

СПЕЦКУРС

1/2 года

кафедры вычислительной математики
механико-математического факультета МГУ

**МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ
МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**

лектор - доцент Попов Анатолий Вадимович

2025 г.

ТЕМА 3.

**Квазилинейное уравнение
с одной пространственной переменной
и его решения**

рабочий конспект

© Механико-математический факультет МГУ, 2025 г.
© А.В.Попов, 2025 г.

КВАЗИЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ

Простейшим представителем нелинейных уравнений, описывающих конвективные процессы, является **квазилинейное уравнение**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(t, x, u) \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x, u), \quad (1)$$

где $u = u(t, x)$ — неизвестная функция, а a и f — известные функции трех переменных.

В верхней полуплоскости $Q = \{(t, x) | t > 0, -\infty < x < \infty\}$ для уравнения (1) ставится задача Коши

$$u(0, x) = u_0(x). \quad (2)$$

Интегрирование уравнения (1) сводится к решению системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt} = a(t, x, U), \quad \frac{dU}{dt} = f(t, x, U), \quad (3)$$

которую называют **характеристической системой** уравнения (1). Каждое ее решение

$$X = X(t), \quad U = U(t)$$

задает **характеристику** в пространстве переменных t, x, u .

Предположим, что функции a и f непрерывно дифференцируемы. Тогда через любую точку (t_0, x_0, u_0) проходит одна и только одна характеристика.

Задача Коши (1), (2) геометрически интерпретируется как задача построения интегральной поверхности уравнения (1), проходящей через заданную начальную кривую: $t = 0, u = u_0(x)$. Так как при этом мы хотим получить однозначную дифференцируемую функцию $u(t, x)$, эта поверхность должна однозначно проектироваться на плоскость $u = 0$ переменных t и x .

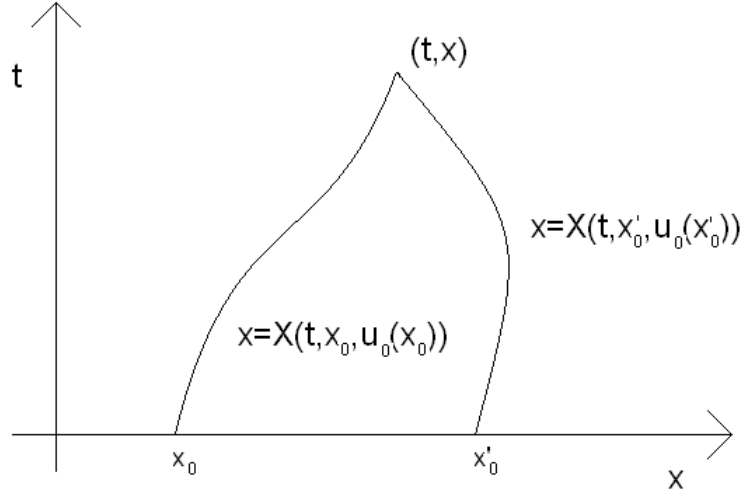


Рис. 1: Построение решения с помощью характеристик

СВЯЗЬ МЕЖДУ РЕШЕНИЯМИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

Поскольку решение u однозначно определяется вдоль каждой характеристики, проходящей через точку (t, x_0, u_0) , задача (1), (2) состоит в построении поверхности, состоящей из характеристик, проведенных через данную начальную кривую, и однозначно проектирующейся на плоскость $u = 0$.

Обозначим через $X = X(t, x_0, u_0)$, $U = U(t, x_0, u_0)$ решение характеристической системы (3), удовлетворяющее начальным условиям

$$X(0, x_0, u_0) = x_0, \quad U(0, x_0, u_0) = u_0.$$

Тогда решение $u(t, x)$ задается формулой

$$u(X(t, x_0, u_0), t) = U(t, x_0, u_0). \quad (4)$$

Эта формула неявным образом определяет функцию $u(t, x)$, которая в случае $u_0(x) \in C_1$ непрерывно дифференцируема во всех точках (t, x) , в которых однозначно решается относительно параметра x_0 уравнение

$$X(t, x_0, u_0) = x \quad (5)$$

и остается ограниченной правая часть уравнения (4).

Пусть в этих точках

$$x_0 = X^{-1}(t, x) = x_0(t, x).$$

Тогда из формулы (4) получаем явную формулу для решения $u(t, x)$

$$u(t, x) = U(t, x_0(t, x), u_0(x_0(t, x))). \quad (6)$$

СУЩЕСТВОВАНИЕ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

Для построения классического решения задачи (1), (2) при условии, что $u_0 \in C_1$ достаточно показать однозначную разрешимость уравнения (5) относительно x_0 . Для этого достаточно показать, что

$$X' = \frac{\partial X(t, x_0, u_0(x_0))}{\partial x_0} > 0, \quad (7)$$

так как $X(0, x_0, u_0(x_0)) \equiv x_0$ и

$$X'(0, x_0, u_0(x_0)) = 1. \quad (8)$$

Обозначая

$$U' = \frac{\partial U(0, x_0, u_0(x_0))}{\partial x_0} \quad (U'(0, x_0, u_0(x_0)) = u'_0(x_0)) \quad (9)$$

и дифференцируя характеристическую систему (3) по x_0 , получим

$$\frac{dX'}{dt} = a'_u U' + a'_x X', \quad \frac{dU'}{dt} = f'_u U' + f'_x X'. \quad (10)$$

Итак, X', U' удовлетворяют системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (10) с начальными условиями (8), (9). Отсюда ясно, что в силу непрерывности решения системы (10) и условия (8) существует такое $t_0 > 0$, что для при $0 \leq t \leq t_0$ неравенство (7) будет выполняться, а следовательно, в полосе $\{t, x\} | 0 \leq t \leq t_0, x \in R\}$ формула (6) задает классическое решение задачи (1), (2).

УРАВНЕНИЕ ХОПФА

Поясним сказанное на примере простейшего квазилинейного уравнения, называемого уравнением Хопфа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (11)$$

для которого поставим начальное условие

$$u(0, x) = u_0(x) = \begin{cases} u^- = \alpha a + \beta & \text{при } x \leq a, \\ \alpha x + \beta & \text{при } a \leq x \leq b, \\ u^+ = \alpha b + \beta & \text{при } x \geq b. \end{cases} \quad (12)$$

Характеристическая система уравнения (11)

$$\frac{dX}{dt} = U, \quad \frac{dU}{dt} = 0$$

с начальными условиями

$$X(0, x_0, u_0) = x_0, \quad U(0, x_0, u_0) = u_0$$

имеет решение

$$X(t, x_0, u_0) = x_0 + u_0 t, \quad U(t, x_0, u_0) = u_0, \quad (13)$$

которое остается ограниченным при любых значениях t, x_0, u_0 .

Итак, для нахождения значения u в точке (t, x) , требуется сделать следующие шаги.

1. Найти значение x_0 из уравнения

$$x = x_0 + u_0(x_0)t. \quad (14)$$

2. Найти значение u по формуле

$$u = u_0(x_0). \quad (15)$$

Значение u может быть найдено неоднозначно, если уравнение (14) имеет больше одного решения.

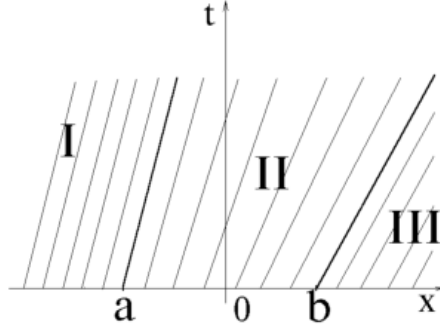


Рис. 2: характеристики

СЛУЧАЙ $\alpha > 0$

Пусть $\alpha \geq 0$. Проекции характеристик на плоскость $u = 0$ имеют вид, изображенный на рис. 2. В этом случае через каждую точку (t, x) полуплоскости $t \geq 0$ проходит единственная характеристика $x = X(t, x_0, u_0(x_0))$, т.е. уравнение (11) имеет единственное решение относительно x_0 . Функция $u(t, x)$ постоянна вдоль характеристик (11), поэтому в зоне I, т.е. при $x \leq a + u^-t$,

$$u(t, x) = u^- = \alpha a + \beta,$$

а в зоне III, при $x \geq b + u^+t$,

$$u(t, x) = u^+ = \alpha b + \beta.$$

В зоне II, при $a + u^-t \leq x \leq b + u^+t$, уравнение (14) принимает вид

$$x = x_0 + (\alpha x_0 + \beta)t$$

разрешается относительно x_0 следующим образом:

$$x_0 = \frac{x - \beta t}{1 + \alpha t}.$$

По формуле (6) определяем решение $u(t, x)$ в зоне II:

$$u(t, x) = u_0(x_0(t, x)) = \alpha \cdot \frac{x - \beta t}{1 + \alpha t} + \beta = \frac{\alpha x + \beta}{1 + \alpha t}.$$

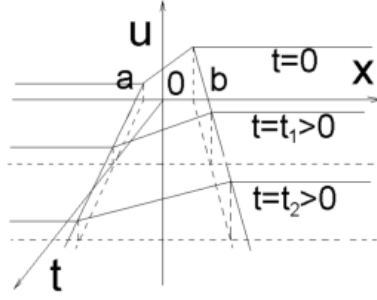


Рис. 3: интегральная поверхность при $\alpha > 0$

Итак, функция $u(t, x)$ при $\alpha \geq 0$ задается формулой

$$u(t, x) = \begin{cases} u^- = \alpha a + \beta & \text{при } x \leq a + u^- t, \\ \frac{\alpha x + \beta}{1 + \alpha t} & \text{при } a + u^- t \leq x \leq b + u^+ t, \\ u^+ = \alpha b + \beta & \text{при } x \geq b + u^+ t. \end{cases} \quad (16)$$

Построенная функция не является классическим решением задачи Коши (11)-(12), поскольку хоть функция $u(t, x)$ при $t \geq 0$ и непрерывна, но ее производная терпит разрыв в точках, лежащих на прямых $x = a + u^- t$ и $x = b + u^+ t$. Однако можно ввести понятие решения задачи Коши в широком смысле.

Определение. Непрерывную функцию $u(t, x)$ назовем решением задачи в широком смысле, если $u(0, x) = u_0(x)$ и функция $u(t, x)$ непрерывно дифференцируема по переменному t вдоль характеристики $x = X(t, x_0, u_0)$, причем

$$\frac{d}{dt} u(t, X(t, x_0, u_0)) = 0.$$

Функция $u(t, x)$, заданная формулой (16), является решением задачи (11)-(12) в широком смысле. В пространстве переменных t, x, u решение (16) определяет интегральную поверхность S , изображенную на рис. 3. Эта поверхность однозначно проектируется на плоскость $u = 0$ при $t \geq 0$.

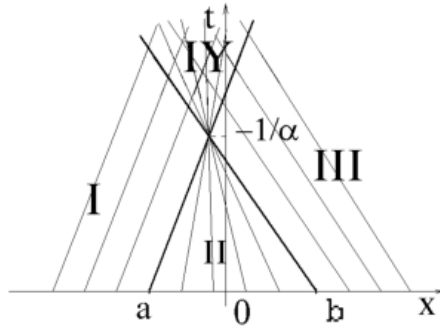


Рис. 4: характеристики

СЛУЧАЙ $\alpha < 0$

В случае $\alpha < 0$ ($u^- > u^+$) картина характеристик в проекции на плоскость (t, x) имеет вид, изображенный на рис. 4. Все характеристики, проходящие через точки с координатами $(0, x_0)$, при $a \leq x_0 \leq b$, сходятся в точке (t^*, x^*) , где $t^* = -1/\alpha > 0$, $x^* = -\beta/\alpha$.

