

**СПЕЦКУРС**

1/2 года

кафедры вычислительной математики  
механико-математического факультета МГУ

**МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ  
НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ  
МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**

лектор - доцент Попов Анатолий Вадимович

**2025 г.**

ТЕМА 4.

**Разностные методы решения  
квазилинейного уравнения  
с одной пространственной переменной**  
рабочий конспект

© Механико-математический факультет МГУ, 2025 г.

© А.В.Попов, 2025 г.

## КВАЗИЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ

Ниже будем рассматривать **квазилинейное уравнение**, записанное в дивергентной форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где  $u = u(t, x)$  — неизвестная функция, а  $F$  — уравнение состояния — известная функция одной переменной.

В верхней полуплоскости  $Q = \{(t, x) | t > 0, -\infty < x < \infty\}$  для уравнения (1) ставится задача Коши

$$u(0, x) = u_0(x). \quad (2)$$

### Важные факты

- Сложность численного решения подобных уравнений заключается в том, что его решения могут со временем терять гладкость.
- Скорость распространения возмущений в решениях квазилинейных уравнений конечна и определяется в каждой точке значением

$$\frac{dF(u(t, x))}{du}.$$

- Необходимым условием устойчивости явных разностных схем по теореме Куранта об областях зависимости является соотношение между шагами сетки

$$\frac{a\tau}{h} < 1, \quad \text{где } a = \left\| \frac{dF(v_m^n)}{du} \right\|_C.$$

- При локализации области поиска решения по пространственной переменной на отрезок  $[0, X]$  граничное условие в точках  $(t, 0)$  ставится при условии, что

$$\frac{dF(u(t, 0))}{du} > 0,$$

а в точках  $(t, X)$  при условии, что

$$\frac{dF(u(t, X))}{du} < 0.$$

## ГРАНИЧНЫЕ ПОТОКИ

Интегрируя уравнение (1) по области  $Q_{nm} = \{(t, x) | n\tau < t < (n+1)\tau, (m-1/2)h < x < (m+1/2)h\}$ , получаем

$$\begin{aligned} \int_{(m-1/2)h}^{(m+1/2)h} u((n+1)\tau, x)dx &= \int_{(m-1/2)h}^{(m+1/2)h} u(n\tau, x)dx - \\ - \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} F(t, (m+1/2)h)dt &+ \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} F(t, (m-1/2)h)dt. \end{aligned}$$

Заменив точные интегралы их приближениями, получаем разностную схему

$$\hat{v} = v - \frac{\tau}{h}(f_{m+1/2} - f_{m-1/2}), \quad (3)$$

в которой члены  $f_{m+1/2}$  и  $f_{m-1/2}$  называются граничными потоками и являются функциями  $F$  на одном или более временных слоях. Правильное вычисление граничных потоков является ключом к построению хорошей разностной схемы.

Три классические схемы, называемые противопотоковая (КИР, upwind), с центральной разностью и "тренога" (Лакса-Вендроффа), используют различные приближения для вычисления граничных потоков.

**Граничный поток в схеме с центральной разностью** записывается в виде

$$f_{m+1/2}^{CN} = \frac{F_{m+1} + F_m}{2}. \quad (4)$$

## СХЕМЫ КИР (Courant, Isaacson, Rees)

Схемы КИР — это явные противопоточные (upwind) схемы первого порядка точности. В случае уравнения переноса схема КИР записывается в виде одной формулы

$$\frac{\hat{v}_m - v_m}{\tau} + a \frac{v_{m+1/2} - v_{m-1/2}}{h} = 0,$$

$$v_{j+1/2} = \frac{1}{2}(v_j + v_{j+1}) + \frac{1}{2} \text{sign}(a)(v_j - v_{j+1}), \quad j = m, m-1.$$

Схемы КИР для квазилинейных уравнений различаются типами аппроксимации нелинейных членов. Эффективную схему такого типа предложил в 1978 году А.С.Холодов. В случае одного уравнения (1) **схему Холодова** можно записать так

$$\frac{\hat{v}_m - v_m}{\tau} + \frac{f_{m+1/2} - f_{m-1/2}}{h} = 0,$$

$$f_{j+1/2} = \frac{1}{2}(F_j + F_{j+1}) + \frac{1}{2} \left| \frac{dF((v_j + v_{j+1})/2)}{du} \right| (v_j - v_{j+1}). \quad j = m, m-1.$$

**Граничный поток в противопотоковой схеме** первого порядка можно записать в виде

$$f_{m+1/2}^{UP} = \frac{F_{m+1} + F_m}{2} - \text{sign}(a_{m+1/2}) \frac{F_{m+1} - F_m}{2} \quad (5)$$

или

$$f_{m+1/2}^{UP} = \frac{F_{m+1} + F_m}{2} - |a_{m+1/2}| \frac{\Delta_{m+1/2}}{2}, \quad (6)$$

где

$$\Delta_{m+1/2} = v_{m+1} - v_m. \quad (7)$$

Скорость волны  $a$  вычисляется как

$$a_{m+1/2} = \begin{cases} \frac{F_{m+1} - F_m}{\Delta_{m+1/2}}, & \text{если } \Delta_{m+1/2} \neq 0; \\ \frac{\partial F}{\partial u}, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (8)$$

Выбор граничного потока в виде (6) может не удовлетворять условию неубывания энтропии, поэтому  $|a_{m+1/2}|$  заменяется на  $\psi(a_{m+1/2})$ , которое определяется как

$$\psi(a_{m+1/2}) = \max(|a_{m+1/2}|, \delta), \quad (9)$$

где  $\delta$  — малое положительное число.

## СХЕМА ЛАКСА-ВЕНДРОФФА (ТРЕНОГА)

Схему Лакса-Вендроффа можно построить, исходя из разложения в ряд Тейлора

$$\hat{u} = u + \tau \dot{u} + \frac{\tau^2}{2} \ddot{u} + O(\tau^3). \quad (10)$$

Из квазилинейного уравнения (1) имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial F(u)}{\partial x}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial F(u)}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F(u)}{\partial t} \right) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left( F'_u(u) \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( F'_u(u) \frac{\partial F(u)}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Перепишем разложение (10) в виде

$$\hat{u} = u - \tau \frac{\partial F(u)}{\partial x} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( F'_u(u) \frac{\partial F(u)}{\partial x} \right) + O(\tau^3)$$

и заменим первую производную по пространственной переменной на центральную разность, а вторую производную на стандартную аппроксимацию. В результате получим

$$\hat{u} = u + \tau F(u)_{\bar{x}} + \frac{\tau^2}{2} (F'_u(u_s) F(u)_x)_{\bar{x}} + O(\tau^3 + \tau h^2). \quad (11)$$

Отбрасывая слагаемые порядка  $\tau^3 + \tau h^2$ , получаем широко известную схему Лакса-Вендроффа

$$v_t + F(v)_{\bar{x}} = \frac{\tau}{2} (F'_u(v_s) F(v)_x)_{\bar{x}}, \quad (12)$$

имеющую второй порядок точности на гладких решениях.

