

СПЕЦКУРС

1/2 года

кафедры вычислительной математики
механико-математического факультета МГУ

**МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ
МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**

лектор - доцент Попов Анатолий Вадимович

2025 г.

ТЕМА 2.

**Линейные модельные уравнения
с одной пространственной переменной
и алгоритмы их численного решения**

рабочий конспект

© Механико-математический факультет МГУ, 2025 г.
© А.В.Попов, 2025 г.

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

В курсе лекций практически не затрагивается вопрос об использовании сеток с переменным шагом. В одномерных по пространственной переменной задачах рассматриваются области прямоугольной формы $Q = (0, T) \times \Omega$, где $\Omega = (0, X)$. По пространственной переменной x используется сетка с постоянным шагом h : $\bar{\omega}_h = \{mh \mid m = 0, \dots, M\}$, где $Mh = X$. На временном интервале $[0; T]$ также используется равномерная сетка: $\omega_\tau = \{n\tau \mid n = 0, \dots, N\}$, где $N\tau = T$. В результате в области Q вводится сетка $\bar{Q}_{\tau h} = \omega_\tau \times \bar{\omega}_h$. Узлы сетки $\bar{\omega}_h$, попадающие на границу области Ω , обозначим γ_h (граничные узлы), а попадающие в область Ω через ω_h (внутренние узлы).

Кроме сетки ω_h в ряде схем используются сдвинутые сетки с полуцелыми узлами. Через $\omega_h^{1/2}$ будем обозначать сетку $\omega_h^{1/2} = \{mh + h/2 \mid m = 0, \dots, M-1\}$, а через $\bar{Q}_{\tau h}^{1/2} = \omega_\tau \times \bar{\omega}_h^{1/2}$.

Значение функции g , определенной на сетке $\bar{Q}_{\tau h}$ (или на сетке $\bar{Q}_{\tau h}^{1/2}$), в узле (n, m) будем обозначать через g_m^n . Если индексы будут опущены, то это означает, что они равны n и m . Для сокращения записи значений функции g в узлах, соседних с узлом (n, m) , используются следующие обозначения:

$$g_m^{n+1} = \hat{g}, \quad g_{m\pm 1}^n = g^{\pm 1}.$$

Введем обозначения для среднего значения величин сеточной функции в двух соседних узлах

$$g_s = \frac{g_{m+1}^n + g_m^n}{2}, \quad g_0 = \frac{g_{m+1}^n + g_{m-1}^n}{2}, \quad g_{\bar{s}} = \frac{g_m^n + g_{m-1}^n}{2}.$$

Для разностных операторов применяются следующие обозначения

$$g_t = \frac{g_m^{n+1} - g_m^n}{\tau}, \quad g_x = \frac{g_{m+1}^n - g_m^n}{h}, \quad g_x^\circ = \frac{g_{m+1}^n - g_{m-1}^n}{2h}, \quad g_{\bar{x}} = \frac{g_m^n - g_{m-1}^n}{h}.$$

Определим используемые ниже скалярные произведения и нормы сеточных функций, заданных на сетке $\bar{\omega}_h$:

$$(v, u) = h \sum_{m=1}^{M-1} v_m u_m, \quad (v, u) = h \sum_{m=1}^{M-2} v_m u_m,$$

$$[u, v] = (u, v) + h(v_0 u_0 + v_M u_M), \quad [u, v] = (u, v) + h v_0 u_0, \quad (u, v] = (u, v) + h v_M u_M,$$

$$\|v\|_C = \max_{x_m \in \bar{\omega}_h} |v_m|, \quad \|v\| = \sqrt{(v, v)}, \quad \|v\| = \sqrt{(v, v]},$$

$$[v] = \sqrt{[v, v]}, \quad [v] = \sqrt{[v, v]}, \quad [v] = \sqrt{(v, v]},$$

$$\|v\|_2^1 = \sqrt{[v]^2 + \|v_x\|^2}.$$

ВАЖНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Для любых сеточных функций u, v и w верны следующие утверждения.

1. Формулы разностного дифференцирования произведения двух функций

$$\begin{aligned}(uv)_x &= u_x v^{+1} + uv_x = u_x v_s + u_s v_x, \\ (uv)_0 &= u_0 v^{-1} + u^{+1} v_0 = u_0 v_0 + u_0 v_0.\end{aligned}\tag{1}$$

2. Формулы суммирования по частям (аналоги формулы Лейбница)

$$\begin{aligned}[u, v_x] &= -(u_{\bar{x}}, v) - u_0 v_0 + u_M v_M, \\ (u, v_x) &= -(u_{\bar{x}}, v) - u_0 v_1 + u_M v_M, \\ (u, v_{\bar{x}}) &= -(u_x, v) - u_0 v_0 + u_M v_{M-1}.\end{aligned}\tag{2}$$

3. Неравенство Коши-Буняковского и ε -неравенство

$$\begin{aligned}|(u, v)| &\leq \|u\| \|v\| \leq \varepsilon \|u\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|v\|^2, \\ |(uv, w)| &\leq \|u\|_C \|v\| \|w\|.\end{aligned}\tag{3}$$

4. Сеточные теоремы вложения

$$\begin{aligned}\|u\|_C^2 &\leq \varepsilon \|u_x\|^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{X}\right) \|u\|^2, \\ \|u\|_C &\leq \frac{\sqrt{X}}{2} \|u_x\|, \quad \text{при } u_0 = u_M = 0, \\ \frac{h^2}{4} \|u_x\|^2 &\leq \|u\|^2 \leq \frac{X^2}{8} \|u_x\|^2, \quad \text{при } u_0 = u_M = 0.\end{aligned}\tag{4}$$

ЛЕММА ГРОНУОЛЛА

Ниже будет часто использоваться следующий вариант разностной леммы Гронуолла.
ЛЕММА Пусть неотрицательные величины Y_0, Y_1, \dots, Y_N удовлетворяют неравенству

$$Y_n \leq Y_{n-1} + C\tau(Y_{n-1} + Y_n) + \tau b_n, \quad n = 1, \dots, N.$$

Кроме того, известно, что $b_n \geq 0$ для $n = 1, \dots, N$, $\tau < \tau_0$, $\tau_0 C = 1/2$, $\tau N = T$.
 Тогда верна оценка

$$\max_{n=1, \dots, N} \sqrt{Y_n} \leq e^{CT} \sqrt{Y_0 + 2\tau \sum_{n=1}^N b_n}.$$

Ввиду важности этой леммы в дальнейших рассуждениях приведем ее доказательство.