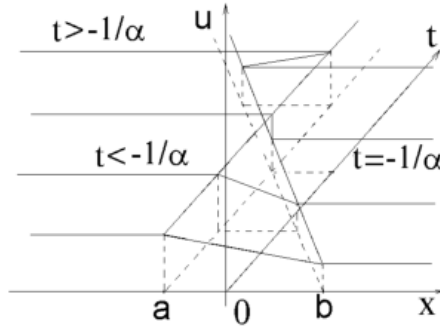


Рис. 5: интегральная поверхность при $\alpha < 0$

В зоне I $u(t, x) = u^-$, в зоне III $u(t, x) = u^+$. В зоне II

$$u(t, x) = \frac{\alpha x + \beta}{1 + \alpha t}.$$

Наконец, в зоне IV, функция

$$U(t, x_0(t, x), u_0(x_0(t, x)))$$

трехзначна и принимает три значения:

$$u_1(t, x) = u^-, \quad u_2(t, x) = \frac{\alpha x + \beta}{1 + \alpha t}, \quad u_3(t, x) = u^+.$$

В точке (t^*, x^*) функция U принимает все значения из отрезка $[u^+, u^-]$. Итак, в случае $\alpha < 0$ непрерывное решение $u(t, x)$ задачи Коши (11)-(12) в широком смысле существует лишь при $t < -1/\alpha$, а интегральная поверхность S определена при всех $t \geq 0$ (рис. 5). Однако при $t \geq -1/\alpha$ она не проектируется однозначно на плоскость $u = 0$.

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Если предположить, что функция $u(t, x)$ описывает какую-либо физическую величину в пространстве переменных t, x , то естественно, что эта величина должна быть однозначной функцией t, x . Поэтому задачи физики требуют определения однозначной функции $u = u(t, x)$. Как мы видели, задача Коши для квазилинейного уравнения разрешима в широком смысле (т.е. в классе непрерывных функций) далеко не всегда. Следовательно, требуется определить в каком смысле разрывную функцию можно считать решением таких задач. Для этого вводится понятие обобщенного решения.

Ранее мы уже делали замечание, что физические законы сохранения формулируются в виде интегральных уравнений, которые в свою очередь при условии гладкости подынтегральных функций сводятся к дифференциальным уравнениям в частных производных. Причем эти уравнения первоначально записываются в особом виде, который называют **дивергентным**. Поэтому понятие обобщенного решения имеет смысл вводить не для уравнения вида (1), а для его дивергентной формы записи. Далее будем рассматривать уравнение в полуплоскости $Q = \{(t, x) | t > 0, x \in R\}$ следующего вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0 \quad (17)$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = u_0(x). \quad (18)$$

Функция F часто называется функцией состояния.

Определение. Обобщенным решением задачи (17)-(18) в пространстве кусочно-гладких функций называют функцию $u(t, x)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{\Pi_T} [u\varphi_t + F(u)\varphi_x] dxdt = 0, \quad (19)$$

при любой "пробной" функции $\varphi(t, x) \in C_0^\infty(\Pi_T)$, а начальное условие (18) выполняется для почти всех $x \in R$.

Можно показать, что любое обобщенное решение уравнения (17) удовлетворяет этому уравнению в точках гладкости. Следовательно, поток векторного поля $(u, F(u))$ через любую гладкую кривую на плоскости (t, x) , ограничивающую область гладкости функции $u(t, x)$, равен нулю.

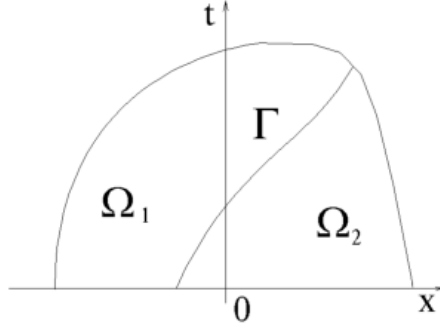


Рис. 6: условие на линии разрыва

УСЛОВИЕ РЭНКИНА-ГЮГОНИО

Если кривая ограничивает область с линией разрыва $x = x(t)$ функции $u(t, x)$, то закон сохранения в этой области выполняться уже не будет. Для его выполнения необходимо наложить дополнительные условия на функцию u и зависимость $x(t)$.

Пусть $u(t, x)$ – кусочно гладкое обобщенное решение в смысле интегрального тождества (19) уравнения (17) в области $\Omega \subset R^2$. Точнее пусть Ω делится линией Γ на две части (см. рис. 6) Ω_- и Ω_+ , в каждой из которых функция $u(t, x)$ является гладкой, т.е.

$$u(t, x) \in C^1(\Omega_-) \cap C^1(\Omega_+),$$

и существуют пределы слева (u^-) и справа (u^+) функции u при подходе к Γ .

Таким образом, на кривой Γ в каждой точке $(t_0, x_0) \in \Gamma$ определены

$$u^-(t_0, x_0) = \lim_{\substack{(t, x) \rightarrow (t_0, x_0) \\ (t, x) \in \Omega_-}} u(t, x),$$

и

$$u^+(t_0, x_0) = \lim_{\substack{(t, x) \rightarrow (t_0, x_0) \\ (t, x) \in \Omega_+}} u(t, x).$$

Такие разрывы называют разрывами первого рода.

Пусть кривая Γ в области Ω есть график гладкой функции $x = x(t)$. Тогда кусочно-гладкое обобщенное решение $u(t, x)$ уравнения (17) удовлетворяет на линии разрыва Γ следующему условию Рэнкина-Гюгониио:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{[F(u)]}{[u]} = \frac{F(u^+) - F(u^-)}{u^+ - u^-}, \quad (20)$$

где $[u] = u^+ - u^-$ – скачок функции $u(t, x)$ на линии разрыва Γ , $[F(u)] = F(u^+) - F(u^-)$ – скачок $F(u)$.

УДАРНЫЕ ВОЛНЫ

Учитывая, что $\frac{dx}{dt} = -\frac{\cos(\nu, t)}{\cos(\nu, x)}$, ($\cos(\nu, x)$ и $\cos(\nu, t)$ — координаты единичной нормали ν к кривой Γ , направленной из Ω_- в Ω_+ , $\cos(\nu, x) \neq 0$), перепишем равенство (20) в эквивалентном виде

$$[u]\cos(\nu, t) + [F(u)]\cos(\nu, x) = 0. \quad (21)$$

Определение. Ударными волнами называются разрывные решения уравнения (17).

Таким образом, условие Рэнкина-Гюгоньо (21) связывает скорость \dot{x} распространения ударных волн с предельными значениями u^+ и u^- через функцию состояния $F(u)$. Если функция $u(t, x)$ терпит слабый разрыв на линии Γ , т.е. является на ней непрерывной и имеет на Γ лишь разрывы производных $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial x}$, то условие Рэнкина-Гюгоньо (21), очевидно, выполнено (т.к. $[u] = 0$, и, следовательно, также $[F(u)] = 0$.) Таким образом, кусочно-гладкая непрерывная в области Ω функция $u(t, x)$, которая в окрестности каждой точки гладкости является классическим решением, будет во всей области Ω обобщенным решением (функция $u(t, x)$ классическим решением в Ω , безусловно, не является, т.к. она не дифференцируема при $(t, x) \in \Gamma \subset \Omega$.)

Однако при таком понимании обобщенного решения оно оказывается неединственным. Эффект неединственности связан с наличием разрывов у решения. Следовательно, не любые разрывы допустимы. Естественным требованием к разрывному решению является условие того, что оно должно являться пределом классических решений данного квазилинейного уравнения. Сформулируем условие проверки допустимости разрыва у решения квазилинейного уравнения.

У решения уравнения (17) возможен скачок от u^- к u^+ (в направлении возрастания x) при выполнении следующего условия допустимости разрыва:

- в случае $u^- < u^+$ график функции $F(u)$ на отрезке $[u^-, u^+]$ должен быть расположен не ниже хорды с концами $(u^-, F(u^-))$ и $(u^+, F(u^+))$;
- в случае $u^- > u^+$ график функции $F(u)$ на отрезке $[u^+, u^-]$ должен быть расположен не выше хорды с концами $(u^-, F(u^-))$ и $(u^+, F(u^+))$.

В литературе сформулированное выше условие допустимости разрыва называется условием "неубывания энтропии". Дело в том, что нелинейные физические процессы, моделируемые рассматриваемыми уравнениями, — необратимы во времени, а функция, при помощи которой характеризуется необратимость, называется "энтропией".

ЗАДАЧА РИМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ХОПФА

В качестве примера использования условий Рэнкина-Гюгонио и неубывания энтропии рассмотрим задачу Римана о распаде разрыва для уравнения Хопфа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x) &= \begin{cases} u^- & \text{при } x < 0, \\ u^+ & \text{при } x > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$

Исходное уравнение не меняется при замене $x \rightarrow kx$, $t \rightarrow kt$, начальное условие переходит в себя при преобразовании $x \rightarrow kx$, $k > 0$. Значит, в силу теоремы существования и единственности, при указанной замене с положительным k функция $u(t, x)$ переходит в себя:

$$u(kt, kx) = u(t, x) \quad \forall k > 0.$$

Это в точности означает, что $u(t, x)$ остается постоянной на всех лучах $x = \xi t$, $t > 0$, выходящих из начала координат, т.е. является функцией от $\xi = x/t$:

$$u(t, x) = u(x/t), \quad t > 0. \quad (23)$$

Решения, зависящие от x/t называются автомодельными. У автомодельных решений, в частности, линии разрыва могут быть только лучами, выходящими из начала координат.

Подставляя (23) в уравнение Хопфа, получим

$$-\frac{x}{t^2} u' \left(\frac{x}{t} \right) + \frac{1}{t} u \left(\frac{x}{t} \right) u' \left(\frac{x}{t} \right) = \frac{1}{t} u' \left(\frac{x}{t} \right) \left(u \left(\frac{x}{t} \right) - \frac{x}{t} \right) = 0,$$

т.е. либо $u' = 0$, либо $u = x/t$. Таким образом, все гладкие автомодельные решения уравнения Хопфа являются либо константами, либо функцией x/t .

Наша дальнейшая задача — соединить правильным образом (т.е. с выполнением на лучах разрыва условий Рэнкина-Гюгоньо и неубывания энтропии) построенные гладкие автомодельные решения так, чтобы удовлетворить начальному условию $u_0(x)$. Прежде всего выясним, по каким лучам можно ”стыковать” различные константы, а также константу и функцию x/t .