В схеме "тренога" граничный поток определяется следующим образом

$$f_{m+1/2}^{LW} = \frac{F_{m+1} + F_m}{2} - \frac{\tau a_{m+1/2}^2}{2h} \Delta_{m+1/2}. \quad (13)$$

## СХЕМЫ ПРЕДИКТОР-КОРРЕКТОР

При построении разностных схем, аппроксимирующих нестационарные задачи, может быть использована та же идея, которая лежит в основе конструкции схем Рунге-Кутты для обыкновенных дифференциальных уравнений, — идея пересчета. Пересчет позволяет повысить порядок аппроксимации. Кроме того, пересчет в случае квазилинейных уравнений дает дополнительную возможность получения так называемых дивергентных схем.

Наиболее часто употребляемой является метод Эйлера с пересчетом

$$\begin{aligned}v_m^{n+1/2} &= v_m^n - \frac{\tau}{2h} (f_{m+1/2}^n - f_{m-1/2}^n), \\v_m^{n+1} &= v_m^n - \frac{\tau}{h} (f_{m+1/2}^{n+1/2} - f_{m-1/2}^{n+1/2}).\end{aligned}\tag{14}$$

Примером схемы типа предиктор-корректор является **схема Мак-Кормака**

$$\begin{aligned}\tilde{v}_m &= v_m - \frac{\tau}{h} (F(v_{m+1}) - F(v_m)), \\ \hat{v}_m &= \frac{1}{2} \left[ v_m + \tilde{v}_m - \frac{\tau}{h} (F(\tilde{v}_m) - F(\tilde{v}_{m-1})) \right].\end{aligned}$$

- Изменение направления численного дифференцирования на шагах предиктор и корректор приводит к изменению результатов расчета. Разрывы лучше рассчитываются, если на шаге предиктор разности берутся в направлении движения разрыва.
- Для уравнения переноса схема Мак-Кормака эквивалентна схеме Лакса-Вендроффа.
- Метод Мак-Кормака не требует вычислений значений искомой функции в промежуточных узлах.

## СХЕМЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ

Метод Русанова:

$$\begin{aligned}
 v_{m+0,5}^{(1)} &= \frac{1}{2} (v_{m+1}^n + v_m^n) - \frac{\tau}{3h} (F_{m+1}^n - F_m^n), \\
 v_m^{(2)} &= v_m^n - \frac{2\tau}{3h} \left( F(v_{m+0,5}^{(1)}) - F(v_{m-0,5}^{(1)}) \right), \\
 v_m^{n+1} &= v_m^n - \frac{\tau}{24h} (-2F_{m+2}^n + 7F_{m+1}^n - 7F_{m-1}^n + 2F_{m-2}^n) - \\
 &\quad - \frac{3\tau}{8h} \left( F(v_{m+1}^{(2)}) - F(v_{m-1}^{(2)}) \right) - \\
 &\quad - \frac{\omega}{24} (v_{m+2}^n - 4v_{m+1}^n + 6v_m^n - 4v_{m-1}^n + v_{m-2}^n).
 \end{aligned} \tag{15}$$

Параметр  $\omega$  задается из промежутка  $[4\nu^2 - \nu^4; 3]$ , где  $\nu = F'(v)\tau/h$ . Можно положить

$$\omega = 4\nu^2 - \nu^4,$$

что приведет к снижению диссипативных свойств схемы, а для уменьшения дисперсионных свойств схемы взять

$$\omega = \frac{(4\nu^2 + 1)(4 - \nu^2)}{5}.$$

Метод Уорминга-Катлера-Ломакса:

$$\begin{aligned}
 v_m^{(1)} &= v_m^n - \frac{2\tau}{3h} (F_{m+1}^n - F_m^n), \\
 v_m^{(2)} &= \frac{1}{2} \left( v_m^n + v_m^{(1)} - \frac{2\tau}{3h} \left( F(v_m^{(1)}) - F(v_{m-1}^{(1)}) \right) \right), \\
 v_m^{n+1} &= v_m^n - \frac{\tau}{24h} (-2F_{m+2}^n + 7F_{m+1}^n - 7F_{m-1}^n + 2F_{m-2}^n) - \\
 &\quad - \frac{3\tau}{8h} \left( F(v_{m+1}^{(2)}) - F(v_{m-1}^{(2)}) \right) - \\
 &\quad - \frac{\omega}{24} (v_{m+2}^n - 4v_{m+1}^n + 6v_m^n - 4v_{m-1}^n + v_{m-2}^n).
 \end{aligned} \tag{16}$$

Параметр  $\omega$  задается также, как в схеме Русанова.

## СХЕМА ГОДУНОВА

С.К.Годунов в 1959 г. предложил оригинальный метод решения одномерных задач с разрывными решениями. Опишем этот метод для решения одного квазилинейного уравнения (1). Метод состоит в том, что по известным значениям функции  $v$  на  $n$ -ом временном слое вычисляются приближенные значения  $F_{m+1/2}^{n+1/2}$ , а затем находятся значения  $\hat{v}$  по централизованной формуле

$$\hat{v} = v - \frac{\tau}{h} \left( F_{m+1/2}^{n+1/2} - F_{m-1/2}^{n+1/2} \right). \quad (17)$$

Значения  $v_{m+1/2}^{n+1/2}$ , необходимые для вычисления величин

$$F_{m+1/2}^{n+1/2} = F(v_{m+1/2}^{n+1/2}),$$

берутся равными в точке  $((n + 1/2)\tau, (m + 1/2)h)$  решению задачи Римана о распаде разрыва для уравнения (1) с кусочно-постоянной начальной функцией

$$u_0^n(x) = \begin{cases} v_m^n, & x < (m + 1/2)h, \\ v_{m+1}^n, & x > (m + 1/2)h, \end{cases}$$

при  $t = n\tau$ .