Доказательство. Перепишем неравенство из условия леммы в виде

$$(1 - \tau C)Y_n \leq (1 + \tau C)Y_{n-1} + \tau b_n, \quad n = 1, \dots, N.$$

В силу условия леммы оно равносильно следующему неравенству

$$Y_n \leq \frac{1 + \tau C}{1 - \tau C} Y_{n-1} + \frac{\tau}{1 - \tau C} b_n, \quad n = 1, \dots, N.$$

Из последнего неравенства заключаем, что

$$Y_n \leq \left(\frac{1 + \tau C}{1 - \tau C} \right)^n Y_0 + \frac{\tau}{1 - \tau C} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1 + \tau C}{1 - \tau C} \right)^{n-k} b_k, \quad n = 1, \dots, N.$$

Откуда, учитывая, что

$$(1 + \tau C)^n \leq (1 + \tau C)^{CT/\tau C} \leq e^{CT}$$

и

$$(1 - \tau C)^n \geq (1 - \tau C)^{-CT/-(\tau C)} \geq e^{-CT},$$

получаем

$$Y_n \leq e^{2CT} \left(Y_0 + 2\tau \sum_{n=1}^N b_n \right).$$

Откуда следует утверждение леммы.

УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(t, x), \quad (5)$$

где $u = u(t, x)$ — неизвестная функция, а μ и $f(t, x)$ — положительный постоянный коэффициент теплопроводности и известная функция.

Пусть решение уравнения (5) ищется в области Q

$$\bar{Q} = [0, T] \times [0, X].$$

В этом случае требуется задать начальное условие

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in [0, X] \quad (6)$$

и краевые условия

$$\mu \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha(u - \chi) \quad (7)$$

в точках участков границы $[0, T] \times (\{0\} \cup \{X\})$. В условии (7) коэффициент α и функция $\chi = \chi(t)$ считаются известными.

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Для численного решения уравнения (5) часто используется разностная схема

$$v_t = \sigma \mu \hat{v}_{x\bar{x}} + (1 - \sigma) \mu v_{x\bar{x}} + F. \quad (8)$$

При $\sigma = 0$ это явная схема с аппроксимацией на гладких решениях порядка $\tau + h^2$.
устойчивая при выполнении условия $\tau < \frac{h^2}{2\mu}$.

При $\sigma = 1$ это неявная схема с аппроксимацией на гладких решениях порядка $\tau + h^2$ и безусловно устойчивая.

При $\sigma = 1/2$ это неявная схема с аппроксимацией на гладких решениях порядка $\tau^2 + h^2$ и безусловно устойчивая.

Во всех неявных схемах типа (8) для перехода на следующий временной слой требуется решать системы линейных уравнений

$$A\hat{v} = b,$$

матрицы которых представимы в виде суммы

$$A = E + \frac{\tau\sigma\mu}{h^2} A_2, \quad (9)$$

где матрица A_2 является трехдиагональной положительно определенной матрицей

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрица A является невырожденной, поскольку

$$(Av, v) = (v, v) + \frac{\tau\sigma\mu}{h^2} (A_2v, v) \geq \|v\|^2.$$

Поэтому решение разностной схемы всегда существует и единственно.

Системы с трехдиагональными матрицами вида (9) решаются методом прогонки, в котором число арифметических операций прямо пропорционально числу неизвестных. Поэтому на практике стараются использовать неявные разностные схемы в силу их безусловной устойчивости.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ

Напомним на примере неявной разностной схемы для уравнения теплопроводности метод энергетических неравенств, применяемый для исследования точности разностных схем. Пусть для решения задачи (5)-(6) с краевыми условиями

$$u(t, 0) = u_l(t), \quad u(t, X) = u_r(t) \quad (10)$$

используется чисто неявная разностная схема

$$\begin{aligned} v_t &= \mu \hat{v}_{x\bar{x}} + \hat{f}, \\ \hat{v}_0 &= u_l(n\tau + \tau), \quad \hat{v}_M = u_r(n\tau + \tau), \\ v_m^0 &= u_0(mh), \quad m = 0, \dots, M. \end{aligned} \quad (11)$$

Обозначим разность между решением разностной схемы (11) и точным решением задачи (5),(6),(10) в узлах сетки через функцию w

$$v = u + w.$$

Функция w является решением задачи

$$\begin{aligned} w_t &= \mu \hat{w}_{x\bar{x}} + \varphi, \\ \hat{w}_0 &= 0, \quad \hat{w}_M = 0, \\ w_m^0 &= \psi(mh), \quad m = 0, \dots, M. \end{aligned} \quad (12)$$

В уравнениях (12) через функцию φ обозначена невязка, получающаяся при подставлении точного решения задачи (5),(6),(10) в разностную схему

$$\varphi = -u_t + \mu \hat{u}_{x\bar{x}} + \hat{f},$$

а через функцию ψ — погрешность вычисления начальных данных в узлах сетки. Значения φ являются погрешностями аппроксимации в узлах сетки разностной схемы и при условии, что $u \in C^{2,4}(Q)$, имеют порядок $O(\tau + h^2)$.

Уравнения типа (12) называют **уравнениями для ошибки**.