Две постоянные функции $u(t, x) \equiv u_1$ и $u(t, x) \equiv u_2$, $u_i = \text{Const}$, как следует из условия Рэнкина-Гюгоньо, стыкуются по прямой

$$x = \frac{F(u_2) - F(u_1)}{u_2 - u_1}t = \frac{1}{2} \frac{u_2^2 - u_1^2}{u_2 - u_1}t = \frac{u_2 + u_1}{2}t,$$

причем скачок, из условия допустимости разрыва, возможен только в сторону уменьшения u (при росте x). Таким образом, если для определенности $u_2 > u_1$, то

$$u(t, x) = u_2 \quad \text{при } x < \frac{u_2 + u_1}{2}t,$$

$$u(t, x) = u_1 \quad \text{при } x > \frac{u_2 + u_1}{2}t.$$

Что касается стыковки константы $u(t, x) \equiv u_3 = \text{Const}$ и функции $u(t, x) = x/t$, то если они стыкуются по лучу $x = \xi t$, тогда предел функции x/t при подходе к этому лучу равен ξ , и из условия Рэнкина-Гюгоньо следует

$$\xi = \frac{dx}{dt} = \frac{F(u_3) - F(\xi)}{u_3 - \xi} = \frac{1}{2} \frac{u_3^2 - \xi^2}{u_3 - \xi} = \frac{u_3 + \xi}{2},$$

т.е. $\xi = u_3$. Последнее означает, что полученная функция непрерывна на луче стыковки $x = \xi t = u_3 t$, $t > 0$.

Теперь мы можем полностью решить задачу Римана о распаде разрыва для уравнения Хопфа. Здесь возможны две принципиально различные ситуации.

1) Если $u^- > u^+$, то решение строится в виде ударной волны — двух констант u^- и u^+ , соединенных по лучу $x = \frac{u^- + u^+}{2}t$ в соответствии с условием Рэнкина-Гюгоньо

$$u(t, x) = \begin{cases} u^- & \text{при } x < \frac{u^- + u^+}{2}t, \\ u^+ & \text{при } x > \frac{u^- + u^+}{2}t. \end{cases}$$

Полученный разрыв, как уже отмечалось, является допустимым в смысле условия неубывания энтропии.

2) Если $u^- < u^+$, то решение строить в виде ударной волны нельзя, т.к. получаемый в этом случае разрыв не удовлетворяет условию неубывания энтропии. Здесь на помощь приходит функция x/t , которая по непрерывности соединяется с u^- и u^+

$$u(t, x) = \begin{cases} u^- & \text{при } x \leq u^-t, \\ x/t & \text{при } u^-t < x < u^+t, \\ u^+ & \text{при } x \geq u^+t. \end{cases}$$

Полученное решение непрерывно во всей полуплоскости $t > 0$. Угол $u^-t < x < u^+t$, $t > 0$, в котором происходит сглаживание разрывных начальных условий, называют областью разрежения, а само решение — центрированной волной разрежения.

ЗАДАЧА РИМАНА ДЛЯ ВЫПУКЛОЙ ФУНКЦИИ СОСТОЯНИЯ

Для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0 \quad (24)$$

рассмотрим задачу Римана о распаде разрыва с начальной функцией

$$u_0(x) = \begin{cases} u^-, & x < 0, \\ u^+, & x > 0, \end{cases} \quad (25)$$

где u^- и u^+ произвольные константы.

В этом разделе мы будем предполагать, что функция состояния $F = F(u)$ является выпуклой. Для определенности будем считать ее выпуклой вниз. Решение этой задачи сводится к следующим действиям.

I. Если $u^- > u^+$, то решение строится в виде ударной волны, стыкуя две константы u^- и u^+ в соответствии с условием Ранкина-Гюгонио по лучу $\frac{x}{t} = \frac{F(u^+) - F(u^-)}{u^+ - u^-}$, $t > 0$:

$$u_0(t, x) = \begin{cases} u^-, & x < \frac{F(u^+) - F(u^-)}{u^+ - u^-}t, \\ u^+, & x > \frac{F(u^+) - F(u^-)}{u^+ - u^-}t. \end{cases} \quad (26)$$

II. Если $u^- < u^+$, то решение вида (26) не удовлетворяет условию возрастания энтропии. В этом случае решение строится аналогично волне разряжения в случае уравнения Хопфа. Сначала показывается, что функция $\psi(x/t)$, обратная к $F'(x/t)$, является решением уравнения (24) при $t > 0$ (оно также называется волной разряжения), а затем с его помощью склеиваются константы u^- и u^+ из условий непрерывности решения в целом при $t > 0$:

$$u_0(t, x) = \begin{cases} u^-, & x \leq F(u^-)t, \\ \psi(x/t), & F(u^-)t < x < F(u^+)t, \\ u^+, & x \geq F(u^+)t. \end{cases} \quad (27)$$

Что касается случая выпуклой вверх функции F , то решение в случае $u^- < u^+$ является ударной волной, описываемой формулой (26), а в случае $u^- > u^+$ решением служит волна разряжения, задаваемая формулой (27).

Замечание. Выпуклость функции F нужна лишь на отрезке $[u^-, u^+]$ (или $[u^+, u^-]$).

Пример 1. Рассмотрим пример выпуклой вниз функции $F = e^u$. В случае, когда $u^- > u^+$, решением задачи Римана служит функция

$$u(t, x) = \begin{cases} u^-, & x < \frac{e^{u^+} - e^{u^-}}{u^+ - u^-}t, \\ u^+, & x > \frac{e^{u^+} - e^{u^-}}{u^+ - u^-}t, \end{cases} \quad (28)$$

а если $u^- < u^+$, то функция

$$u(t, x) = \begin{cases} u^-, & x \leq e^{u^-}t, \\ \ln(x/t), & e^{u^-}t < x < e^{u^+}t, \\ u^+, & x \geq e^{u^+}t. \end{cases} \quad (29)$$

Пример 2. Рассмотрим пример выпуклой вверх на отрезке $[0, \pi]$ функции $F = \sin u$. В случае, когда $0 \leq u^- < u^+ \leq \pi$, решением задачи Римана служит функция

$$u(t, x) = \begin{cases} u^-, & x < \frac{\cos u^+ - \cos u^-}{u^+ - u^-}t, \\ u^+, & x > \frac{\cos u^+ - \cos u^-}{u^+ - u^-}t, \end{cases} \quad (30)$$

а если $\pi \geq u^- > u^+ \geq 0$, то функция

$$u(t, x) = \begin{cases} u^-, & x \leq \cos u^-t, \\ \arccos(x/t), & \cos u^-t < x < \cos u^+t, \\ u^+, & x \geq \cos u^+t. \end{cases} \quad (31)$$

ЗАДАЧА РИМАНА ДЛЯ НЕВЫПУКЛОЙ ФУНКЦИИ СОСТОЯНИЯ

Опишем теперь построение точного решения задачи Римана в случае невыпуклой функции состояния F .

Определение. Выпуклой вверх оболочкой функции $F(u)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ называют функцию

$$\tilde{F}(u) = \inf_{\tilde{F}(u) \in \Phi} \tilde{F}(u), \quad u \in [\alpha, \beta],$$

где Φ совокупность всех выпуклых вверх функций $\tilde{F}(u)$ таких, что $\tilde{F}(u) \geq F(u)$ при всех $u \in [\alpha, \beta]$.

Определение. Выпуклой вниз оболочкой функции $F(u)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ называют функцию

$$\tilde{F}(u) = \sup_{\tilde{F}(u) \in \Phi} \tilde{F}(u), \quad u \in [\alpha, \beta],$$

где Φ совокупность всех выпуклых вниз функций $\tilde{F}(u)$ таких, что $\tilde{F}(u) \leq F(u)$ при всех $u \in [\alpha, \beta]$.

Если $F(u)$ – выпуклая вверх (вниз) функция на отрезке $[\alpha, \beta]$, то ее выпуклой вверх (вниз) оболочкой на этом отрезке является она сама, а график ее выпуклой вниз (вверх) оболочки – отрезок, соединяющий точки $(\alpha, F(\alpha))$ и $(\beta, F(\beta))$. В общем же случае график оболочки состоит из выпуклых (в соответствующую сторону) кусков графика функции $F(u)$ и отрезков, соединяющих эти куски. Каждый такой отрезок будет соответствовать лучу разрыва (ударной волне) построенного решения между двумя гладкими автомодельными решениями вида $u(t, x) = \psi(t, x)$, где $\psi(\xi)$ – функция, обратная к $\xi = F'(u)$.

Пример 1. Функция состояния $F(u) = u^3$. Пусть величины $u^- > 0$, а $u^+ < 0$. Решением этой задачи служит функция

$$u(t, x) = \begin{cases} u^-, & x \leq \frac{3}{4}(u^-)^2 t, \\ -\sqrt{\frac{x}{3t}}, & \frac{3}{4}(u^-)^2 t < x < 3(u^+)^2 t, \\ u^+, & x \geq 3(u^+)^2 t. \end{cases} \quad (32)$$

Задача с функцией состояния $F(u) = u^3$ решена для случая $u^- = 1$ и $u^+ = -1$. Это решение без особых усложнений переносится на более общий случай начальной функции из разобранных выше примеров.

Аналогично решается задача, приведенная в следующем примере.

Пример 2. Функция состояния $F(u) = u^3$. Пусть величины $u^- < 0$, а $u^+ > 0$. Решением этой задачи служит функция

$$u(t, x) = \begin{cases} u^-, & x \leq \frac{3}{4}(u^-)^2 t, \\ \sqrt{\frac{x}{3t}}, & \frac{3}{4}(u^-)^2 t < x < 3(u^+)^2 t, \\ u^+, & x \geq 3(u^+)^2 t. \end{cases} \quad (33)$$

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ

Условия Рэнкина-Гюгонио можно получить, используя несколько другие соображения, чем было сделано выше. Заметим, что решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0 \quad (34)$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = u_0(x). \quad (35)$$

имеет неявный вид

$$u = u_0(x - F'_u(u)t), \quad (36)$$

построение которого было проведено выше с использованием характеристической системы. Это решение справедливо до такого времени t , пока $u(t, x)$ является однозначной функцией переменной x . При образовании неоднозначности закон распространения волны изменяется, т.к. вместо перехлеста в профиле волны возникает разрыв.

Для описания закона распространения волны, содержащей разрыв, получим уравнения, которые связывают между собой начальный профиль волны, координату разрыва и значение решения справа и слева на разрыве.

Предположим, что начальное возмущение является локальным, т.е. удовлетворяет условию

$$u_0(x) = 0 \text{ при } |x| > X \text{ (} X - \text{некоторое число)}. \quad (37)$$

Тогда значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x) dx, \quad (38)$$

где $u(t, x)$ является решением задачи (34)-(35), не будет зависеть от времени.

Для доказательства этого факта вспомним, что скорость возмущения решения уравнения (34) конечна, и следовательно, условие локальности (37) будет выполнено для функции $u(t, x)$ не только при $t = 0$, но и для любого времени t . После чего проинтегрируем уравнение (34) в полосе $[0, T] \times \mathbf{R}$

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} dx dt + \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial F(u(t, x))}{\partial x} dx dt = 0 \quad (39)$$

и заметим, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial F(u(t, x))}{\partial x} dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(u(t, x)) - \lim_{x \rightarrow -\infty} F(u(t, x)) = 0 \quad (40)$$

в силу локальности возмущения.