Говоря иными словами, для определения значений  $v_{m+1/2}^{n+1/2}$  ищется точное решение уравнения (1) с кусочно-постоянной начальной функцией  $u_0^n$  при  $t = n\tau$ , равной на интервале  $((m - 1/2)h, (m + 1/2)h)$  значению  $v_m^n$  и за значение  $v_{m+1/2}^{n+1/2}$  принимается величина этого решения в точке  $((n + 1/2)\tau, (m + 1/2)h)$ . Для избежания влияния двух различных точек разрыва функции  $u_0$  на значение в точке  $((n + 1/2)\tau, (m + 1/2)h)$  шаг  $\tau$  выбирается из условия

$$\max_m |F'(v_m^n)| \frac{\tau}{h} < 1.$$

Из сказанного следует, что метод Годунова в описанном здесь варианте существенно использует возможность точно решить для уравнения (1) задачу Коши с начальной функцией вида

$$u_0(x) = \begin{cases} u^-, & x < 0, \\ u^+, & x > 0, \end{cases} \quad (18)$$

где  $u^-$  и  $u^+$  произвольные константы.

Такая задача называется задачей Римана о распаде разрыва. Для ее решения требуется знать теорию разрывных обобщенных решений для уравнения (1).



## НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ БЮРГЕРСА

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (19)$$

в области  $Q = [0, T] \times [0, 1]$  с начальным и граничными условиями

$$u(0, x) = u_0(x), \quad (20)$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0. \quad (21)$$

Для построения разностной схемы перепишем уравнение (19) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{2}{3} \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{2}{3} u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (22)$$

## НЕЯВНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА С ЦЕНТРАЛЬНЫМИ РАЗНОСТЯМИ

Для задачи (22),(20),(21) рассмотрим р.с.

$$\begin{aligned} v_t + \frac{2}{3}(v\hat{v})_x + \frac{2}{3}v\hat{v}_x &= \mu\hat{v}_{x\bar{x}}, & 0 < m < M, \\ \hat{v}_0 = \hat{v}_M &= 0, \\ v_m^0 &= u_0(mh), & 0 \leq m \leq M. \end{aligned} \tag{23}$$

Для нахождения решения разностной схемы (23) на каждом временном слое требуется решать СЛАУ

$$A\hat{v} = b,$$

где  $A = E + \frac{\tau}{3h}A_1 + \frac{\tau\mu}{h^2}A_2$ .

Матрица  $A_1$  кососимметричная

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & v_1 + v_2 & 0 & \dots & 0 \\ -v_1 - v_2 & 0 & v_2 + v_3 & 0 & \dots \\ 0 & -v_2 - v_3 & 0 & v_3 + v_4 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Симметричная трехдиагональная матрица  $A_2$  — матрица второй разностной производной, по диагонали которой стоят 2, а на двух побочных — -1. Поэтому

$$(Av, v) = (v, v) + \frac{\tau}{3h}(A_1v, v) + \frac{\tau\mu}{h^2}(A_2v, v) \geq \|v\|^2.$$

Следовательно, решение разностной схемы (23) всегда существует и единственно.

## УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОШИБКИ

Обозначим разность между решением разностной схемы (23) и точным решением задачи (19)-(21) в узлах сетки через функцию  $w$

$$v = u + w.$$

Функция  $w$  является решением задачи

$$\begin{aligned} w_t + \frac{2}{3}(u\hat{w})_x^0 + \frac{2}{3}u\hat{w}_x^0 + \frac{2}{3}(w\hat{u})_x^0 + \frac{2}{3}w\hat{u}_x^0 + \frac{2}{3}(w\hat{w})_x^0 + \frac{2}{3}w\hat{w}_x^0 &= \mu\hat{w}_{x\bar{x}} + \varphi, \quad 0 < m < M, \\ \hat{w}_0 = \hat{w}_M &= 0, \\ w_m^0 &= 0, \quad 0 \leq m \leq M. \end{aligned} \tag{24}$$

В уравнениях (24) через функцию  $\varphi$  обозначена невязка, с которой удовлетворяет точное решение задачи (19)-(21) уравнениям (24).

$$u_t + \frac{2}{3}(u\hat{u})_x^0 + \frac{2}{3}u\hat{u}_x^0 + \varphi = \mu\hat{u}_{x\bar{x}}, \quad 0 < m < M.$$

Для гладкого решения задачи (19)-(21) ( $u \in C^{2,4}(Q)$ ) значения  $\varphi$  являются величинами порядка  $\tau + h^2$ .

## ОЦЕНКА ОШИБКИ В $L_2$

Домножив уравнения ошибки (24) скалярно на  $\hat{w}$ , получаем тождество

$$\begin{aligned} & (\hat{w}, w_t) + \frac{2}{3}(\hat{w}, ((u+w)\hat{w})_x) + \frac{2}{3}(\hat{w}, (u+w)\hat{w}_x) + \\ & + \frac{2}{3}(\hat{w}, w\hat{u}_x + (w\hat{u})_x) = \mu(\hat{w}, \hat{w}_{x\bar{x}}) + (\hat{w}, \varphi). \end{aligned} \quad (25)$$

Каждое из слагаемых тождества (25) оценим нужным нам образом

$$\begin{aligned} (\hat{w}, \hat{w}_t) &= \frac{1}{2\tau}\|\hat{w}\|^2 - \frac{1}{2\tau}\|w\|^2 + \frac{\tau}{2}\|w_t\|^2, \\ (\hat{w}, ((u+w)\hat{w})_x) + (\hat{w}, (u+w)\hat{w}_x) &= 0, \\ |(\hat{w}, w\hat{u}_x + (w\hat{u})_x)| &\leq C(\|u'\|_C(\|\hat{w}\|^2 + \|w\|^2) + \frac{\|u\|_C^2}{\mu}\|\hat{w}\|^2) + \mu\|w_x\|^2, \\ (\hat{w}, \hat{w}_{x\bar{x}}) &= -\|\hat{w}_x\|^2, \\ (\hat{w}, \varphi) &\leq \frac{1}{2}(\|\varphi\|^2 + \|\hat{w}\|^2). \end{aligned}$$

С помощью этих неравенств из тождества (25) получаем неравенство

$$\|\hat{w}\|^2 + 2\tau\mu[\|\hat{w}_x\|^2 - \|w\|^2 - 2\tau\mu\|w_x\|^2] \leq \tau\frac{C}{\mu}(\|w\|^2 + \|\hat{w}\|^2) + \tau\|\varphi\|^2. \quad (26)$$

Применив к последнему неравенству лемму Гронуолла, получаем оценку

$$\max_{n=1,\dots,N} \sqrt{\|w^n\|^2 + 2\tau\mu\|w_x^n\|^2} \leq e^{CT/\mu} \sqrt{\tau \sum_{n=1}^N \|\varphi\|^2}.$$