ОЦЕНКИ ОШИБКИ В НОРМЕ L_2

Умножив уравнения для ошибки (12) скалярно на \hat{w} , получаем

$$(\hat{w}, w_t) = \mu(\hat{w}, \hat{w}_{x\bar{x}}) + (\hat{w}, \varphi). \quad (13)$$

Оценим нужным нам образом слагаемые из тождества (13)

$$(\hat{w}, w_t) = \left(\frac{\hat{w} + w}{2}, w_t \right) + \frac{\tau}{2}(w_t, w_t) = \frac{1}{2\tau}\|\hat{w}\|^2 - \frac{1}{2\tau}\|w\|^2 + \frac{\tau}{2}\|w_t\|^2,$$

$$(\hat{w}, \hat{w}_{x\bar{x}}) = -\|\hat{w}_x\|^2,$$

$$(\hat{w}, \varphi) \leq \varepsilon\|\hat{w}\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|\varphi\|^2 \leq$$

$$\leq \varepsilon \frac{X^2}{8} \|\hat{w}_x\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|\varphi\|^2.$$

С помощью этих неравенств из тождества (13) получаем неравенство

$$\|\hat{w}\|^2 + 2\tau \left(\mu - \varepsilon \frac{X^2}{8} \right) \|\hat{w}_x\|^2 - \|w\|^2 \leq \tau \frac{1}{2\varepsilon} \|\varphi\|^2.$$

Выбрав $\varepsilon = \frac{4\mu}{X^2}$, имеем

$$\|\hat{w}\|^2 + \tau\mu\|\hat{w}_x\|^2 - \|w\|^2 \leq \tau \frac{X^2}{8\mu} \|\varphi\|^2.$$

Откуда, просуммировав последнее неравенство по всем временным слоям, получаем оценку

$$\max_{n=1, \dots, N} \sqrt{\|w^n\|^2 + \tau\mu \sum_{k=1}^n \|\hat{w}_x^k\|^2} \leq \sqrt{\tau \frac{X^2}{8\mu} \sum_{n=1}^N \|\varphi\|^2}. \quad (14)$$

Можно оценить слагаемое (\hat{w}, φ) по другому

$$|(\hat{w}, \varphi)| = |(\hat{w}_x, \Phi)| \leq \varepsilon\|\hat{w}_x\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|\Phi\|^2$$

где $\Phi_{\bar{x}} = \varphi$. Положив $\varepsilon = \frac{\mu}{2}$, приходим к неравенству

$$\|\hat{w}\|^2 + \tau\mu\|\hat{w}_x\|^2 - \|w\|^2 \leq \tau \frac{1}{\mu} \|\Phi\|^2.$$

Из которого получается оценка

$$\max_{n=1, \dots, N} \sqrt{\|w^n\|^2 + \tau\mu \sum_{k=1}^n \|\hat{w}_x^k\|^2} \leq \sqrt{\tau \frac{1}{\mu} \sum_{n=1}^N \|\Phi\|^2}. \quad (15)$$

Отметим, что обе оценки (14) и (15) являются равномерными по длине временного промежутка T , но не по параметру μ .

Можно избавиться от неравномерности по μ , пожертвовав равномерностью по T . Для этого оценим слагаемое (\hat{w}, φ) следующим образом

$$|(\hat{w}, \varphi)| \leq \frac{1}{2}(\|\hat{w}\|^2 + \|\varphi\|^2).$$

Используя это неравенство, получим

$$\|\hat{w}\|^2 + 2\tau\mu[\|\hat{w}_x\|^2 - \|w\|^2] \leq \tau\|\hat{w}\|^2 + \tau\|\varphi\|^2.$$

Откуда по разностной лемме Гронуолла имеем

$$\max_{n=1, \dots, N} \sqrt{\|w^n\|^2 + \tau\mu \sum_{k=1}^n \|w_x^k\|^2} \leq e^T \sqrt{\tau \sum_{n=1}^N \|\varphi\|^2}. \quad (16)$$

ОЦЕНКИ ОШИБКИ В НОРМЕ W_2^1

Умножив уравнения для ошибки (12) скалярно на $\hat{w}_{x\bar{x}}$, получаем

$$(\hat{w}_{x\bar{x}}, w_t) = \mu(\hat{w}_{x\bar{x}}, \hat{w}_{x\bar{x}}) + (\hat{w}_{x\bar{x}}, \varphi). \quad (17)$$

Оценим нужным нам образом слагаемые из тождества (17)

$$-(\hat{w}_{x\bar{x}}, w_t) = [\hat{w}_x, \hat{w}_{xt}] = \frac{1}{2\tau} \|\hat{w}_x\|^2 - \frac{1}{2\tau} \|w_x\|^2 + \frac{\tau}{2} \|w_{xt}\|^2,$$

$$(\hat{w}_{x\bar{x}}, \hat{w}_{x\bar{x}}) = \|\hat{w}_{x\bar{x}}\|^2,$$

$$(\hat{w}_{x\bar{x}}, \varphi) \leq \varepsilon \|\hat{w}_{x\bar{x}}\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|\varphi\|^2.$$

С помощью этих неравенств из тождества (17) получаем неравенство

$$\|\hat{w}_x\|^2 + 2\tau(\mu - \varepsilon) \|\hat{w}_{x\bar{x}}\|^2 - \|w_x\|^2 \leq \tau \frac{1}{2\varepsilon} \|\varphi\|^2.$$

Выбрав $\varepsilon = \frac{\mu}{2}$, имеем

$$\|\hat{w}_x\|^2 + \tau\mu \|\hat{w}_{x\bar{x}}\|^2 - \|w_x\|^2 \leq \tau \frac{1}{\mu} \|\varphi\|^2.$$

Откуда, просуммировав последнее неравенство по всем временным слоям, получаем оценку

$$\max_{n=1, \dots, N} \sqrt{\|w_x^n\|^2 + \tau\mu \sum_{k=1}^n \|w_{x\bar{x}}^k\|^2} \leq \sqrt{\tau \frac{1}{\mu} \sum_{n=1}^N \|\varphi\|^2}. \quad (18)$$

Отметим, что полученная оценка (18) является равномерной по длине временного промежутка T , но не по параметру μ . Можно избавиться от неравномерности по μ , пожертвовав равномерностью по T . Для этого оценим слагаемое $(\hat{w}_{x\bar{x}}, \varphi)$ следующим образом

$$|(\hat{w}_{x\bar{x}}, \varphi)| = |[\hat{w}_x, \varphi_x]| \leq \frac{1}{2} (\|\hat{w}_x\|^2 + \|\varphi_x\|^2).$$