Учитывая (40) в равенстве (39), получаем, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(T, x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u(0, x) dx,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Очевидно, что для равенства нулю второго слагаемого в 39 достаточно потребовать, чтобы

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(u(t, x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(u(t, x)),$$

т. е. условие локальности (37) можно заменить на равенство функции u вне ограниченной области пространственной переменной некоторой величине или даже разным величинам $u_{-\infty}$ и $u_{+\infty}$, но при условии выполнения равенства

$$F(u_{-\infty}) = F(u_{+\infty}).$$

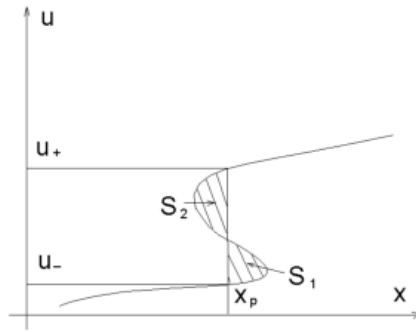


Рис. 7: определение координаты разрыва

Независимость интеграла (38) от времени t означает сохранение количества движения, объемная плотность которого равна u . Этот результат вполне очевиден и объясняется тем, что рассматриваемый объем среды представляет собой замкнутую систему, на которую не действуют внешние силы. Но система остается замкнутой и после образования разрыва. Следовательно, импульс и в этом случае должен сохраняться.

Схема построения фронта в неоднозначном профиле волны представлена на рис. 7. Для того чтобы количество движения не изменилось и после образования разрыва, фронт нужно проводить таким образом, чтобы отсекаемые от обеих частей перехлеста площади S_1 и S_2 (заштрихованные на рисунке) были равны.

Определим координату разрыва x_p аналитически. Исходя из рис. 7, правило "равенства площадей" можно записать так:

$$\frac{d}{dt} \int_{u^-}^{u^+} [x(u) - x_p] du = 0$$

или

$$\int_{u^-}^{u^+} \frac{dx(u)}{dt} du = (u^+ - u^-) \frac{dx_p}{dt}.$$

Поскольку неоднозначный профиль искажен в соответствии с решением характеристической системы

$$\frac{dx(u)}{dt} = F'_u(u),$$

получаем

$$\int_{u^-}^{u^+} F'_u(u) du = (u^+ - u^-) \frac{dx_p}{dt}.$$

Откуда следует, что

$$F(u)|_{u^-}^{u^+} = (u^+ - u^-) \frac{dx_p}{dt}. \quad (41)$$

Полученное равенство 41 является уже известным нам условием Рэнкина-Гюгонио. Эта формула представляет собой дифференциальное уравнение, позволяющее определить координату разрыва x_p по известным параметрам "скачка" $u^-(x)$ и $u^+(x)$.

Полная система уравнений, описывающих движение разрыва будет составлена, если добавить к 41 два уравнения для u^- и u^+ . Учитывая, что u^- и u^+ расположены на профиле волны 36, получаем

$$u^- = u_0^-(x_p - F'_u(u^-)t), \quad u^+ = u_0^+(x_p - F'_u(u^+)t).$$

Здесь u_0^- и u_0^+ — функции, описывающие форму волны на участках до и после разрыва, т.е. при $x < x_p$ и $x > x_p$. Таким образом, обозначив через f_1 и f_2 функции, обратные к u_0^- и u_0^+ , получаем

$$\begin{aligned} x_p &= f_1(u^-) + F'_u(u^-)t, \\ x_p &= f_2(u^+) + F'_u(u^+)t, \\ \frac{dx_p}{dt} &= \frac{F(u^+) - F(u^-)}{u^+ - u^-}. \end{aligned} \tag{42}$$

Это система из трех уравнений для трех неизвестных величин: координаты разрыва x_p и величин $u^-(x)$, $u^+(x)$, определяющих "амплитуду" скачка.

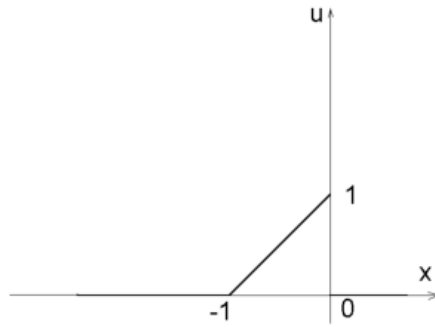


Рис. 8: треугольное возмущение

Для иллюстрации техники построения точных решений с помощью уравнений 42 решим простейшую задачу об изменении амплитуды и длительности одиночного треугольного возмущения, изображенного на рис. 8, описываемого уравнением Хопфа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Такое возмущение в акустике называют однополярным треугольным импульсом. Исходная форма возмущения описывается функцией

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 1 + x, & -1 \leq x \leq 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases} \quad (43)$$

значения которой неотрицательны во всех точках. Поэтому все характеристики данной задачи образуют угол, не превышающий 90° с положительным направлением оси x , и следовательно, возмущение распространяется только в сторону увеличения пространственной переменной с ростом t .

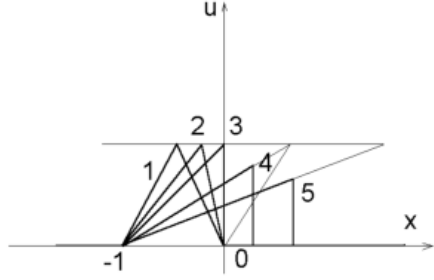


Рис. 9: искажение формы треугольного импульса

Найдем теперь координату разрыва x_p и величину амплитуды решения слева на разрыве. Поскольку справа на разрыве решение равно 0, поэтому вместо трех уравнений 42 нужно решать только два

$$\begin{aligned} x_p &= u^- - 1 + u^- t, \\ \frac{dx_p}{dt} &= u^- / 2. \end{aligned} \quad (44)$$

Решая систему 44 с учетом начального условия $x_p(0) = 0$, получаем

$$\begin{aligned} x_p &= \sqrt{1+t} - 1, \\ u^- &= 1/\sqrt{1+t}. \end{aligned} \quad (45)$$

Таким образом, решение уравнения Хопфа с начальным условием 43 равно нулю при $x \leq -1$ и $x \geq \sqrt{1+t} - 1$. Функцию $u(t, x)$ при $x \in [-1; \sqrt{1+t} - 1]$ найдем, решив характеристическую систему

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= u, \\ \frac{dU}{dt} &= 0, \end{aligned}$$

с начальным условием 43. В результате получим, что

$$u(t, x) = \frac{1+x}{1+t} \quad \text{при} \quad x \in [-1; \sqrt{1+t} - 1].$$

Аналогично решаются и другие, более сложные задачи. Например, рассмотрим процесс искажения формы симметричного треугольного импульса, являющегося начальным условием уравнения Хопфа (кривая 1 на рис. 9). На первом этапе, до момента образования разрыва, форма возмущения трансформируется в соответствии с решением характеристической системы (кривые 2,3). Как только передний фронт импульса примет вертикальное положение (кривая 3), искажение профиля (кривые 4,5) будет описываться найденным выше решением.

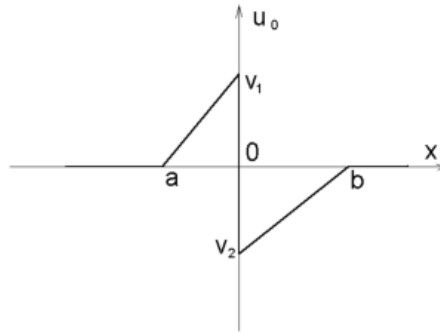


Рис. 10: двуполярный импульс

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ДВУПОЛЯРНОГО ИМПУЛЬСА

Решим теперь уравнение Хопфа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (46)$$

с начальным условием в виде двуполярного импульса (см. рис. 10). Пусть

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \ x \geq b, \\ k_1 x + v_1, & a \leq x \leq 0, \\ k_2 x + v_2, & 0 \leq x \leq b. \end{cases} \quad (47)$$

Ниже будем считать, что параметры, задающие функцию u_0 , удовлетворяют неравенствам

$$k_1 \geq 0, \quad k_2 \geq 0, \quad v_1 \geq 0, \quad v_2 \leq 0.$$

При $k_2 = 0, v_2 = 0$ получаем частный случай — однополярный треугольный импульс.

Система 42 в рассматриваемом случае принимает вид

$$\begin{aligned}x_p &= \frac{u^- - v_1}{k_1} + u^- t, \\x_p &= \frac{u^+ - v_2}{k_2} + u^+ t, \\ \frac{dx_p}{dt} &= \frac{u^+ + u^-}{2}.\end{aligned}$$

Данная система переписывается в следующем виде

$$\begin{aligned}u^- &= \frac{k_1 x_p(t) + v_1}{1 + k_1 t}, \\u^+ &= \frac{k_2 x_p(t) + v_2}{1 + k_2 t}, \\ \frac{dx_p}{dt} &= \frac{u^+ + u^-}{2}.\end{aligned}\tag{48}$$

Подставляя выражения для u^- и u^+ в последнее уравнение системы, получаем

$$\begin{aligned}\frac{dx_p}{dt} &= \frac{1}{2} \left(\frac{k_1 x_p(t) + v_1}{1 + k_1 t} + \frac{k_2 x_p(t) + v_2}{1 + k_2 t} \right), \\ \frac{dx_p}{dt} - \frac{1}{2} \left(\frac{k_1}{1 + k_1 t} + \frac{k_2}{1 + k_2 t} \right) x_p &= \frac{1}{2} \left(\frac{v_1}{1 + k_1 t} + \frac{v_2}{1 + k_2 t} \right),\end{aligned}$$

с начальным условием $x_p(0) = 0$.

Решением при $k_1 \neq k_2$ получившейся дифференциальной задачи является функция

$$\begin{aligned}x_p(t) &= \\ &= \frac{v_1(1 + k_2 t) - v_2(1 + k_1 t) + (v_2 - v_1)\sqrt{(1 + k_2 t)(1 + k_1 t)}}{k_2 - k_1} = \\ &= \frac{1}{k_2 - k_1} \left(v_1 \sqrt{1 + k_2 t} + v_2 \sqrt{1 + k_1 t} \right) \left(\sqrt{1 + k_2 t} - \sqrt{1 + k_1 t} \right).\end{aligned}$$

В случае $k_1 = k_2 = k$ для x_p имеем уравнение

$$\frac{dx_p}{dt} - \frac{k}{1 + kt} x_p = \frac{1}{2} \frac{v_1 + v_2}{1 + kt}$$

с тем же начальным условием $x_p(0) = 0$. Решением этой задачи является функция

$$x_p(t) = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)t.\tag{49}$$

При $k_1 \neq k_2$ приведем формулу для $x_p(t)$ к более удобному виду:

$$\begin{aligned}x_p(t) &= \\ &= \frac{1}{k_2 - k_1} \left(v_1 \sqrt{1 + k_2 t} + v_2 \sqrt{1 + k_1 t} \right) \left(\sqrt{1 + k_2 t} - \sqrt{1 + k_1 t} \right) = \\ &= \frac{1}{k_2 - k_1} \frac{v_1 \sqrt{1 + k_2 t} + v_2 \sqrt{1 + k_1 t}}{\sqrt{1 + k_2 t} + \sqrt{1 + k_1 t}} ((1 + k_2 t) - (1 + k_1 t)) =\end{aligned}$$

$$= \frac{v_1\sqrt{1+k_2t} + v_2\sqrt{1+k_1t}}{\sqrt{1+k_2t} + \sqrt{1+k_1t}}t. \quad (50)$$

С помощью полученных соотношений для $x_p(t)$ найдем время t , при котором двупольный треугольный импульс становится однополярным треугольным.

