/2}, Q_{m-1/2})$  при  $x < x_m$  и  $(V_{m+1/2}, H_{m+1/2}, G_{m+1/2}, Q_{m+1/2})$  при  $x > x_m$  в точках  $(\tilde{t}, x_m)$ , где  $\tilde{t} > t$ . Как было показано выше, эти решения являются автомодельными, т.е. являются функциями вида

$$U = U(\xi), \quad R = R(\xi), \quad P = P(\xi), \quad E = E(\xi),$$

где  $\xi = \frac{x - x_m}{t - t_0}$ . Поэтому значения при  $x = x_m$  сохраняются постоянными вплоть до тех пор, пока в т.  $x_m$  не придут волны, образовавшиеся при распаде разрыва в т.  $x_{m-1}$  и т.  $x_{m+1}$ .

Дополнив схему уравнением состояния, мы получим возможность выписать явные формулы для вычисления решения на верхнем слое.

Для того, чтобы избежать влияния друг на друга распадов разрывов в соседних точках  $x_m$ , в схеме Годунова необходимо накладывать условие на шаги сетки  $\tau$  и  $h$  вида

$$\tau \leq \max_m |V_m| h.$$

На гладких функциях описанная разностная схема дает аппроксимацию дифференциальных уравнений газовой динамики с первым порядком точности.

## ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

С.К.Годунов предложил свой метод в работах, опубликованных в 1957 и 1959 годах, который существенно основан на использовании точного или приближенного решения задачи Римана для одномерной гиперболической системы уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{0}. \quad (30)$$

**Квазилинейная система (30) называется гиперболической в точке  $(x, t, \mathbf{U})$ , если существует несингулярная (невырожденная) матрица  $\Omega$ , диагонализующая матрицу Якоби вектор функции  $\mathbf{F}$**

$$A = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \Omega \Lambda \Omega^{-1}$$

и все элементы  $\lambda_k$  диагональной матрицы  $\Lambda$  действительны. Числа  $\lambda_k$  являются собственными числами матрицы  $A$ , а  $k$ -ый столбец матрицы  $\Omega$  состоит из компонент  $k$ -го правого собственного вектора  $\mathbf{r}_k$  в силу равенства

$$A\Omega = \Omega\Lambda.$$

Аналогично,  $k$ -ая строка матрицы  $\Omega^{-1}$  задает  $k$ -й левый собственный вектор  $\mathbf{l}^k$ . Часто используются следующие обозначения:  $\Omega_R = \Omega$ ,  $\Omega_L = \Omega^{-1}$ .

**Если все собственные значения различны, система называется строго гиперболической.**

Это определение гиперболичности по И.Г.Петровскому.

## СМЫСЛ ГИПЕРБОЛИЧНОСТИ

Рассмотрим смысл гиперболичности для системы

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{b}. \quad (31)$$

Умножая ее на левый собственный вектор  $\mathbf{l}^k$ , получаем

$$\mathbf{l}^k \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \lambda_k \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) = \mathbf{f}^k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (32)$$

где  $\mathbf{f}^k = \mathbf{l}^k \cdot \mathbf{b}$ .

Систему (32) можно переписать в виде

$$\mathbf{l}^k \left( \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right)_k = \mathbf{f}^k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (33)$$

где  $(d\mathbf{u}/dt)_k$  есть производная  $\mathbf{u}$  по  $t$  в направлении  $dx/dt = \lambda_k$ . Это направление называют характеристическим, а уравнение (33) называется характеристической формой уравнения (31).

Если система (31) линейна и ее коэффициенты постоянны, то собственные значения  $\lambda_k$ , которые также называются характеристическими скоростями, тоже постоянны, а значит, характеристические линии на плоскости  $(x, t)$  становятся прямыми линиями

$$x = \lambda_k t + \text{const}.$$

**Задача.** Доказать, что система уравнений нестационарной газовой динамики является гиперболической.

## СИСТЕМЫ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

Среди уравнений гиперболической системы могут присутствовать уравнения, выражающие сохранение таких фундаментальных величин, как масса, импульс и энергия. Подразумевается, что изменение сохраняющейся величины в произвольном выделенном объеме  $V \subset \mathbf{R}^3$  может происходить только за счет ее притока через границу этого объема  $\partial V$ . При этом интегральный закон сохранения записывается в виде

$$\frac{d}{dt} \int_V F_0 dV + \int_{\partial V} \sum_{j=1}^3 n_j F_j dS = 0, \quad (34)$$

где  $n_j$  — компоненты внешней нормали к  $\partial V$ , а  $dS$  — элемент площади.

Предполагается, что  $F_0 = F_0(\mathbf{U})$  и  $F_j = F_j(\mathbf{U})$  ( $j = 1, 2, 3$ ) являются известными непрерывно дифференцируемыми функциями искомых величин  $\mathbf{U}$ , задающими плотность сохраняющейся величины и компоненты вектора ее потока через единицу площади.