## ОЦЕНКА ОШИБКИ В $W_2^1$

Домножив уравнения ошибки (24) скалярно на  $\hat{w}_{x\bar{x}}$ , получаем тождество

$$\begin{aligned} & (\hat{w}_{x\bar{x}}, w_t) + \frac{2}{3}(\hat{w}_{x\bar{x}}, ((u+w)\hat{w})_x) + \frac{2}{3}(\hat{w}_{x\bar{x}}, (u+w)\hat{w}_x) + \\ & + \frac{2}{3}(\hat{w}_{x\bar{x}}, w\hat{w}_x + (w\hat{w})_x) = \mu(\hat{w}_{x\bar{x}}, \hat{w}_{x\bar{x}}) + (\hat{w}_{x\bar{x}}, \varphi). \end{aligned} \quad (27)$$

Каждое из слагаемых тождества (27) оценим нужным нам образом

$$\begin{aligned} -(\hat{w}_{x\bar{x}}, \hat{w}_t) &= \frac{1}{2\tau} \|\hat{w}_x\|^2 - \frac{1}{2\tau} \|w_x\|^2 + \frac{\tau}{2} \|w_{xt}\|^2, \\ &(\hat{w}_{x\bar{x}}, ((u+w)\hat{w})_x) + (\hat{w}_{x\bar{x}}, (u+w)\hat{w}_x) \leq \\ &\leq \frac{C}{\mu} \left( (\|\hat{w}\|_2^1)^2 + (\|w\|_2^1)^2 (\|\hat{w}\|_2^1)^2 \right) + \frac{\mu}{6} \|\hat{w}_{x\bar{x}}\|^2, \\ |(\hat{w}_{x\bar{x}}, w\hat{w}_x + (w\hat{w})_x)| &\leq \frac{C}{\mu} (\|w\|_2^1)^2 + \frac{\mu}{6} \|\hat{w}_{x\bar{x}}\|^2, \\ (\hat{w}_{x\bar{x}}, \hat{w}_{x\bar{x}}) &= \|\hat{w}_{x\bar{x}}\|^2, \\ (\hat{w}_{x\bar{x}}, \varphi) &\leq \frac{3}{2\mu} \|\varphi\|^2 + \frac{\mu}{6} \|\hat{w}_{x\bar{x}}\|^2. \end{aligned}$$

С помощью этих неравенств из тождества (27) получаем неравенство

$$\|\hat{w}_x\|^2 + \tau\mu \|\hat{w}_{x\bar{x}}\|^2 - \|w_x\|^2 \leq \tau \frac{C}{\mu} \left( (\|w\|_2^1)^2 + (\|\hat{w}\|_2^1)^2 + (\|w\|_2^1)^2 (\|\hat{w}\|_2^1)^2 \right) + \tau \frac{3}{\mu} \|\varphi\|^2.$$

Сложив полученное неравенство с неравенством (26), имеем

$$\begin{aligned} & (\|\hat{w}\|_2^1)^2 + \tau\mu \|\hat{w}_{x\bar{x}}\|^2 - (\|w\|_2^1)^2 \leq \\ & \leq \tau \frac{C}{\mu} \left( (\|w\|_2^1)^2 + (\|\hat{w}\|_2^1)^2 + (\|w\|_2^1)^2 (\|\hat{w}\|_2^1)^2 \right) + \tau \left( \frac{3}{\mu} + 1 \right) \|\varphi\|^2. \end{aligned} \quad (28)$$

Пусть  $\tau$  и  $h$  выбраны так, что

$$\tau \leq \tau_{max} \quad \text{и} \quad h \leq h_{max},$$

где

$$e^{CT/\mu} \sqrt{\tau_{max} \left( \frac{3}{\mu} + 1 \right) \sum_{n=1}^N \|\varphi(\tau_{max}, h_{max})\|^2} \leq 1.$$

Тогда по индукции, используя лемму Гронуолла, получаем оценку

$$\max_{n=1, \dots, N} \sqrt{(\|w^n\|_2^1)^2 + 2\tau\mu \|w_{x\bar{x}}^n\|^2} \leq e^{CT/\mu} \sqrt{\tau \left( \frac{3}{\mu} + 1 \right) \sum_{n=1}^N \|\varphi\|^2}.$$

## НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (29)$$

Уравнение будем рассматривать в области  $Q = [0, T] \times [0, 1]$  с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x) \quad (30)$$

и простейшими граничными условиями

$$u(t, 0) = u_l(t), \quad u(t, 1) = u_r(t). \quad (31)$$

Относительно задачи (29)-(31) будем предполагать, что

А) решение задачи существует, единственно и  $u \in C^{2,4}(Q)$ ;

В) функция  $\mu(u)$  принимает значения из  $[\mu_{min}; \mu_{max}]$  при  $u \in (u_{min} - \Delta; u_{max} + \Delta)$ , где  $u_{min} = \inf_{(t,x) \in Q} u(t, x)$ ,  $u_{max} = \sup_{(t,x) \in Q} u(t, x)$ , а величины  $\Delta$  и  $\mu_{min}$  больше нуля;

С)  $\mu(u) \in C^3(u_{min}; u_{max}) \cap C^1(u_{min} - \Delta; u_{max} + \Delta)$ .

Для решения задачи (29)-(31) рассмотрим разностную схему

$$\begin{aligned} v_t &= \tilde{\mu} \hat{v}_{x\bar{x}} + ((\mu(v_s) - \tilde{\mu})v_x)_{\bar{x}}, & 0 < m < M, \\ \hat{v}_0 &= u_l((n+1)\tau), & \hat{v}_M &= u_r((n+1)\tau), \\ v_m^0 &= u_0(mh), & 0 \leq m \leq M, \end{aligned} \quad (32)$$

где  $\tilde{\mu}^n = \max_{m=0}^{M-1} \mu(v_s^n)$ .

**УТВЕРЖДЕНИЕ.** Решение разностной схемы (32) существует и единственно. Порядок аппроксимации на гладких решениях задачи (29)-(31)  $u \in C^{2,4}(Q)$  равен  $\tau + h^2$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Разностная схема (32) использует значение коэффициента теплопроводности с нижнего временного слоя. В случае нелинейных задач, когда  $\mu$  зависит от решения, такой способ аппроксимации не всегда является правильным. Бывает так, что значения  $\mu$  необходимо брать с верхнего временного слоя.