Используя это неравенство, получим

$$\|\hat{w}_x\|^2 + 2\tau\mu \|\hat{w}_{x\bar{x}}\|^2 - \|w_x\|^2 \leq \tau \|\hat{w}_x\|^2 + \tau \|\varphi_x\|^2.$$

Откуда по разностной лемме Гронуолла имеем

$$\max_{n=1, \dots, N} \sqrt{\|w_x^n\|^2 + 2\tau\mu \sum_{k=1}^n \|w_{x\bar{x}}^k\|^2} \leq e^T \sqrt{\tau \sum_{n=1}^N \|\varphi_x\|^2}. \quad (19)$$

УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПОСТОЯННОЙ КОНВЕКЦИЕЙ
(ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ БЮРГЕСА)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(t, x), \quad (20)$$

где $u = u(t, x)$ — неизвестная функция, a и $\mu > 0$ — постоянные коэффициенты скорости конвекции и теплопроводности, а $f(t, x)$ — известная функция.

Пусть решение уравнения (20) ищется в области

$$Q = [0, T] \times [0, X].$$

В этом случае требуется задать начальное условие

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in [0, X] \quad (21)$$

и краевые условия

$$\mu \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha(u - \chi) \quad (22)$$

в точках участков границы $[0, T] \times (\{0\} \cup \{X\})$. В условии (22) коэффициент α и функция $\chi = \chi(t)$ считаются известными.

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

Обобщим результаты, полученные при исследовании неявной разностной схемы для уравнения теплопроводности методом энергетических неравенств, на случай уравнения (20). Сделаем это на примере задачи (20)-(21) с краевыми условиями

$$u(t, 0) = u_l(t), \quad u(t, X) = u_r(t). \quad (23)$$

Рассмотрим чисто неявную разностную схему

$$\begin{aligned} v_t + a\hat{v}_x &= \mu\hat{v}_{xx} + \hat{f}, \\ \hat{v}_0 &= u_l(n\tau + \tau), \quad \hat{v}_M = u_r(n\tau + \tau), \\ v_m^0 &= u_0(mh), \quad m = 0, \dots, M. \end{aligned} \quad (24)$$

Для нахождения решения разностной схемы (24) на каждом временном слое требуется решать СЛАУ

$$A\hat{v} = b,$$

где $A = E + \frac{\tau a}{2h}A_1 + \frac{\tau\mu}{h^2}A_2$.

Матрица A_1 кососимметричная

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица A_2 — матрица второй разностной производной была уже описана в случае разностной схемы для уравнения теплопроводности.

Матрица A является невырожденной, поскольку

$$(Av, v) = (v, v) + \frac{\tau a}{2h}(A_1v, v) + \frac{\tau\sigma\mu}{h^2}(A_2v, v) \geq \|v\|^2.$$

Поэтому решение разностной схемы всегда существует и единственно.

Матрица A трехдиагональная, поэтому СЛАУ с ней можно формально решать методом прогонки, в котором число арифметических операций прямо пропорционально числу неизвестных. Вопрос устойчивости применения прогонки в случае подобных матриц будет рассмотрен в отдельной лекции.

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОШИБКИ

Обозначим разность между решением разностной схемы (24) и точным решением задачи (20),(21),(23) в узлах сетки через функцию w

$$v = u + w.$$

Функция w является решением задачи

$$\begin{aligned} w_t + a\hat{w}_x^0 &= \mu\hat{w}_{x\bar{x}} + \varphi, \\ \hat{w}_0 &= 0, \quad \hat{w}_M = 0, \\ w_m^0 &= \psi(mh), \quad m = 0, \dots, M. \end{aligned} \tag{25}$$

В уравнениях (25) через функцию φ обозначена невязка, получающаяся при подставлении точного решения задачи (20),(21),(23) в разностную схему

$$\varphi = -u_t - a\hat{u}_x^0 + \mu\hat{u}_{x\bar{x}} + \hat{f},$$

а через функцию ψ — погрешность вычисления начальных данных в узлах сетки. Значения φ являются погрешностями аппроксимации в узлах сетки разностной схемы и при условии, что $u \in C^{2,4}(Q)$, имеют порядок $O(\tau + h^2)$.

ОЦЕНКА ОШИБКИ В НОРМЕ L_2

Умножив уравнения для ошибки (25) скалярно на \hat{w} , получаем

$$(\hat{w}, w_t) + (\hat{w}, a\hat{w}_x) = \mu(\hat{w}, \hat{w}_{x\bar{x}}) + (\hat{w}, \varphi). \quad (26)$$

Принимая во внимание, что в силу кососимметричности оператора A_1 выполняется равенство

$$(\hat{w}, \hat{w}_x) = 0,$$

из тождества (26), дословно повторяя доказательства неравенств (14)-(16), можно получить следующие оценки

$$\max_{n=1,\dots,N} \sqrt{\|w^n\|^2 + \tau\mu \sum_{k=1}^n \|w_x^k\|^2} \leq \sqrt{\tau \frac{X^2}{8\mu} \sum_{n=1}^N \|\varphi\|^2}. \quad (27)$$

$$\max_{n=1,\dots,N} \sqrt{\|w^n\|^2 + \tau\mu \sum_{k=1}^n \|w_x^k\|^2} \leq \sqrt{\tau \frac{1}{\mu} \sum_{n=1}^N \|\Phi\|^2}. \quad (28)$$

$$\max_{n=1,\dots,N} \sqrt{\|w^n\|^2 + \tau\mu \sum_{k=1}^n \|w_x^k\|^2} \leq e^T \sqrt{\tau \sum_{n=1}^N \|\varphi\|^2}. \quad (29)$$

В неравенстве (28) через Φ обозначена сеточная первообразная функции φ

$$\Phi_m = h \sum_{k=0}^m \varphi_k.$$

Обратим внимание, что первые две оценки являются равномерными по длине временного интервала T , но ухудшаются при $\mu \rightarrow 0$. Третья оценка наоборот равномерна по μ , но ухудшается при увеличении T .