Если функция  $\mathbf{U}(t, \mathbf{x})$  дифференцируема, то из (34) следует

$$\frac{\partial F_0(\mathbf{U})}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial F_j(\mathbf{U})}{\partial x_j} = 0. \quad (35)$$

Левую часть этого уравнения можно рассматривать как дивергенцию вектора  $(F_0, F_1, F_2, F_3)$  в пространстве переменных  $t, x_1, x_2, x_3$ . Поэтому говорят, что оно записано в дивергентной форме. Если уравнение (35) является следствием гиперболической системы и этому уравнению соответствует интегральное уравнение (34), то говорят, что уравнение (35) выражает закон сохранения.

**Задача.** Показать, что даже одному дифференциальному уравнению может соответствовать несколько различных дивергентных форм его записи.

Если в системе дифференциальных уравнений каждое из уравнений записано в дивергентном виде и выражает при этом законы сохранения, будем говорить, что система имеет **консервативную** форму, или форму законов сохранения. При этом на разрывах законам сохранения соответствуют граничные условия в виде

$$-W[\mathbf{F}_0] + \sum_{j=1}^3 n_j [F_j] = 0, \quad (36)$$

где  $W$  — скорость поверхности разрыва в направлении нормали к ней.

Система уравнений называется **консервативной**, если на разрывах ее решений выполняются соотношения (36).

**Замечание.** Большинство гиперболических систем решается численно на основе их консервативной, а не квазилинейной формы.

**Замечание.** Одномерный случай получается при рассмотрении течений, для которых искомые величины  $\mathbf{U}$  вдоль осей  $x_2$  и  $x_3$  не изменяются. Далее опять для простоты и компактности изложения будем рассматривать гиперболическую систему с одной пространственной переменной.

## ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ

Вектор функция  $\mathbf{U}(t, x)$  называется **обобщенным решением** системы

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad (37)$$

если она удовлетворяет системе

$$\oint_{\gamma} \mathbf{U} dx - \mathbf{F}(\mathbf{U}) dt = 0 \quad (38)$$

для кусочно-гладкого контура  $\gamma$ , ограничивающего произвольную область  $Q$  на плоскости  $(t, x)$ . Уравнения системы (38) по сути одномерная форма записи интегральных законов сохранения (34).

Все классические решения образуют подмножество обобщенных решений. С другой стороны  $\mathbf{U}(t, x)$  может быть и кусочно-непрерывной, с непрерывными первыми производными внутри каждого интервала непрерывности.

Поверхность, на которой функция  $\mathbf{U}$  имеет разрыв, называется поверхностью **сильного разрыва**. Если разрывны только производные функции  $\mathbf{U}$ , то говорят о наличии **слабого разрыва**.

Пусть вектор  $\mathbf{U}$  разрывен на линии  $x = X(t)$ , но непрерывен с обеих сторон этой линии. Тогда на разрыве должно выполняться равенство

$$\frac{dX}{dt}[\mathbf{U}] = [\mathbf{F}(\mathbf{U})].$$

Это соотношение по аналогии с газовой динамикой называют условием Гюгонио.

## ЕДИНСТВЕННОСТЬ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ

**Задача.** Привести пример, показывающий, что для единственности обобщенного решения гиперболической системы недостаточно требования удовлетворения решения законам сохранения и начальным условиям.

Для выделения единственного обобщенного решения Б.Л.Рожественский и Н.Н.Яненко (1978) ввели следующие критерии:

- любое классическое решение, если оно существует, должно также быть решением в обобщенном смысле;
- пределы классических решений также являются решениями интегральных законов сохранения в классе разрывных функций.

Первое предположение вполне естественно, а второе предполагает непрерывную зависимость решения задачи Коши от начальных данных. Таким образом, вышеприведенные условия основаны на предположении о корректности задачи Коши.

Принципы, сформулированные Б.Л.Рожественским и Н.Н.Яненко, очень важны с точки зрения использования численных методов сквозного счета для нахождения разрывных решений гиперболических систем. При этом подходе разрывы представляются резкими градиентами соответствующих функций на расчетной сетке. Естественно надеяться, что эти решения будут стремиться к разрывным решениям гиперболической системы по мере того как измельчается сетка. С другой стороны, зоны больших градиентов в численных решениях, очевидно, описываются схемными вязкостью и дисперсией. Таким образом, можно сказать, что разрыв является допустимым, если он является пределом соответствующего сглаженного профиля при стремлении диссипации и дисперсии к нулю.

В частных случаях для единственности обобщенного решения удастся ввести свое дополнительное условие к требованию удовлетворения решения законам сохранения и начальным условиям. Так, например, для системы уравнений газовой динамики таким условием является выполнение на разрывах требования неубывания энтропии.