Выпишем уравнение для ошибки решения схемы (32)

$$\begin{aligned} w_t &= \tilde{\mu} \hat{w}_{x\bar{x}} + ((\mu(u_s + w_s) - \tilde{\mu})w_x)_{\bar{x}} + (\mu'_u(u_s + \theta w_s)w_s u_x)_{\bar{x}} + \varphi, & 0 < m < M, \\ \hat{w}_0 &= 0, & \hat{w}_M &= 0, \\ w_m^0 &= 0, & 0 \leq m \leq M, \end{aligned} \quad (33)$$

где  $\varphi$  — невязка, с которой удовлетворяет точное решение задачи (29)-(31) уравнениям разностной схемы (32), а функция  $\theta$  имеет значения из  $[0, 1]$ .

Для вывода уравнений (33) используется стандартная техника и следующая цепочка равенств

$$\mu(v_s)v_x = \mu(v_s)u_x + \mu(v_s)w_x = \mu(u_s)u_x + \mu'_u(u_s + \theta w_s)w_s u_x + \mu(u_s + w_s)w_x.$$

## ОЦЕНКА В НОРМЕ $L_2$

Предположим, что для некоторого  $n$  верна оценка

$$\max_{k=0}^n \sqrt{\|w^k\|^2 + \tau \tilde{M}^k \|w_x^k\|^2} \leq K_1 = e^{C_1 T} \sqrt{\tau \sum_{n=1}^N \|\varphi\|^2}, \quad (34)$$

где величина  $K_1$  такова, что выполнено неравенство

$$\frac{K_1}{\sqrt{h}} \leq \Delta. \quad (35)$$

Величина  $\tilde{M}^k = \tilde{\mu}^k - \min_{m=0}^{M-1} \mu(v_{s,m}^k)$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Это предположение выполнено, если

$$K_1 = C_0(\tau + h^2) \quad (36)$$

и

$$\frac{C_0(\tau + h^2)}{\sqrt{h}} \leq \Delta. \quad (37)$$

Неравенство (36) означает, что точность решения есть величина порядка аппроксимации на гладком решении, а неравенство (37) накладывает ограничения на шаги сетки вида

$$\tau \leq \tau_{\max}, \quad h \leq h_{\max}, \quad \tau \leq C\sqrt{h}.$$

Последнее неравенство означает условие на шаги сетки: шаг  $\tau$  должен быть выбран в зависимости от выбора шага  $h$ .

Докажем, что при этом предположении оценка (34) выполнена и для временного слоя с номером  $n + 1$ .

Заметим, что для всех временных слоев  $k \leq n$ , из неравенств (34) и (35) и теоремы вложения для функций одной переменной

$$\|w\|_C \leq \frac{1}{\sqrt{h}} \|w\|$$

следует

$$\|w^k\|_C \leq \Delta. \quad (38)$$

Поэтому из условий "В" и "С" получаем

$$\begin{aligned} \mu_{min}^k &\leq \|\mu(u_s^k + w_s^k)\|_C \leq \mu_{max}^k, \\ \|\mu'_u(u_s^k + \theta w_s^k)\|_C &\leq C. \end{aligned} \quad (39)$$

Умножая уравнение для ошибки скалярно на  $\hat{w}$ , получаем для всех  $k \leq n$  тождество  $(\hat{w}, w_t) = (\hat{w}, \tilde{\mu} \hat{w}_{x\bar{x}}) + (\hat{w}, ((\mu(u_s + w_s) - \tilde{\mu}) w_x)_{\bar{x}}) + (\hat{w}, (\mu'_u(u_s + \theta w_s) w_s u_x)_{\bar{x}}) + (\hat{w}, \varphi)$ . (40)

Из этого тождества, учитывая оценки (39), стандартной техникой получается неравенство

$$\|\hat{w}\|^2 - \|w\|^2 + \tau(\tilde{\mu} - \mu_{min})(\|\hat{w}_x\|^2 - \|w_x\|^2) \leq \tau C(\mu_{min}) \|w\|^2 + \tau(\|\hat{w}\|^2 + \|\varphi\|^2). \quad (41)$$

Из которого по разностной лемме Гронуолла получаем

$$\max_{k=1, \dots, n+1} \sqrt{\|w^k\|^2 + \tau(\tilde{\mu}^k - \mu_{min}^k) \|w_x^k\|^2} \leq e^{C_1 T} \sqrt{\tau \sum_{n=1}^N \|\varphi\|^2}.$$

Откуда следует оценка (34) для  $n + 1$ -го временного слоя. По индукции справедливость этой оценки имеем для всех  $n \leq N$ .



## ОЦЕНКА В НОРМЕ $W_2^1$

Предположим, что для некоторого  $n$  верна оценка

$$\max_{k=0}^n \sqrt{(\|w^k\|_2^1)^2 + \tau \tilde{M}^k \|w_{x\bar{x}}^k\|^2} \leq K_2 = e^{C_2 T} \sqrt{\tau C_2 \sum_{n=1}^N \|\varphi\|^2}. \quad (42)$$

Величина  $\tilde{M}^k = \tilde{\mu}^k - \min_{m=0}^{M-1} \mu(v_{s,m}^k)$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Это предположение выполнено, если

$$K_2 = C_0(\tau + h^2) \quad (43)$$

и

$$C_0(\tau + h^2) \leq 2\Delta. \quad (44)$$

Неравенство (43) означает, что точность решения есть величина порядка аппроксимации на гладком решении, а неравенство (44) накладывает ограничения на шаги сетки вида

$$\tau \leq \tau_{\max}, \quad h \leq h_{\max}.$$

Докажем, что в этом случае оценка (42) выполнена и для временного слоя с номером  $n + 1$ .

Заметим, что для всех временных слоев  $k$ , где  $k \leq n$ , из сделанных предположений и теоремы вложения для одномерных функций

$$\|w\|_C \leq \frac{\sqrt{X}}{2} \|w_x\|$$

следует

$$\|w^k\|_C \leq \Delta. \quad (45)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mu_{min}^k &\leq \|\mu(u_s^k + w_s^k)\|_C \leq \mu_{max}^k, \\ \|\mu'_u(u_s^k + \theta w_s^k)\|_C &\leq C. \end{aligned} \quad (46)$$

Умножая уравнение для ошибки скалярно на  $\hat{w}_{x\bar{x}}$ , получаем для всех  $k \leq n$  тождество

$$(\hat{w}_{x\bar{x}}, w_t) = (\hat{w}_{x\bar{x}}, \tilde{\mu} \hat{w}_{x\bar{x}}) + (\hat{w}_{x\bar{x}}, ((\mu(u_s + w_s) - \tilde{\mu}) w_x)_{\bar{x}}) + (\hat{w}_{x\bar{x}}, (\mu'_u(u_s + \theta w_s) w_s u_x)_{\bar{x}}) + (\hat{w}_{x\bar{x}}, \varphi). \quad (47)$$