Обратимся к формуле 47. Пусть v_1 , v_2 , k_1 и k_2 не равны нулю и

$$v_1 = -\mu v_2, \quad \text{при } \mu > 0,$$

$$k_1 = \lambda k_2, \quad \text{при } \lambda > 0.$$

S_1 , S_2 – площади верхнего и нижнего треугольников соответственно при $t = 0$. Тогда

$$x_p(t) = \frac{v_2t(\sqrt{1+\lambda k_2t} - \mu\sqrt{1+k_2t})}{\sqrt{1+k_2t} + \sqrt{1+\lambda k_2t}},$$

$$S_1 = -\frac{1}{2}v_1a = \frac{v_1^2}{2k_1},$$

$$S_2 = -\frac{1}{2}v_2b = \frac{v_2^2}{2k_2},$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 \frac{k_2}{k_1} = \frac{\mu^2}{\lambda}.$$

Решим уравнение $x_p(t_0) = b$, т.е. уравнение

$$\frac{v_2t_0(\sqrt{1+\lambda k_2t_0} - \mu\sqrt{1+k_2t_0})}{\sqrt{1+k_2t_0} + \sqrt{1+\lambda k_2t_0}} = -\frac{v_2}{k_2}.$$

Если это уравнение имеет положительное решение t_0 , то при $t = t_0$ разрыв будет иметь координату b , т.е. импульс превратиться в треугольный.

$$k_2t_0(\mu\sqrt{1+k_2t_0} - \sqrt{1+\lambda k_2t_0}) = \sqrt{1+k_2t_0} + \sqrt{1+\lambda k_2t_0},$$

$$\sqrt{1+k_2t_0}(\mu k_2t_0 - 1) = \sqrt{1+\lambda k_2t_0}(t_0k_2 + 1),$$

$$(\mu k_2t_0 - 1) = \sqrt{(1+\lambda k_2t_0)(1+t_0k_2)},$$

$$(\mu k_2t_0 - 1)^2 = (1+\lambda k_2t_0)(1+t_0k_2).$$

После того как получим решение последнего уравнения, необходимо проверить, что

$$\mu k_2t_0 - 1 \geq 0. \quad (51)$$

Решим последнее уравнение

$$1 - 2\mu k_2t_0 + \mu^2 k_2^2 t_0^2 = 1 + (1+\lambda)k_2t_0 + \lambda t_0^2 k_2^2,$$

$$k_2t_0(1 + 2\mu + \lambda) = t_0^2 k_2^2 (\mu^2 - \lambda).$$

Поскольку $t_0k_2 \neq 0$, то

$$t_0 = \frac{1 + 2\mu + \lambda}{k_2(\mu^2 - \lambda)}. \quad (52)$$

Поскольку в силу наших предположений величины λ , μ и k_2 положительны, то значение t_0 , полученное по формуле 52, положительно лишь при $\mu^2 - \lambda > 0$, т.е. при $S_1 > S_2$. Проверим, что при $\mu^2 - \lambda > 0$ выполняется условие 51. Действительно,

$$\mu \frac{1 + 2\mu + \lambda}{\lambda - \mu^2} - 1 = \frac{\lambda - \mu^2 + 2\mu^2 + \lambda\mu + \mu}{\mu^2 - \lambda} = \frac{\lambda + \mu^2 + \lambda\mu + \mu}{\mu^2 - \lambda} \geq 0.$$

Итак, мы получили, что уравнение $x_p(t) = b$ имеет положительное решение, определяемое формулой 52 лишь при $S_1 > S_2$.

Аналогично для уравнения $x_p(t) = a$, положительное решение существует лишь при $S_1 < S_2$, и оно определяется по формуле

$$t_0 = \frac{\mu(2\lambda + \mu + \mu\lambda)}{\lambda k_2(\lambda - \mu^2)}. \quad (53)$$

Как движется дипольный импульс при возрастании t ?

Пусть $u(t = 0, x) = u_0(x)$, где $u_0(x)$ задается формулой 47. Если $S_1 > S_2$, то на промежутке $t < t_0$, где t_0 определяется формулой 52, импульс остается дипольным и в момент t описывается функцией

$$u(t, x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \ x \geq b, \\ \frac{k_1 x + v_1}{1 + k_1 t}, & x \in [a, x_p], \\ \frac{k_2 x + v_2}{1 + k_2 t}, & x \in [x_p, b]. \end{cases} \quad (54)$$

Здесь $x_p(t)$ находится из формулы 50.

При $t = t_0$ сигнал превращается в треугольный:

$$u(t_0, x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \ x > b, \\ \frac{k_1 x + v_1}{1 + k_1 t_0}, & x \in [a, b]. \end{cases}$$

Делая замену $\tilde{t} = t - t_0$, $\tilde{x} = x - b$ и применяя формулу 50 для случая

$$\tilde{v}_2 = \tilde{k}_2 = 0, \quad \tilde{k}_1 = \frac{k_1}{1 + k_1 t_0}, \quad \tilde{v}_1 = \frac{k_1 b + v_1}{1 + k_1 t_0},$$

получаем, что при $t \geq t_0$, функции, описывающие форму сигнала, имеют вид

$$u(t, x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \ x > x_p, \\ \frac{\tilde{k}_1 \tilde{x} + \tilde{v}_1}{1 + \tilde{k}_1 \tilde{t}}, & x \in [a, x_p], \end{cases}$$

где $x_p(t) = \tilde{x}_p(\tilde{t}) + b$,

$$\tilde{x}_p(\tilde{t}) = \frac{\tilde{v}_1}{\tilde{k}_1} \left(\sqrt{1 + \tilde{t}\tilde{k}_1} - 1 \right).$$

Если $S_1 < S_2$, то при $t \in [0, t_0]$, где t_0 определяется формулой 53, импульс описывается функцией 54 и является дипольным. При $t = t_0$ импульс становится треугольным

$$u(t_0, x) = \begin{cases} 0, & x < a, \ x \geq b, \\ \frac{k_2 x + v_2}{1 + k_2 t_0}, & x \in [a, b]. \end{cases}$$

При $t \geq t_0$ для $u(t, x)$ имеем

$$u(t, x) = \begin{cases} 0, & x < x_p, \ x \geq b, \\ \frac{\tilde{k}_2 \tilde{x} + \tilde{v}_2}{1 + \tilde{k}_2 \tilde{t}_0}, & x \in [x_p, b], \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{k}_2 &= \frac{k_2}{1 + k_2 t_0}, & \tilde{v}_2 &= \frac{k_2 a + v_2}{1 + k_2 t_0}, \\ x_p(t) &= \tilde{x}_p(\tilde{t}) + a, & \tilde{t} &= t - t_0, & \tilde{x} &= x - a, \\ \tilde{x}_p(\tilde{t}) &= \frac{\tilde{v}_2}{\tilde{k}_2} \left(\sqrt{1 + \tilde{t} \tilde{k}_2} - 1 \right). \end{aligned}$$

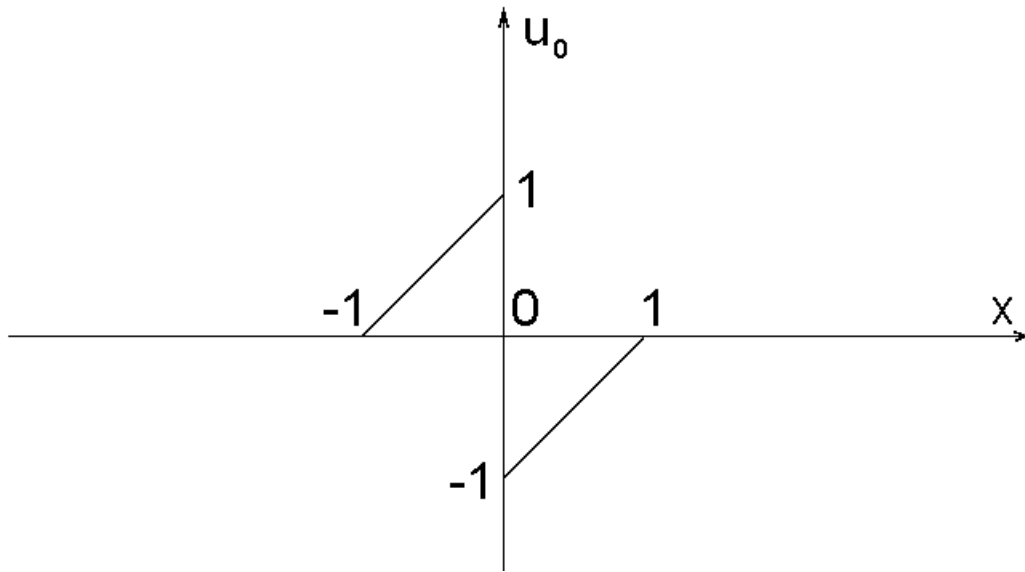


Рис. 11: начальная форма импульса из примера 1

ПРИМЕРЫ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ДВУПОЛЯРНОГО ИМПУЛЬСА

Рассмотрим несколько конкретных начальных двуполярных импульсов и на их примере разберем, описанный выше общий случай их распространения.

Пример 1. Пусть

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, x \geq 1, \\ x + 1, & -1 \leq x \leq 0, \\ x - 1, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рисунке 11.

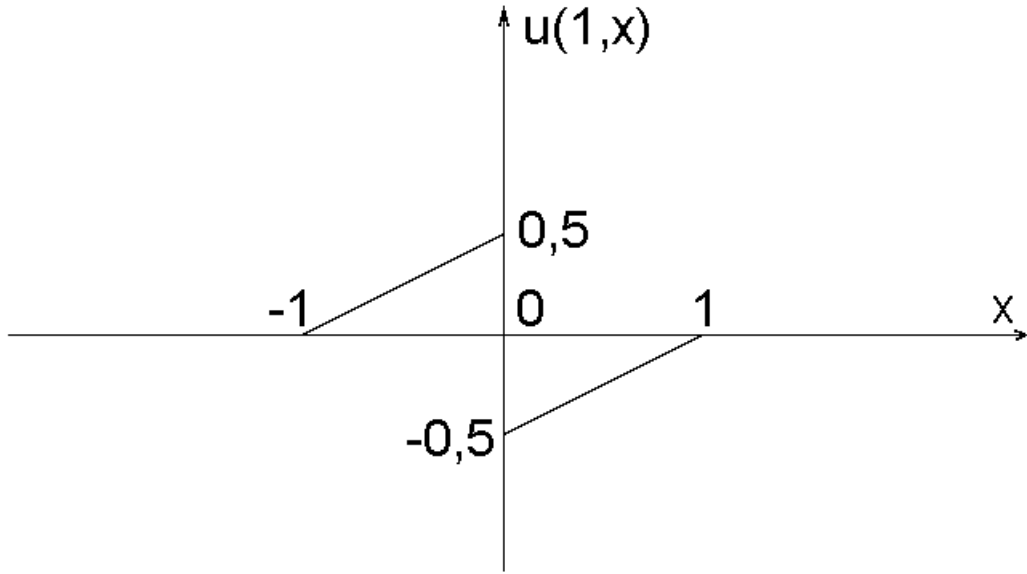


Рис. 12: форма импульса при $t = 1$ из примера 1

В этом случае

$$k_1 = 1, \quad v_1 = 1, \quad k_2 = 1, \quad v_2 = -1$$

и система (48) принимает вид

$$u^- = \frac{x_p(t) + 1}{1 + t}, \quad u^+ = \frac{x_p(t) - 1}{1 + t},$$

$$\frac{dx_p}{dt} = \frac{u^+ + u^-}{2} = \frac{x_p(t)}{1 + t}.$$

Решая эту систему, получаем, что $x_p(t) = c(t + 1)$.