ОЦЕНКИ ОШИБКИ В НОРМЕ W_2^1

Умножив уравнения для ошибки (25) скалярно на $\hat{w}_{x\bar{x}}$, получаем

$$(\hat{w}_{x\bar{x}}, w_t) + a(\hat{w}_{x\bar{x}}, \hat{w}_x) = \mu(\hat{w}_{x\bar{x}}, \hat{w}_{x\bar{x}}) + (\hat{w}_{x\bar{x}}, \varphi). \quad (30)$$

Новое слагаемое $a(\hat{w}_{x\bar{x}}, \hat{w}_x)$ по сравнению с уравнением теплопроводности оценим следующим образом

$$|a(\hat{w}_{x\bar{x}}, \hat{w}_x)| \leq \varepsilon \|\hat{w}_{x\bar{x}}\| + \frac{a^2}{4\varepsilon} \|\hat{w}_x\|^2.$$

Используя это неравенство, из тождества (30) получаем

$$\|\hat{w}_x\|^2 + 2\tau(\mu - \varepsilon)\|\hat{w}_{x\bar{x}}\|^2 - \|w_x\|^2 \leq \tau \left(\frac{a^2}{2\varepsilon} + 1 \right) \|\hat{w}_x\|^2 + \tau \|\varphi\|^2.$$

Выбрав $\varepsilon = \frac{\mu}{2}$, по разностной лемме Гронуолла имеем

$$\max_{n=1, \dots, N} \sqrt{\|w_x^n\|^2 + \tau\mu \sum_{k=1}^n \|w_{x\bar{x}}^k\|^2} \leq e^{T \left(\frac{a^2}{\mu} + 1 \right)} \sqrt{\tau \sum_{n=1}^N \|\varphi\|^2}. \quad (31)$$

УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА

Представителем уравнений, описывающих конвективные процессы, является уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x), \quad (32)$$

где $u = u(t, x)$ — неизвестная функция, а a и f — известные функции временной и пространственной переменных. Функция a задает в каждой точке (t, x) скорость переноса.

Дифференциальный оператор уравнения (32) можно понимать, как производную функции $u(t, x)$ в направлении

$$\frac{dx}{dt} = a(t, x) \quad (33)$$

по переменной t

$$\frac{du}{dt} \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Уравнение (33) определяет направление дифференцирования в уравнении (32), которое называется характеристическим направлением, а кривые $x = X(t)$, являющиеся решениями уравнения (33), называют характеристиками.

В верхней полуплоскости $Q = \{(t, x) | t > 0, -\infty < x < \infty\}$ рассмотрим задачу Коши

$$u(0, x) = u_0(x). \quad (34)$$

В случае, когда $a(t, x) \in C^1(Q)$, через каждую точку (t, x) проходит всего одна характеристика, пересекающая ось $t = 0$ в точке $x_0 = X^{-1}(t, x)$. Тогда решение в точке (t, x) задачи (32), (34) можно определить, как

$$u(t, x) = \int_0^t f(\tau, X(\tau)) d\tau + u_0(x_0).$$

В простейшем случае, когда $a \equiv \text{const}$, а $f \equiv 0$, решение задачи (32), (34) записывается в виде

$$u(t, x) = u_0(x - at).$$

Эта функция является **классическим** решением задачи (32), (34) при условии, что $u_0 \in D(R)$.

Если u_0 не является дифференцируемой функцией, то функцию $u(t, x)$ считают решением в **широком смысле**, т.е. как функцию, являющуюся непрерывно дифференцируемой вдоль характеристик.

При локализации области изменения пространственной переменной необходимо задавать помимо начального условия (34) еще и граничные условия. Пусть область, где ищется решение, прямоугольной формы

$$Q = [0, T] \times [0, 1].$$

Тогда на участках границы $[0, T] \times (\{0\} \cup \{1\})$ требуется задать значения функции u в точках, где вектор направления дифференцирования $\left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \right)$ направлен внутрь области Q или, как принято говорить, характеристики "входят" в область.

ПРОСТЕЙШИЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА С ПОСТОЯННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Для численного решения уравнений и систем гиперболического типа основные свойства (точность, устойчивость, монотонность и т.д.) разностных схем проявляются уже в случае одномерного линейного уравнения переноса с постоянным коэффициентом. Рассмотрим **простейшие** разностные схемы для такого уравнения.

1. Схемы с разностями против потока

$$v_t + \sigma a \hat{v}_x + (1 - \sigma) a v_x = 0, \quad \text{при } a < 0; \quad (35)$$

$$v_t + \sigma a \hat{v}_{\bar{x}} + (1 - \sigma) a v_{\bar{x}} = 0, \quad \text{при } a > 0; \quad (36)$$

Схемы (35) и (36) аппроксимируют уравнение переноса на гладких решениях с порядком $\tau + h$. Чисто неявные схемы ($\sigma = 1$) являются безусловно устойчивыми, а явные схемы ($\sigma = 0$) условно устойчивы при условии $\frac{|a|\tau}{h} < 1$.

2. Схема "тренога" (Лакса-Вендроффа)

$$v_t + a v_{0x} = \frac{a^2 \tau}{2} v_{x\bar{x}}. \quad (37)$$

Схема (37) аппроксимирует уравнение переноса на гладких решениях с порядком $\tau^2 + h^2$ и условно устойчива при условии $\frac{|a|\tau}{h} < 1$.

3. Неявная схема с центральной разностью

$$v_t + a\hat{v}_x = 0. \quad (38)$$

Схема (38) аппроксимирует уравнение переноса на гладких решениях с порядком $\tau + h^2$ и безусловно устойчива.