Из этого тождества, учитывая оценки (46), стандартной техникой получается неравенство

$$\|\hat{w}_x\|^2 - \|w_x\|^2 + \tau(\tilde{\mu} - \mu_{min})(\|\hat{w}_{x\bar{x}}\|^2 - \|w_{x\bar{x}}\|^2) \leq \tau C(\mu_{min})(\|w\|_2^1)^2 + (\|\hat{w}\|_2^1)^2 + \tau \|\varphi\|^2. \quad (48)$$

Сложив неравенства (41) и (48), получим неравенство

$$(\|\hat{w}\|_2^1)^2 - (\|w\|_2^1)^2 + \tau(\tilde{\mu} - \mu_{min})(\|\hat{w}_{x\bar{x}}\|^2 - \|w_{x\bar{x}}\|^2) \leq \tau C((\|\hat{w}\|_2^1)^2 + (\|w\|_2^1)^2 + \|\varphi\|^2).$$

Из которого по разностной лемме Гронуолла получаем

$$\max_{k=1, \dots, n+1} \sqrt{(\|w^k\|_2^1)^2 + \tau(\tilde{\mu}^k - \mu_{min}^k) \|w_{x\bar{x}}^k\|^2} \leq e^{C_2 T} \sqrt{\tau C_2 \sum_{n=1}^N \|\varphi\|^2}.$$

Откуда следует оценка (42) для  $n+1$ -го временного слоя. По индукции справедливость этой оценки имеем для всех  $n \leq N$ .

## КРИТЕРИИ МОНОТОННОСТИ

Все линейные схемы на явных двухслойных шаблонах, используя метод неопределенных коэффициентов, можно записать в виде

$$\hat{v}_m = \sum_k a_k(\tau, h) v_{m+k}. \quad (49)$$

В настоящее время наиболее распространены следующие критерии монотонности, используемые при построении разностных схем для уравнений гиперболического типа.

- Монотонные по Фридрихсу (1954) схемы, для которых все коэффициенты в уравнении (49) должны быть неотрицательными (и из условия аппроксимации их сумма равна единице):

$$a_k(\tau, h) \geq 0, \quad \sum_k a_k(\tau, h) = 1.$$

- Монотонные по С.К.Годунову (1959) линейные схемы, в которых первые пространственные разности для всех  $m$  имеют одинаковый знак на временных слоях  $t^n = n\tau$  и  $t^{n+1} = (n+1)\tau$ :

$$v_{m+1}^{n+1} - v_m^{n+1} \geq 0, \quad \text{если} \quad v_{m+1}^n - v_m^n \geq 0 \quad (\text{и наоборот}).$$

- Монотонные по А.Хартену (1983) схемы (TVD — total variational diminishing — схемы, являющиеся развитием более ранних гибридных схем и метода коррекции потоков), в которых монотонность определяется из условия невозрастания полной вариации ( $TV(v)$ ):

$$TV(\hat{v}) = \sum_m |\hat{v}_{m+1} - \hat{v}_m| \leq \sum_m |v_{m+1} - v_m| = TV(v).$$

Это неравенство часто называют TVD-условием.

- Монотонные схемы, опирающиеся на характеристическое свойство точного решения (Van Leer, 1974)

$$\min\{v_1, v_2\} \leq \hat{v}_m \leq \max\{v_1, v_2\},$$

где  $v_1, v_2$  — значения сеточной функции на слое  $t^n$  в двух ближайших узлах  $x = x_1$  и  $x = x_2$  к характеристике, исходящей из рассчитываемой точки  $(t^{n+1}, x_m)$ . Этот критерий часто называют минимаксным условием.

В линейном случае эти определения монотонности в общей области их действия эквивалентны. В частности все они являются достаточными условиями устойчивости разностных схем. Однако они имеют разные возможности для их обобщения на случаи нелинейных схем и другие сеточные шаблоны (неявные, многослойные и т.д.)

## УДАРОУЛАВЛИВАЮЩИЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ

Для достижения высокой точности численного решения как в разрывных, так и в гладких областях предложены удароулавливающие схемы, называемые схемами высокого разрешения. Основная идея, стоящая за всеми подобными схемами, как можно больше использовать схемы высших порядков в областях гладкости решения и в то же время разумно добавлять достаточное рассеяние в локализованную область высокого градиента с тем, чтобы избежать возможной численной осцилляции. В результате удароулавливающие схемы нелинейны даже при применении их к линейным задачам.

Рассмотрим, два подхода для построения удароулавливающих схем: алгебраический и геометрический.

## TVD СХЕМЫ

TVD-схемы строятся с использованием алгебраического подхода к построению ударо-улавливающих схем. В этом подходе для определения граничных потоков применяется линейная комбинация приближений низкого  $f^L$  и высокого  $f^H$  порядков:

$$f_{m+1/2} = f_{m+1/2}^L + \phi_{m+1/2}(f_{m+1/2}^H - f_{m+1/2}^L). \quad (50)$$

В TVD-схемах граничный поток  $f_{m+1/2}^L$  задается в виде  $f_{m+1/2}^{UP}$  потока, а  $f_{m+1/2}^H$  в виде либо  $f_{m+1/2}^{CN}$ , либо  $f_{m+1/2}^{LW}$  потока. В более сложных вариантах TVD-схем эти потоки немного корректируются.

Хорошо известно, что противопотоковая схема слишком диссипативная, в то время как схемы с центральной разностью и "тренога" слишком дисперсионные в области сильных градиентов. Ключ к успеху в алгебраическом подходе заключается в правильном вычислении весовой функции  $\phi_{m+1/2}$  таким образом, чтобы решение, вычисленное с использованием численного потока, определенного по формуле (50) удовлетворяло некоторым желательным требованиям. Одно из таких требований, названное *уменьшением общей вариации* (total variation diminishing, TVD).

## ВЫБОР ВЕСОВОЙ ФУНКЦИИ

В простейших вариантах TVD-схем выбор весовой функции осуществляется например так

$$\phi(r) = \text{minimod}(1, r).$$

Функция *minimod* от двух аргументов определяется как

$$\text{minimod}(a, b) = \text{sign}(a) \max(0, \min(|a|, \text{sign}(a) \cdot b)).$$

Возможен более "сложный" способ выбора весовой функции

$$\phi(r^+, r^-) = \text{minimod}(1, r^+, r^-).$$

"Трехаргументная" функция *minimod* равна наименьшему по модулю аргументу, если все аргументы одного знака. В противном случае ее значение берется равным нулю.