При $t = 0$ координата разрыва равна нулю: $x_p(0) = 0$. Следовательно, $c = 0$. Тогда $x_p(t) \equiv 0$, т.е. разрыв остается на месте. Такой же вывод можно было сделать на основании формулы (49). Значения решения в точке разрыва равны

$$u^- = \frac{1}{1 + t}, \quad u^+ = -\frac{1}{1 + t}.$$

Этот результат согласуется с законом сохранения: суммарная площадь импульса остается равной нулю. Например, при $t = 1$ $u^- = \frac{1}{2}$, $u^+ = -\frac{1}{2}$ (см. рис. 12). При $t \rightarrow +\infty$ $u^+, u^- \rightarrow 0$ импульсы постепенно "поглощают" друг друга.

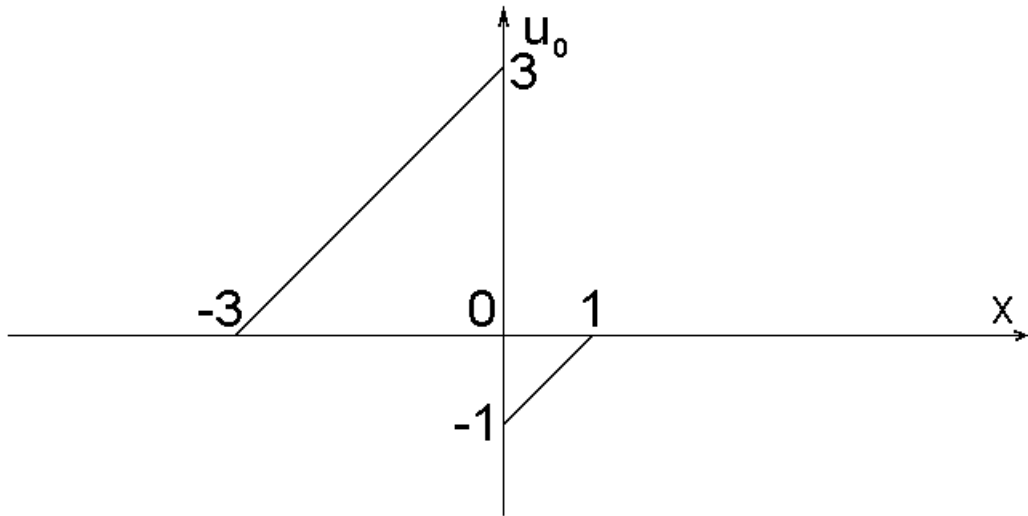


Рис. 13: начальная форма импульса из примера 2

Пример 2. Пусть

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -3, x \geq 1, \\ x + 3, & -3 \leq x \leq 0, \\ x - 1, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рисунке 13.

Здесь

$$k_1 = 1, v_1 = 3, k_2 = 1, v_2 = -1,$$

и система (48) принимает вид

$$u^- = \frac{x_p(t) + 3}{1 + t}, \quad u^+ = \frac{x_p(t) - 1}{1 + t},$$

$$\frac{dx_p}{dt} = \frac{x_p(t) + 1}{1 + t}.$$

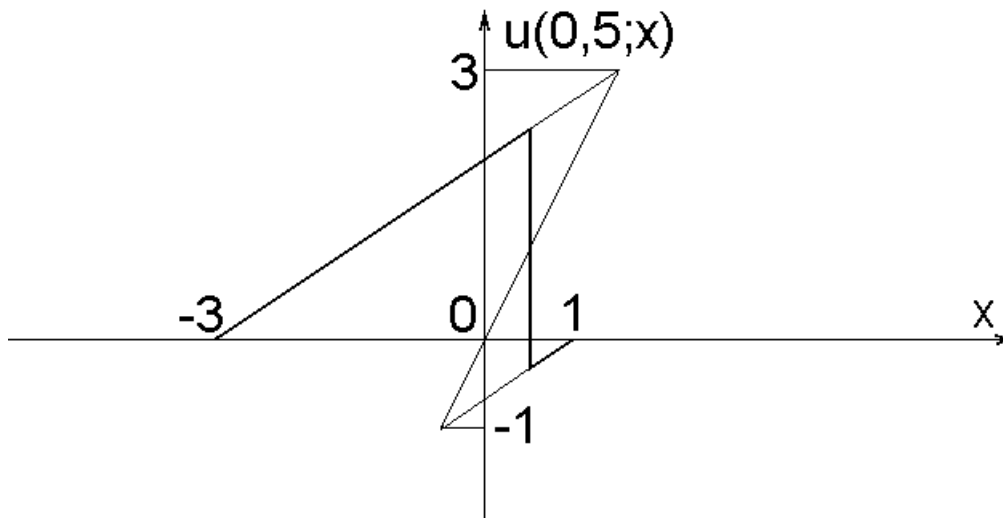


Рис. 14: форма импульса при $t = 1/2$ из примера 2

Откуда $x_p(t) + 1 = c(1 + t)$, $x_p(t) = -1 + c(1 + t)$. В начальный момент разрыв в нуле : $0 = -1 + c$. Значит, $x_p(t) = t$ - разрыв движется вправо с постоянной скоростью $\frac{dx_p}{dt} = 1$. Это также видно из формулы (49).

При $t \in [0, 1)$ $u^- = \frac{t+3}{1+t}$, $u^+ = \frac{t-1}{1+t}$. Например, при $t = \frac{1}{2}$ $x_p = \frac{1}{2}$, $u^- = \frac{7}{3}$, $u^+ = -\frac{1}{3}$ (см. рис. 14).

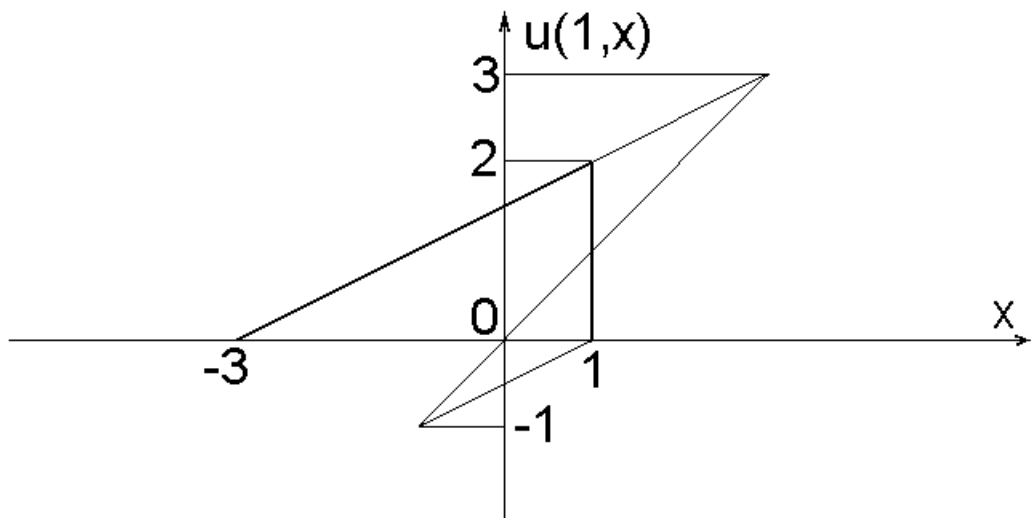


Рис. 15: форма импульса при $t = 1$ из примера 2

Импульс становится однополярным треугольным в момент времени $t = 1$, когда его координата становится равной $x_p = 1$. В этот момент $x_p = 1$, $u^- = 2$, $u^+ = 0$, левый импульс полностью "поглощает" правый (см. рис. 15).

$$u(1, x) = \begin{cases} 0, & x \leq -3, x \geq 1, \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, & -3 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

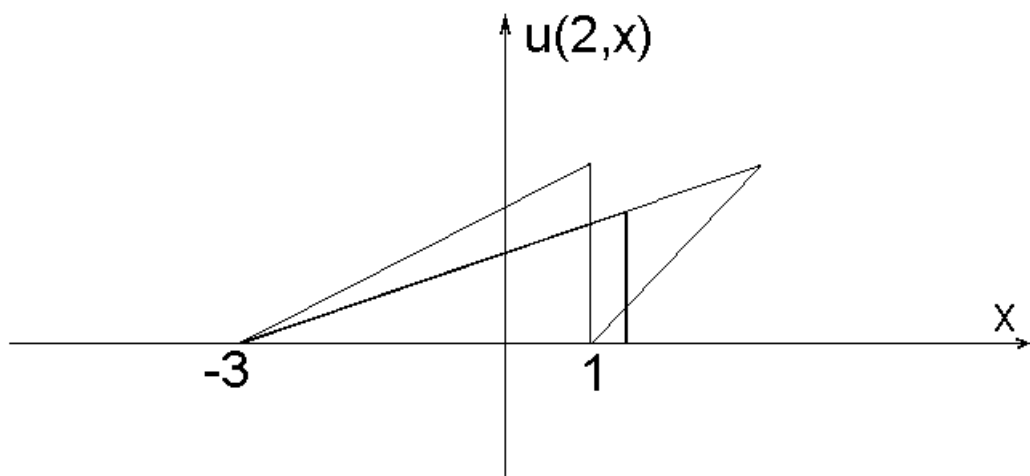


Рис. 16: форма импульса при $t > 1$ из примера 2

Далее разрыв движется вправо с убывающей скоростью, по закону распространения однополярного треугольного импульса. Амплитуда разрыва уменьшается (см. рис 16).

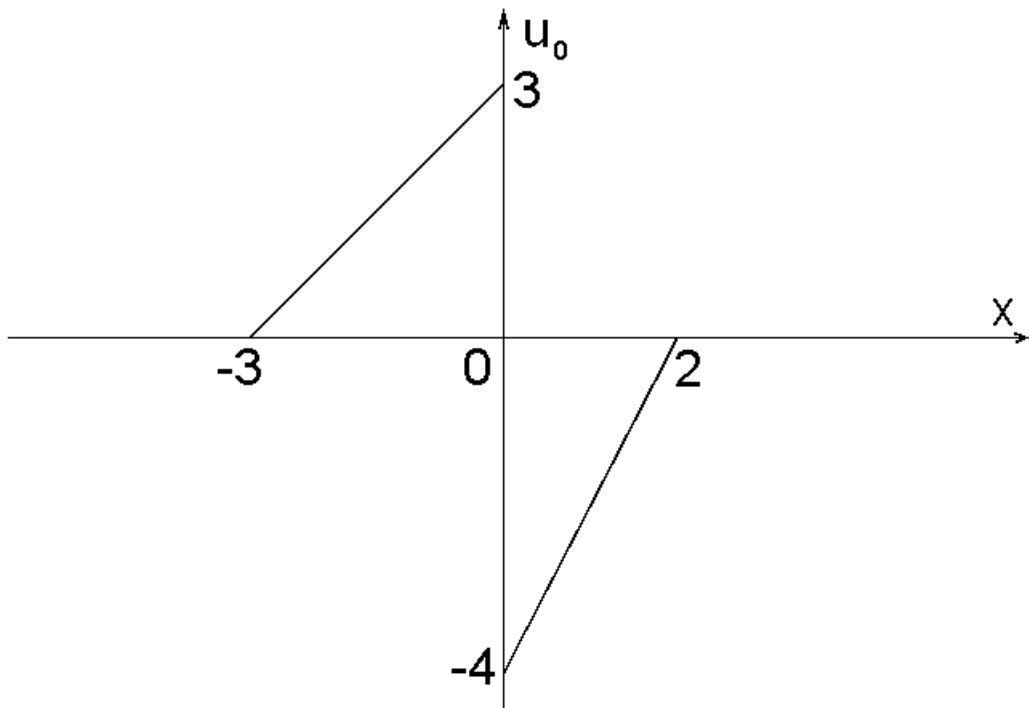


Рис. 17: начальная форма импульса из примера 3

Пример 3. Пусть

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -3, x \geq 2, \\ x + 3, & -3 \leq x \leq 0, \\ 2x - 4, & 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рисунке 17.