Схема приводит к решению системы уравнений с трехдиагональной матрицей и требует задания "лишнего" граничного условия. Поэтому на выходе (там, где вектор направления дифференцирования направлен из области) нужно использовать аппроксимацию с односторонними разностями. Для сохранения порядка аппроксимации требуется вводить дополнительное слагаемое с нижнего слоя

$$v_{t,0} + a\hat{v}_{x,0} - \frac{ah}{2}(v_{x\bar{x},1} - 0.5v_{x\bar{x},2}) = 0, \quad \text{при } a < 0; \quad (39)$$

$$v_{t,M} + a\hat{v}_{x,M} + \frac{ah}{2}(v_{x\bar{x},M-1} - 0.5v_{x\bar{x},M-2}) = 0, \quad \text{при } a > 0. \quad (40)$$

Добавки с нижнего слоя, использованные в формулах (39) и (40), обеспечивают точность порядка $\tau + h^2$ при вычислениях гладких решений уравнения переноса в норме $L_{2,h}$. Для достижения этой точности в норме $W_{2,h}^1$ и C_h эти добавки необходимо заменить на выражения

$$-ah(v_{x\bar{x},1} - \frac{1}{2}v_{x\bar{x},2}) \quad \text{и} \quad ah(v_{x\bar{x},M-1} - \frac{1}{2}v_{x\bar{x},M-2}).$$

4. Схема "крест"

$$v_0 + av_0 = 0. \quad (41)$$

Это явная трехслойная разностная схема. Ее порядок аппроксимации $\tau^2 + h^2$, а условие устойчивости $\frac{|a|\tau}{h} < 1$. Эта схема требует знания сеточного решения на двух предыдущих слоях для нахождения решения на очередном временном слое.

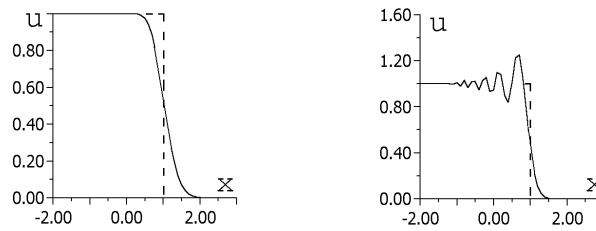


Рис. 1: два типа численного решения

ТОЧНОСТЬ ПРОСТЕЙШИХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

По теореме Филиппова из аппроксимации и устойчивости линейных разностных схем следует сходимость с порядком, равным порядку аппроксимации. Поэтому в случае расчета гладких решений уравнения переноса лучше всего из схем (35)-(40) зарекомендовала себя схема "тренога". Однако на практике в случае гиперболических уравнений (а уравнение переноса является простейшим примером гиперболического уравнения) часто требуется найти решение, не обладающее достаточной гладкостью. При попытке вычислить разрывное решение, имеющее вид ступеньки, используя схемы (35)-(40), получаются следующие численные решения, изображенные на рисунке 1. Ошибки численных решений, изображенных на этом рисунке, имеют важное отличие друг от друга. Если на левом графике разрыв размывается монотонно на несколько узлов, то на правом численное решение при приближении к точке разрыва ведет себя осциллирующим образом. В случае простых схем, это легко объяснить, проанализировав формулы схемы. Для этого требуется выписать "дифференциальное приближение" разностной схемы.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Пусть разностное решение v^h является проекцией на сетку гладкой функции v . Функция v в общем случае не удовлетворяет дифференциальному уравнению, которое аппроксимирует разностная схема.

Определение. Дифференциальное уравнение, решением которого является функция v , называют дифференциальным приближением разностной схемы.

Как правило, дифференциальное приближение содержит бесконечное число членов, в каждый из которых входит производная функции v с коэффициентом, зависящим от шагов сетки. Чем выше порядок производной, тем выше порядок малости по τ и h этого члена. На практике дифференциальное приближение обычно выписывают до членов порядка $\underline{\underline{O}}(\tau^n + h^m)$ потому, что, как будет видно из дальнейшего, именно члены с наименьшим порядком по τ и h вносят наибольшее возмущение в функцию v , по сравнению с точным решением дифференциальной задачи. Более того, дифференциальное приближение стараются выписывать в таком виде, чтобы в дополнительные по сравнению с исходным дифференциальным уравнением члены не входили частные производные по временной переменной, что более удобно для анализа характера вносимых возмущений.

Выведем для примера дифференциальное приближение разностной схемы (36) с $\sigma = 0$

$$v_t + av_{\bar{x}} = 0 \tag{42}$$

с точностью до членов порядка $\underline{\underline{O}}(\tau^3 + h^3)$.

Поскольку функция v по предположению является гладкой, то подставим в (42) вместо v_m^{n+1} и v_{m-1}^n их выражения в виде рядов Тейлора, с центром разложения в узле (n, m) и с точностью разложения до $\underline{\underline{O}}(\tau^4)$ и $\underline{\underline{O}}(h^4)$ соответственно. В результате получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau} \left(\left[v + \tau \dot{v} + \frac{\tau^2}{2} \ddot{v} + \frac{\tau^3}{6} \dddot{v} + \underline{\underline{O}}(\tau^4) \right] - v \right) + \\ & + \frac{a}{h} \left(v - \left[v - h v' + \frac{h^2}{2} v'' - \frac{h^3}{6} v''' + \underline{\underline{O}}(h^4) \right] \right) = 0. \end{aligned} \quad (43)$$

После несложных преобразований уравнение (43) приводится к виду

$$\dot{v} + a v' = -\frac{\tau}{2} \ddot{v} + \frac{a h}{2} v'' - \frac{\tau^2}{6} \ddot{v} - \frac{a h^2}{6} v''' + \underline{\underline{O}}(\tau^3 + h^3). \quad (44)$$

В левой части последнего равенства записано исходное волновое уравнение, которое аппроксимирует разностная схема (42), а в правой — погрешность аппроксимации, которая в общем случае отлична от нуля. Далее производные по времени, входящие в погрешность аппроксимации, заменяются производными по пространственной переменной с требуемой точностью. Для этого выразим производную \ddot{v} через производную по x . Дифференцируя (44) по времени, получаем

$$\ddot{v} + a \dot{v}' = -\frac{\tau}{2} \ddot{v} + \frac{a h}{2} v'' - \frac{\tau^2}{6} \ddot{v} - \frac{a h^2}{6} v''' + \underline{\underline{O}}(\tau^3 + h^3), \quad (45)$$