## ЗАДАЧА РИМАНА

Задача Римана о распаде произвольного разрыва является частным случаем задачи Коши для системы

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{0} \quad (39)$$

со специальными начальными условиями в виде (Rieman, 1860)

$$\mathbf{U}(0, x) = \begin{cases} \mathbf{U}^R & \text{при } x > 0, \\ \mathbf{U}^L & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (40)$$

Решения этой задачи, которое годилось бы для всех возможных ситуаций, пока нет. Все существующие алгоритмы делятся условно на две большие части.

К первой группе относятся алгоритмы точного или численного решения задачи о распаде разрыва для системы газовой динамики (к ним относятся алгоритмы, изложенные в начале темы) и других частных случаев системы (39).

Вторая группа претендует на большую универсальность в смысле спектра задач, к которым она может быть применена. Одна из идей этой группы — построение решения задачи Римана для малых разностей  $\mathbf{U}^R - \mathbf{U}^L$ . Однако такой подход к решению задачи Римана может не давать удовлетворительного по точности результата при немалых  $\mathbf{U}^R - \mathbf{U}^L$ . Алгоритмы построения решения задачи Римана из этой группы можно найти в книге А.Г.Куликовского, Н.В.Погорелова и А.Ю.Семенова.



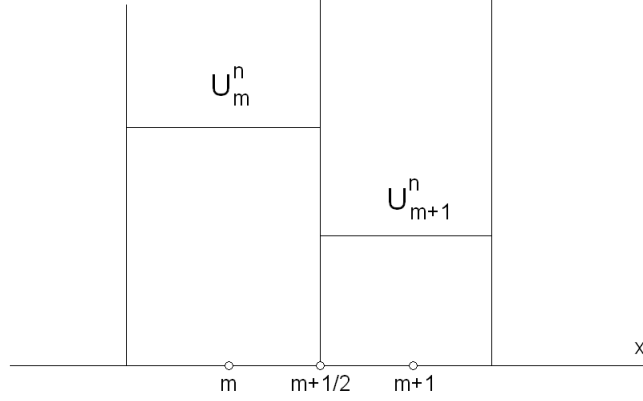


Рис. 3: кусочно-постоянное распределение функции  $\mathbf{U}^n$

## МЕТОД ГОДУНОВА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим равномерную пространственную сетку с шагом  $h$ . Положим, что на  $n$ -ом временном слое все компоненты сеточной вектор функции  $\mathbf{U}$  являются постоянными внутри каждой ячейки (см. рисунок (3)). Тогда на границе с номером  $m + 1/2$  на  $n$ -ом шаге по времени будем решать задачу Римана со следующими начальными данными:

$$\mathbf{U}(t^n, x) = \begin{cases} \mathbf{U}_{m+1}^n & \text{при } x > x_{m+1/2}, \\ \mathbf{U}_m^n & \text{при } x < x_{m+1/2}. \end{cases} \quad (41)$$

Пусть  $\mathbf{U}_{m+1/2}^{n+1/2}$  — решение такой задачи в точке  $(t_{n+1/2}, x_{m+1/2})$ . Аналогично  $\mathbf{U}_{m-1/2}^{n+1/2}$  — решение задачи Римана с номером  $m - 1/2$  в соответствующей точке. Тогда явная конечно-объемная схема Годунова имеет вид

$$\frac{\mathbf{U}_m^{n+1} - \mathbf{U}_m^n}{\tau} + \frac{\mathbf{F}_{m+1/2} - \mathbf{F}_{m-1/2}}{h} = \mathbf{0},$$

где  $\mathbf{F}_{m\pm 1/2} = \mathbf{F}(\mathbf{U}_{m\pm 1/2}^{n+1/2})$ .

Схема обладает первым порядком точности по времени и пространству. Исследование устойчивости схемы для линеаризованных уравнений по спектральному признаку приводит к условию

$$C = \max_p |C_p| \leq 1, \quad C_p = \lambda_p \frac{\tau}{h},$$

где  $\lambda_p$  — собственные значения якобиевой матрицы  $A$  для функции  $\mathbf{F}$ . Число  $C$  называется числом Куранта, а условие устойчивости носит имена Куранта-Фридрихса-Леви (1928). Физическая интерпретация условия состоит в обеспечении того, чтобы малые возмущения, распространяющиеся от одной границы дискретной ячейки, за время  $\tau$  не достигли другой.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва "Наука", М., 1976.
2. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложений к газовой динамике: М.: Главная редакция физикоматематической литературы издательства "Наука", 1968 г., 592 с.
3. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений: 2-е изд., испр. и доп. — М.: ФИЗМАТ-ЛИТ, 2012 г. — 656 с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. — 3-е изд., перераб. — М.: Наука. Гл.ред. физ.-мат. лит., 1986. — 736 с.