В этом случае

$$k_1 = 1, v_1 = 3, k_2 = 2, v_2 = -4.$$

и система (48) принимает вид

$$u^- = \frac{x_p(t) + 3}{1 + t}, \quad u^+ = \frac{2x_p(t) - 4}{1 + 2t},$$

$$\frac{dx_p}{dt} = \frac{u^+ + u^-}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{x_p(t) + 3}{1 + t} + \frac{2x_p(t) - 4}{1 + 2t} \right).$$

Решим однородное уравнение

$$\begin{aligned}\frac{dx_{\text{од}}}{dt} &= \frac{1}{2} \left(\frac{x_{\text{од}}}{1+t} + \frac{2x_{\text{од}}}{1+2t} \right), \\ \ln x_{\text{од}} &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{2}{1+2t} \right) dt = \frac{1}{2} (\ln(1+t) + \ln(1+2t) + c'), \\ x_{\text{од}} &= c(1+t)^{\frac{1}{2}}(1+2t)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Теперь решим неоднородное уравнение, для этого подставим в него $x_p(t) = c(t)x_{\text{од}}$, где $x_{\text{од}} = (1+t)^{\frac{1}{2}}(1+2t)^{\frac{1}{2}}$ - удовлетворяет однородному уравнению.

$$\begin{aligned}c(t)\frac{dx_{\text{од}}}{dt} + c'(t)(1+t)^{\frac{1}{2}}(1+2t)^{\frac{1}{2}} &= \\ &= \frac{c(t)}{2} \left(\frac{x_{\text{од}}}{1+t} + \frac{2x_{\text{од}}}{1+2t} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{1+t} - \frac{4}{1+2t} \right).\end{aligned}$$

Первые слагаемые слева и справа взаимно уничтожаются, поэтому

$$\begin{aligned}c(t) &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{3}{(1+t)^{\frac{3}{2}}(1+2t)^{\frac{1}{2}}} - \frac{4}{(1+t)^{\frac{1}{2}}(1+2t)^{\frac{3}{2}}} \right) dt = \\ &\quad (1+t = b^2, dt = 2bdb) \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{3 \cdot 2b}{b^3(2b^2-1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{4 \cdot 2b}{b(2b^2-1)^{\frac{3}{2}}} \right) db = \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{6}{b^3(2-\frac{1}{b^2})^{\frac{1}{2}}} - \frac{8}{b^3(2-\frac{1}{b^2})^{\frac{3}{2}}} \right) db = \\ &= \frac{1}{2} \int \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{6}{(2-\frac{1}{b^2})^{\frac{1}{2}}} - \frac{8}{(2-\frac{1}{b^2})^{\frac{3}{2}}} \right) d\frac{1}{b^2} = \\ &= -\frac{1}{4} \left(-6 \left(2 - \frac{1}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 + \frac{8 \cdot 2}{-\left(2 - \frac{1}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \right) + c_0 = \\ &\quad (b^2 = 1+t) \\ &= 3 \left(\frac{1+2t}{1+t} \right)^{\frac{1}{2}} + 4 \left(\frac{1+t}{1+2t} \right)^{\frac{1}{2}} + c_0.\end{aligned}$$

Итак, $x_p(t) = 3(1+2t) + 4(1+t) + c_0(1+2t)^{\frac{1}{2}}(1+t)^{\frac{1}{2}}$. В начальный момент разрыв в нуле. Значит, $0 = 3 + 4 + c_0$, и следовательно, $c_0 = 7$. Таким образом, зависимость координаты разрыва от времени получается следующая:

$$x_p(t) = 10t + 7 - 7\sqrt{1+t}\sqrt{1+2t}.$$

Заметим, что этот закон в общем случае записан формулой (50).

Выясним, как движется линия разрыва:

$$\frac{dx_p}{dt} = 10 - \frac{7\sqrt{1+2t}}{2\sqrt{1+t}} - \frac{7\sqrt{1+t}}{\sqrt{1+2t}}.$$

При $t = 0$ $\frac{dx_p}{dt} < 0$. Затем $\frac{dx_p}{dt}$ растёт и при некотором t' меняет знак. После чего при $t \in (t', +\infty)$ $\frac{dx_p}{dt} > 0$.

Уравнение для t' :

$$10 - \frac{7\sqrt{1+2t'}}{2\sqrt{1+t'}} - \frac{7\sqrt{1+t'}}{\sqrt{1+2t'}} = 0.$$

Пусть $\lambda = \frac{\sqrt{1+2t'}}{\sqrt{1+t'}}$, тогда

$$10 - \frac{7}{2}\lambda - \frac{7}{\lambda} = 0. \quad (55)$$

В случае

$$\lambda_1 = \frac{10 - \sqrt{2}}{7},$$

для нахождения момента времени t' имеем уравнение

$$\frac{1+2t'}{1+t'} = \frac{102 \pm 20\sqrt{2}}{49}.$$

Откуда время t' равно

$$t' = \frac{53 - 20\sqrt{2}}{20\sqrt{2} - 3}.$$

Второй корень уравнения (55) является посторонним, поскольку даёт нам $t' < 0$.

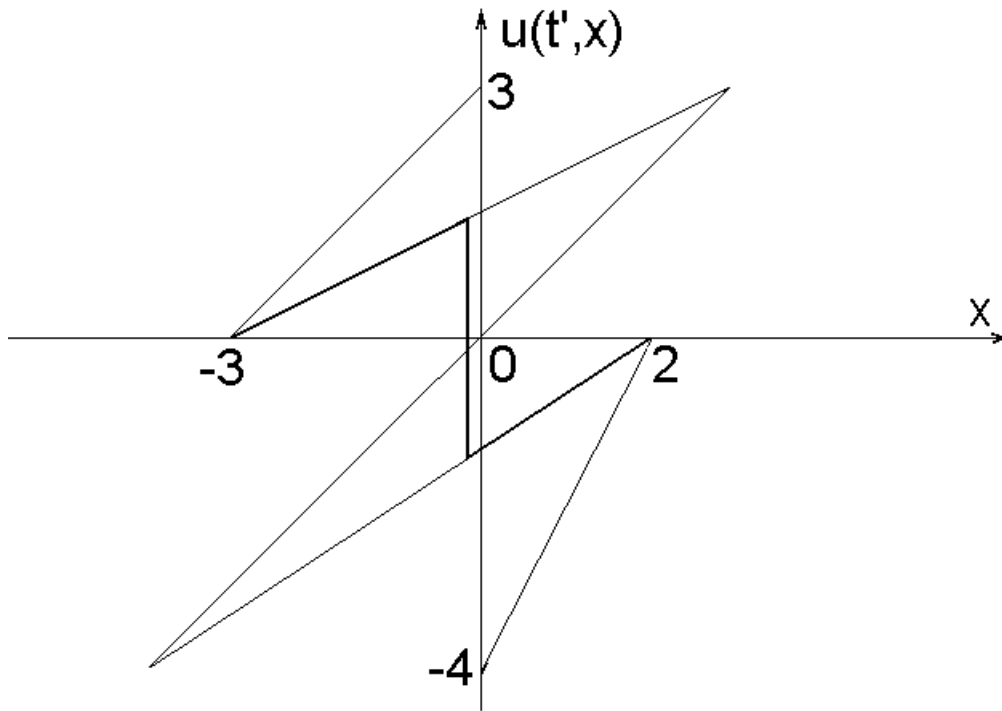


Рис. 18: форма импульса при $t = t'$ из примера 3

Площадь левого треугольника больше площади правого, но "амплитуда" левого импульса меньше. Поэтому от нуля до t' "амплитуда" влияет на движение разрыва: координата $x_p(t)$ уменьшается, не достигая $x = -3$. В противном случае было бы противоречие с законом сохранения, так как суммарная площадь начального импульса у нас больше нуля (см. рис 18).

Начиная с t' , разрыв движется вправо, и при некотором t_0 импульс становится однополярным треугольным (когда линия разрыва пересекает $x = 2$).

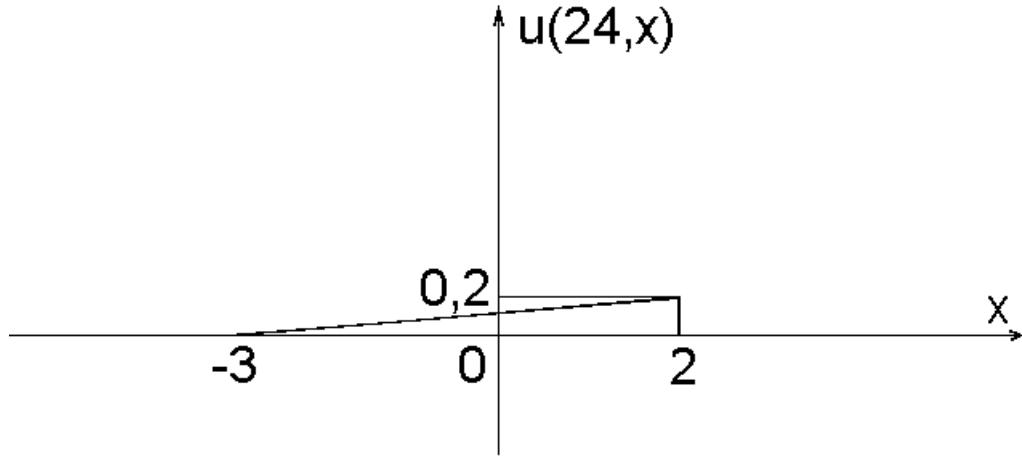


Рис. 19: форма импульса при $t = t_0$ из примера 3

Найдем t_0 :

$$\begin{aligned} 10t_0 + 7 - 7\sqrt{1+t_0}\sqrt{1+2t_0} &= 2, \\ 10t_0 + 5 - 7\sqrt{1+t_0}\sqrt{1+2t_0} &= 0, \\ \sqrt{1+2t_0}(5\sqrt{1+2t_0} - 7\sqrt{1+t_0}) &= 0. \end{aligned}$$

Поскольку $\sqrt{1+2t_0} > 0$, следовательно,

$$\begin{aligned} 5\sqrt{1+2t_0} &= 7\sqrt{1+t_0}, \\ 25 + 50t_0 &= 49 + 49t_0, \\ t_0 &= 24. \end{aligned}$$

Заметим, что найденное значение t_0 могло быть получено по формуле (52).