Величина  $r$  вычисляется по формуле

$$r = \frac{(|a_{m+1/2-\sigma}| - \lambda a_{m+1/2-\sigma}^2) \Delta_{m+1/2-\sigma}}{(|a_{m+1/2}| - \lambda a_{m+1/2}^2) \Delta_{m+1/2}},$$

где  $\sigma = \text{sign}(a_{m+1/2})$ , величины  $r^+$  и  $r^-$  определяются отношениями

$$r^+ = \frac{\Delta_{m+1/2+1}}{\Delta_{m+1/2}}, \quad r^- = \frac{\Delta_{m+1/2-1}}{\Delta_{m+1/2}}.$$

В литературе предложено очень много способов выбора весовой функции. Окончательный выбор нужно делать, тестируя эти способы на модельных задачах решаемой задачи.

## FCT СХЕМЫ

Важным подклассом TVD-схем являются схемы, называемые схемами потока, корректирующего перенос (flux corrected transport, FCT). С точки зрения сохранения монотонности решения FCT является одним из типов TVD схемы. Отличие же в том, что обычные TVD схемы (например, приведенные выше) одношаговые, тогда как у FCT два шага. Двухшаговая FCT – это, по существу, гибридная схема, состоящая из комбинированных схем первого и высшего порядков. Она вычисляет предварительные данные из схемы первого порядка, а затем фильтрует поправку высшего порядка, используя весовые множители, чтобы предотвратить появление новых экстремумов. Таким образом, в области, где искомая функция изменяется плавно, используется схема высшего порядка. В области резкого изменения искомой функции предпочтение отдается схеме низшего порядка.

Формально, FCT процедура такова:

- 1) вычисляется поток низкого порядка  $f_{m+1/2}^L$ ;
- 2) вычисляется поток высокого порядка  $f_{m+1/2}^H$ ;
- 3) определяется антидиффузионный поток

$$A_{m+1/2} = f_{m+1/2}^H - f_{m+1/2}^L;$$

- 4) вычисляется решение низкого порядка

$$v_m^{td} = v_m^n - \frac{\tau}{h}(f_{m+1/2}^L - f_{m-1/2}^L);$$

- 5) ограничивается или корректируется антидиффузионный поток

$$A^c = A^c(A);$$

- 6) вычисляется решение на верхнем временном слое, используя ограниченный антидиффузионный поток

$$v_m^{n+1} = v_m^{td} - \frac{\tau}{h}(A_{m+1/2}^c - A_{m-1/2}^c).$$

В одном из вариантов FCT-схемы поток высокого порядка определяется схемой "треугога", а поток низкого порядка – противопотоковой схемой. Ограниченный антидиффузионный поток задается следующей формулой

$$A_{m+1/2}^c = s \cdot \max \left\{ 0, \min \left[ |A_{m+1/2}|, \frac{s \cdot h(v_{m+2}^{td} - v_{m+1}^{td})}{\tau}, \frac{s \cdot h(v_m^{td} - v_{m-1}^{td})}{\tau} \right] \right\}, \quad (51)$$

где  $s = \text{sign}(A_{m+1/2})$ .

## MUSCL СХЕМЫ

В геометрическом подходе делаются попытки воссоздать зависимую переменную  $v$  в каждой ячейке, подчиненную определенным монотонным ограничениям. Такие ограничения переменная  $v$  получает на обеих сторонах границы,  $v_{m+1/2,L}$  и  $v_{m+1/2,R}$ . Граничный поток затем вычисляется с использованием приближенного или точного риманова аппарата. Первым схему такого рода предложил С.К.Годунов.

Можно увеличить порядок аппроксимации по пространственной переменной, если заменить в первоначальной схеме Годунова кусочно постоянную функцию на нижнем слое на кусочно линейную. В зарубежной литературе такие схемы получили название MUSCL (monotonic upwind scheme for conservational laws – монотонная противопотоковая схема для законов сохранения).

Простейшим примером таких схем служит следующий алгоритм. Значение зависимой переменной на границе ячейки сетки получается посредством следующего ограничителя наклона:

$$\begin{aligned} v_{m+1/2,R} &= v_{m+1} - \frac{1}{4} \left[ (1 - \eta) \Delta_{m+3/2}^* + (1 + \eta) \Delta_{m+1/2}^{**} \right], \\ v_{m+1/2,L} &= v_m + \frac{1}{4} \left[ (1 - \eta) \Delta_{m-1/2}^{**} + (1 + \eta) \Delta_{m+1/2}^* \right], \\ \Delta_{m+1/2}^* &= \text{minimod} \left[ \Delta_{m+1/2}, \omega \Delta_{m-1/2} \right], \\ \Delta_{m+1/2}^{**} &= \text{minimod} \left[ \Delta_{m+1/2}, \omega \Delta_{m+3/2} \right], \end{aligned} \quad (52)$$

где величина  $\Delta_{m+1/2} = v_{m+1} - v_m$ , а  $\omega$  – параметр сжатия, удовлетворяет неравенству

$$1 \leq \omega \leq \frac{3 - \eta}{1 - \eta}.$$

Величина  $\eta$  может принимать одно из следующих значений

$$-1, \quad -1/3, \quad 0, \quad 1/3, \quad 1/2, \quad 1. \quad (53)$$

Граничный поток определяется по следующей формуле

$$\begin{aligned} f_{m+1/2} &= \frac{1}{2} \left[ F(v_{m+1/2,R}) + F(v_{m+1/2,L}) - \right. \\ &\quad \left. \left| \frac{F(v_{m+1/2,R}) - F(v_{m+1/2,L})}{v_{m+1/2,R} - v_{m+1/2,L}} \right| (v_{m+1/2,R} - v_{m+1/2,L}) \right]. \end{aligned} \quad (54)$$

Для достижения временной дискретизации второго порядка (в дополнение к приведенной выше пространственной дискретизации) можно заменить явную эйлеровскую дискретизацию схемой предиктор-корректор.



## ENO СХЕМЫ

TVD-схемы имеют порядок точности не выше первого. Схемы, имеющие равномерно второй порядок точности были названы ENO-схемами (essentially nonoscillatory – существенно неколебательные). Эти схемы не обладают нежелательными обрезаящими явлениями, но обладают большими временными затратами по сравнению с TVD-схемами. Это вызвано тем, что ENO-схемы используют более широкий (7-точечный вместо 5-точечного) конечно-разностный шаблон.