а дифференцируя (44) по x и умножая на $-a$, находим

$$-a \dot{v}' - a^2 v'' = \frac{a \tau}{2} \ddot{v}' - \frac{a^2 h}{2} v''' + \frac{a \tau^2}{6} \ddot{v}' + \frac{a^2 h^2}{6} v''' + \underline{\underline{O}}(\tau^3 + h^3). \quad (46)$$

Складывая (45) и (46), получаем

$$\ddot{v} = a^2 v'' + \tau \left(\frac{-\ddot{v}}{2} + \frac{a}{2} \ddot{v}' + \underline{\underline{O}}(\tau) \right) + h \left(\frac{a}{2} \dot{v}'' - \frac{a^2}{2} v''' + \underline{\underline{O}}(h) \right). \quad (47)$$

Аналогично можно получить следующие выражения для производных \ddot{v} , \dot{v}' , \dot{v}'' :

$$\begin{aligned} \ddot{v} &= -a^3 v''' + \underline{\underline{O}}(\tau + h), \\ \dot{v}' &= a^2 v''' + \underline{\underline{O}}(\tau + h), \\ \dot{v}'' &= -a v''' + \underline{\underline{O}}(\tau + h). \end{aligned} \quad (48)$$

Заменяя в правой части уравнения (44) производные по временной переменной на производные по пространственной переменной по формулам (47) и (48), получаем

$$\dot{v} + av' = \frac{ah}{2}(1 - \nu)v'' - \frac{ah^2}{6}(2\nu^2 - 3\nu + 1)v''' + \underline{\underline{O}}(\tau^3 + h^3), \quad (49)$$

где $\nu = a\tau/h$. Уравнение (49) и называют дифференциальным приближением разностной схемы (42) с точностью до членов порядка $\underline{\underline{O}}(\tau^3 + h^3)$.

Подчеркнем, что для исключения производных по времени высших порядков необходимо использовать именно уравнение, получающееся после подстановки разложения в ряд Тейлора в разностное уравнение, (в нашем примере это уравнение (44)), а не исходное уравнение в частных производных, для решения которого предназначена разностная схема (для данного примера — волнового уравнения). Это связано с тем, что решение исходного уравнения в общем случае не является решением разностного уравнения, а дифференциальное приближение следует из разностного уравнения. Поэтому исходное уравнение в частных производных не должно использоваться для исключения производных по времени.

ДИССИПАТИВНЫЕ И ДИСПЕРСИОННЫЕ СВОЙСТВА

При использовании метода конечных разностей на самом деле ищется решение уравнения, являющегося дифференциальным приближением разностной схемы, а не исходного уравнения в частных производных. Следовательно, проанализировав дифференциальное приближение разностной схемы, можно определить основные качественные свойства разностного решения. Коротко опишем основную идею такого анализа.

Решением простейшего волнового уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (50)$$

с начальным условием

$$u(0, x) = e^{ikx} \quad (51)$$

является волна

$$u(t, x) = e^{i(\omega t + kx)}, \quad (52)$$

где $\omega = -ak$.

Линейное уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (53)$$

с начальным условием (51) имеет решение в виде волны (52), где

$$\omega = -ak + i\mu k^2$$

. Следовательно, частота колебаний по времени решения уравнения (53) осталась такой же, как и у решения уравнения (50), а амплитуда волны стала зависеть от числа μ : при $\mu > 0$ амплитуда волны с увеличением времени затухает, а при $\mu < 0$ — возрастает. Более того, при $\mu < 0$ задача Коши в полуплоскости $t > 0$ для уравнения (53) с начальным условием (51) является некорректной.

Обратимся теперь к рассмотрению линейного уравнения Кортвега-де-Фриза

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \xi \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}. \quad (54)$$

Его решением с начальным условием (51) является волна (52), у которой

$$\omega = -ak - \xi k^3.$$

Такая волна не меняет своей амплитуды с течением времени, но частота колебаний по времени зависит по другому закону, чем у решения уравнения (50).

Аналогичные выводы можно сделать и для уравнений, содержащих производные по пространственной переменной более высокого порядка: производные четного порядка определяют изменение амплитуды волны, а нечетного порядка частоту колебаний по времени.

Таким образом, неявная замена при использовании метода конечных разностей решаемого уравнения уравнением, содержащим старшие производные по пространственным переменным, приводит к качественным изменениям у получаемых решений по сравнению с решениями исходной задачи. Безусловно, наибольший вклад в изменение решения вносит тот член дифференциального приближения, не входящий в исходное уравнение, который имеет наименьший порядок малости в зависимости от шагов разностной сетки.

Проиллюстрируем сказанное выше на примере разностной схемы (42). Пусть с ее помощью решается задача о распространении волны, описываемой уравнением (50) при $a = 1$ и начальным условием

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x > 0. \end{cases} \quad (55)$$

Точное решение этой задачи задается формулой

$$u(t, x) = u_0(x - t); \quad (56)$$

иными словами, профиль точного решения не будет меняться с ростом t , а будет лишь сдвигаться вправо со скоростью $a = 1$.

Решение же разностной схемы (42) при $\tau/h < 1$ будет тоже иметь профиль, сдвигающийся вправо со скоростью $a = 1$, но который будет постепенно сглаживаться (левый график рис. 1). Это объясняется наличием в дифференциальном приближении этой схемы члена со второй производной по пространственной переменной, который играет роль гасителя амплитуд волн вида (52), из которых состоит решение (56), поскольку

$$\mu = \frac{ah}{2}(1 - \tau/h) > 0.$$

Следовательно, схема (42) при $\nu \neq 1$ неявно вводит в уравнение искусственную вязкость, которую часто называют неявной (схемной) искусственной вязкостью в отличие от явной искусственной вязкости, которая преднамеренно вводится в некоторых схемах в разностное уравнение. Искусственная вязкость сглаживает решение уравнения, уменьшая градиенты всех параметров независимо от причины возникновения этих градиентов, физической или вычислительной. Такое свойство разностной схемы, обусловленное наличием в выражении для погрешности аппроксимации производных четного порядка, называют диссипацией на разностной сетке. Воздействие диссипации приводит к растяжению крутых линий раздела, которые могут появляться в расчетной области.