Значения u^- и u^+ в момент времени $t_0 = 24$ равны

$$u^- = \frac{2+3}{1+24} = \frac{1}{5}, \quad u^+ = 0.$$

Иными словами, решение при $t_0 = 24$ описывается следующей функцией (см. рис 19)

$$u(24, x) = \begin{cases} 0, & x \leq -3, x \geq 2, \\ \frac{1}{25}x + \frac{3}{25}, & -3 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

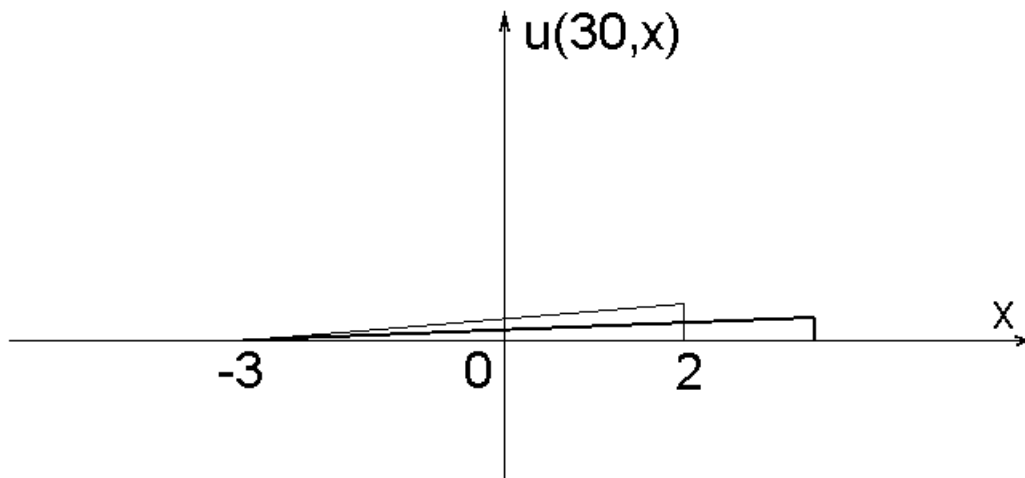


Рис. 20: форма импульса при $t > t_0$ из примера 3

Далее разрыв движется вправо с убывающей скоростью, амплитуда уменьшается согласно законам распространения однополярного треугольного импульса. (см. рис 20).

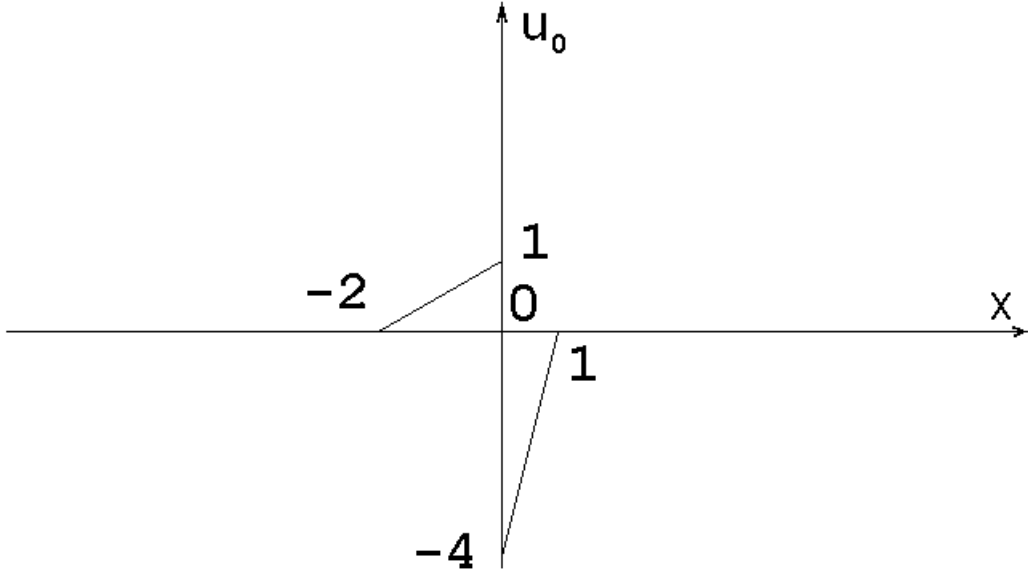


Рис. 21: начальная форма импульса из примера 4

Приведем пример двуполярного импульса, разрыв которого будет двигаться с самого начала монотонно влево.

Пример 4. Пусть

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, x \geq 1, \\ \frac{x}{2} + 1, & -2 \leq x \leq 0, \\ 4x - 4, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рисунке 21.

В этом случае

$$k_1 = 1/2, v_1 = 1, k_2 = 4, v_2 = -4$$

и система (48) принимает вид

$$u^- = \frac{x_p(t) + 2}{2 + t}, \quad u^+ = \frac{4x_p(t) - 4}{1 + 4t},$$

$$\frac{dx_p}{dt} = \frac{x_p(t) + 2}{2(2 + t)} + 2 \frac{x_p(t) - 1}{1 + 4t}.$$

Функция $x_p(t)$, являющаяся решением этой системы, согласно формуле (50) записывается в следующем виде

$$x_p(t) = \frac{\sqrt{2 + 8t} - 4\sqrt{2 + t}}{\sqrt{2 + 8t} + \sqrt{2 + t}} t.$$

Поскольку $\sqrt{2 + 8t} < 4\sqrt{2 + t}$ при $t > 0$, то координата разрыва будет отрицательной при любом $t > 0$. Покажем, что ее абсолютная величина будет монотонно возрастать. Для этого сделаем замену переменной

$$\sqrt{\frac{2 + 8t}{2 + t}} = z.$$

Откуда $t = 2\frac{z^2 - 1}{8 - z^2}$. Промежутку изменения $t \in [0; \infty)$ соответствует интервал изменения $z \in [1; 2\sqrt{2})$. Поэтому нужно показать, что

$$x_p = 2\frac{(z - 4)(z^2 - 1)}{(z + 1)(8 - z^2)} = 2\frac{z^2 - 5z + 4}{8 - z^2}$$

будет монотонно убывать на интервале $[1; 2\sqrt{2})$.

Это следует из того, что

$$\frac{x_p}{dz} = 2\frac{-5z^2 + 24z - 40}{8 - z^2} < 0$$

для всех z из $[1; 2\sqrt{2})$.

При $t = \frac{17}{4}$ координата разрыва становится равной -2 и импульс становится однополярным. Величина u^+ при этом равна 52/21.

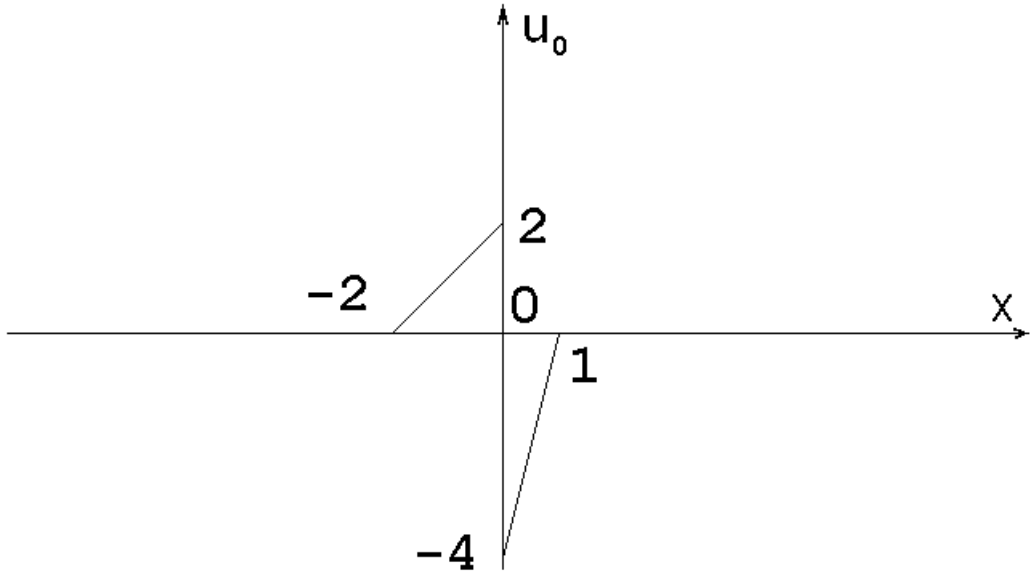


Рис. 22: начальная форма импульса из примера 5

В примере 1 координата разрыва постоянна и импульсы постепенно "поглощают" друг друга. Приведем пример начальной функции, когда суммарная площадь импульсов будет равна нулю, но x_p будет меняться.

Пример 5. Пусть

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, x \geq 1, \\ x + 2, & -2 \leq x \leq 0, \\ 4x - 4, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рисунке 22.

В этом случае

$$k_1 = 1, v_1 = 2, k_2 = 4, v_2 = -4$$

и система (48) принимает вид

$$u^- = \frac{x_p(t) + 2}{1 + t}, \quad u^+ = \frac{4x_p(t) - 4}{1 + 4t},$$

$$\frac{dx_p}{dt} = \frac{x_p(t) + 2}{2(1 + t)} + 2 \frac{x_p(t) - 1}{1 + 4t}.$$

Функция $x_p(t)$, являющаяся решением этой системы, согласно формуле (50) записывается в следующем виде

$$x_p(t) = 2 \frac{\sqrt{1 + 4t} - 2\sqrt{1 + t}}{\sqrt{1 + 4t} + \sqrt{1 + t}} t.$$

Т.к. $\sqrt{1 + 4t} < 2\sqrt{1 + t}$ при $t > 0$, то координата разрыва будет отрицательной при любом $t > 0$. Заметим, что поскольку площади импульсов равны, то x_p никогда не станет

равным -4. Для выяснения вопроса о характере изменения координаты разрыва, как и в предыдущем примере, сделаем замену переменной:

$$\sqrt{\frac{1+4t}{1+t}} = z.$$

Тогда $t = \frac{z^2 - 1}{4 - z^2}$. Промежутку изменения $t \in [0; \infty)$ соответствует интервал изменения $z \in [1; 2)$. После замены получаем функцию

$$x_p = 2 \frac{(z-2)(z^2-1)}{(z+1)(4-z^2)} = 2 \frac{1-z}{z+2}.$$

Она будет монотонно убывать на интервале $[1; 2)$, поскольку

$$\frac{x_p}{dz} = \frac{-6}{(z+2)^2} < 0$$

для всех z из $[1; 2\sqrt{2})$.

Значения x_p меняются от 0 при $t = 0$ до -1/2 при $t \rightarrow \infty$. По мере приближения точки разрыва к величине -1/2 импульсы поглощают друг друга.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложений к газовой динамике: М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства "Наука", 1968 г., 592 с.
2. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений: 2-е изд., испр. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012 г. — 656 с.
3. Попов А.В. Практикум на ЭВМ. Разностные методы решения квазилинейных уравнений первого порядка. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: издательство центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2003, — 128 с.
4. Е.А.Лапшин Определение области распространения акустического сигнала. Фундаментальная и прикладная математика, 1, N 2, 1995, с. 431-454.
5. О.А.Васильева, А.А.Карабутов, Е.А.Лапшин, О.В.Руденко Взаимодействие одномерных волн в средах без дисперсии. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983, 152 с.
6. М.Б.Виноградова, О.В.Руденко, А.П.Сухоруков Теория волн. М.: Наука, 1979, 384 с.
7. А.Ю.Горицкий, С.Н.Кружков, Г.А.Чечкин Уравнения с частными производными первого порядка. (Учебное пособие) М.: Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 1999, 96 с.
8. С.Н.Кружков Нелинейные уравнения с частными производными (Лекции). Часть 2. Уравнения первого порядка. М.: Изд-во МГУ, 1970.
9. Труды С.Н.Кружкова: Сборник статей / Под редакцией Н.С.Бахвалова; Сост. Н.С.Бахвалов, В.А.Галкин, Ю.А.Дубинский. — М.: Физико-математическая литература (ФИЗМАТЛИТ), 2000. — 336 с.