Примером ENO-схемы служит следующий алгоритм. Угол наклона  $s_m^n$  функции

$$v = v_m^n + s_m^n \frac{x - x_m}{h}$$

на каждом отрезке задается формулой

$$s_m^n = \text{minimod}[\Delta_{m+1/2} - D_{m+1/2}, \Delta_{m-1/2} + D_{m-1/2}], \quad (55)$$

где величина  $D$  характеризует кривизну графика функции  $v$  :

$$D_{m+1/2} = \text{minimod}[v_{m+1} - 2v_m + v_{m-1}, v_{m+2} - 2v_{m+1} + v_m].$$

Величина потока на границе вычисляется по формуле

$$f_{m+1/2} = \begin{cases} \frac{F(v_m^n) + a_{m+1/2}(1 - a_{m-1/2}\tau/h)s_m^n/2}{1 + (a_{m+1/2} - a_{m-1/2})\tau/h}, \\ \text{если } a_{m+1/2} \geq 0, \\ \frac{F(v_{m+1}^n) - a_{m+1/2}(1 + a_{m+3/2}\tau/h)s_{m+1}^n/2}{1 + (a_{m+1/2} - a_{m-1/2})\tau/h}, \\ \text{если } a_{m+1/2} < 0. \end{cases} \quad (56)$$

## РРМ СХЕМЫ

По схеме РРМ (piecewise-parabolic method - кусочно-параболический метод) ищется кусочно-непрерывная функция  $v$ , которая на каждом отрезке  $[x_{m-1/2}; x_{m+1/2}]$  является многочленом второй степени, записанным в форме

$$v(x) = v_{m-1/2,R} + \xi[\Delta v_m + v_{6,m}(1 - \xi)], \quad (57)$$

где

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x - x_m}{x_{m+1/2} - x_{m-1/2}}, \\ \Delta v_m &= v_{m+1/2,L} - v_{m-1/2,R}, \\ v_{6,m} &= 6[v_m - (v_{m+1/2,L} + v_{m-1/2,R})/2]. \end{aligned}$$

Для определения значений  $v_{m+1/2,L}$  и  $v_{m-1/2,R}$  вычислим значения  $v_{m+1/2}$  и  $v_{m-1/2}$  по формуле

$$v_{m+1/2} = (v_{m+1} + v_m)/2 + (\delta_l v_m - \delta_l v_{m+1})/6, \quad (58)$$

где

$$\delta_l v_m = \begin{cases} \min(|\delta v_m|, 2\Delta_{m+1/2}, 2\Delta_{m-1/2})\text{sign}(\delta v_m), & \text{если } \Delta_{m+1/2} \cdot \Delta_{m-1/2} > 0, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

и

$$\delta v_m = (v_{m+1} - v_{m-1})/2.$$

**Замечание.** Если  $\delta_l v_m = \delta v_m$ , то величина  $v_{m+1/2}$  вычисляется по формуле

$$v_{m+1/2} = \frac{7}{12}(v_{m+1} + v_m) - \frac{1}{12}(v_{m+2} + v_{m+1}).$$

Величины  $v_{m+1/2}$  и  $v_{m-1/2}$  определяют значения  $v_{m+1/2,L}$  и  $v_{m-1/2,R}$  :

$$v_{m+1/2,L} = v_{m+1/2} \quad \text{и} \quad v_{m-1/2,R} = v_{m-1/2}, \quad (59)$$

если функция  $v(x)$ , задаваемая формулой (57), принимает на отрезке  $[x_{m-1/2}; x_{m+1/2}]$  значения только между  $v_{m+1/2,L}$  и  $v_{m-1/2,R}$ . Другими словами  $v(x)$  должна быть монотонна на отрезке  $[x_{m-1/2}; x_{m+1/2}]$ . Это свойство будет выполняться в области гладкости искомой функции и, в результате, функция  $v(x)$  будет непрерывна в точках  $x_{m+1/2}$ .

В противном случае значения  $v_{m+1/2,L}$  и  $v_{m-1/2,R}$  изменяются так, чтобы  $v(x)$  стала монотонной функцией на каждом отрезке  $[x_{m-1/2}; x_{m+1/2}]$  по следующему правилу.

Обозначим

$$d_1 = v_{m+1/2,L} - v_m \quad \text{и} \quad d_2 = v_{m-1/2,R} - v_m.$$

Тогда изменим значения  $v_{m+1/2,L}$  и  $v_{m-1/2,R}$ , определенные по правилу (59), следующим образом:

$$v_{m+1/2,L} = v_m \quad \text{и} \quad v_{m-1/2,R} = v_m, \quad \text{если} \quad -d_1 \cdot d_2 \leq 0,$$

$$v_{m-1/2,R} = 3v_m - 2v_{m+1/2,L}, \quad \text{если} \quad -(d_1^2 - d_2^2) > (d_1 - d_2)^2/3, \quad (60)$$

$$v_{m+1/2,L} = 3v_m - 2v_{m-1/2,R}, \quad \text{если} \quad (d_1^2 - d_2^2) > (d_1 - d_2)^2/3. \quad (61)$$

Окончательно, поток на границе ячейки вычисляется так:

$$f_{m+1/2} = \begin{cases} F(\tilde{v}_{m+1/2,L}(a_{m+1/2}\tau)), & \text{если} \quad a_{m+1/2} \geq 0, \\ F(\tilde{v}_{m+1/2,R}(-a_{m+1/2}\tau)), & \text{если} \quad a_{m+1/2} < 0, \end{cases} \quad (62)$$

где

$$\tilde{v}_{m+1/2,L}(x) = v_{m+1/2,L} - \frac{\xi}{2} \left[ \Delta v_m - \left( 1 - \frac{2}{3}\xi \right) v_{6,m} \right],$$

при

$$\xi = \frac{x - x_m}{x_{m+1/2} - x_{m-1/2}},$$

и

$$\tilde{v}_{m+1/2,R}(x) = v_{m+1/2,R} + \frac{\xi}{2} \left[ \Delta v_{m+1} + \left( 1 - \frac{2}{3}\xi \right) v_{6,m+1} \right],$$

при

$$\xi = \frac{x - x_{m+1}}{x_{m+3/2} - x_{m+1/2}}.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложений к газовой динамике: М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства "Наука", 1968 г., 592 с.
2. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений: 2-е изд., испр. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012 г. — 656 с.
3. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва "Наука", М., 1976.
4. Попов А.В. Практикум на ЭВМ. Разностные методы решения квазилинейных уравнений первого порядка. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: издательство центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2003, — 128 с.
5. H.Q.Yang, A.J.Przekwas A Comparative Study of Advanced Shock-Capturing Schemes Applied to Burgers' Equation. Journal of Computational Physics 102, 1992, 139-159 p.