Дифференциальное приближение разностной схемы (42) содержит также член с третьей производной по пространственной переменной, но он более высокого порядка малости по шагам разностной сетки, поэтому его роль практически не видна. Проиллюстрировать вклад члена с нечетной производной по пространственной переменной можно на примере следующей схемы

$$v_t + av'_x = \frac{\tau a}{2} v_{xx}. \quad (57)$$

Ее дифференциальное приближение имеет вид

$$\dot{v} + av' = -\frac{ah^2}{6}(1 - \nu^2)v''' - \frac{ah^3\nu}{8}(1 - \nu^2)v'''' + \dots \quad (58)$$

При расчете задачи (50), (55) по схеме (57) (естественно при выполнении условия устойчивости $\tau/h < 1$) получается разностное решение, имеющее характерные осцилляции на фоне точного решения (56) (правый график рис. 1). Это объясняется тем, что главным членом, вносящим погрешность в численное решение, является первое слагаемое из правой части (58). Этот член является третьей производной по пространственной переменной, т.е. не влияет на величину амплитуды волн, из которых состоит разностное решение, зато частота колебаний по времени у них оказывается разной и происходит явление, аналогичное явлению дифракции. Такое явление, связанное с производными нечетного порядка в дифференциальном приближении, называют дисперсией. Дисперсия приводит к искажению соотношения фаз различных волн.

Обычно, если главный член в выражении для погрешности аппроксимации содержит производную четного порядка, то схема обладает в основном диссипативными свойствами, а если производную нечетного порядка — то дисперсионными.

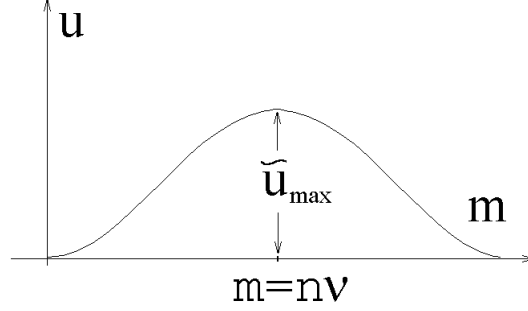


Рис. 2: Ширина зоны "размазывания"

Оценим ширину размазывания разностной схемы (42). Возьмем начальные данные вида

$$v_m^0 = \begin{cases} 1 & \text{при } m = 0, \\ 0 & \text{при } m \neq 0 \end{cases} \quad (59)$$

и посмотрим, как их преобразует схема (42).

Непосредственной проверкой можно убедиться, что интересующее нас решение имеет вид

$$v_m^n = \begin{cases} C_n^{n-m} \nu^m (1-\nu)^{n-m} & \text{при } 0 \leq m < n, \\ 0 & \text{при остальных } m. \end{cases} \quad (60)$$

Функция, стоящая в правой части (биномиальный закон распределения), приближенно может быть представлена в виде

$$v_m^n \approx \tilde{v}_m^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\nu(1-\nu)}} e^{-\frac{(m-n\nu)^2}{2n\nu(1-\nu)}}. \quad (61)$$

График решения на n -м шаге будет иметь вид, приведенный на рис. 2. Максимум правой части (61) достигается при $m = n\nu$, т.е. имеет координату $x = mh = an\tau = at$. Т.к. $x - at = 0$ – характеристика уравнения (50), то мы видим, что максимум решения движется по характеристике. Назовем условно шириной зоны размазывания длину отрезка, на котором решение принимает значения (см. рис. 2)

$$v > e^{-\alpha^2 \tilde{v}_{\max}}.$$

Ширина этой зоны определяется по формуле

$$H = 2\alpha\sqrt{2(1-\nu)ath}. \quad (62)$$

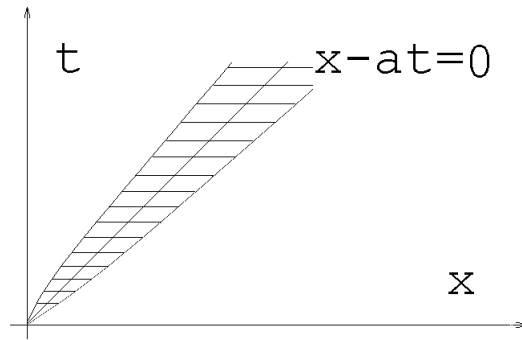


Рис. 3: Зависимость ширины зоны "размазывания" от времени

Следовательно, при $h \rightarrow 0$ область, в которой решение существенно отлично от нуля, стягивается к характеристике $x - at = 0$ (рис. 3). С течением времени t область размазывания расширяется пропорционально \sqrt{t} . Решение разностных уравнений с начальными данными в виде "ступеньки" (55) можно получить суммированием специальных решений такого вида, как мы только что изучили.

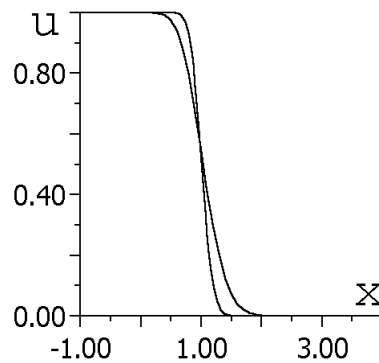


Рис. 4: Зависимость ширины зоны "размазывания" от шагов сетки

На рисунке 4 сравниваются результаты расчета задачи (50), (55) с шагом $h = 0.1$ и $h = 0.025$ при $\nu = 0.1$ в один и тот же момент времени $t = 1$. Как видно из рисунка 4, геометрическая протяженность зоны "размазывания" уменьшилась с уменьшением шага h в 4 раза примерно вдвое.

Заметим также, что при величине числа Куранта $\nu = 1$ формула (62) дает для ширины зоны размазывания значение $H = 0$, что подтверждается численным экспериментом, в котором схема воспроизводит точное решение.

КРИТЕРИЙ МОНОТОННОСТИ ЯВНОЙ СХЕМЫ

ТЕОРЕМА Для того чтобы разностная схема вида

$$\hat{u}_m = \sum_k a_{k-m} u_k$$

переводила все монотонные функции в монотонные с тем же направлением роста, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты a_{k-m} были неотрицательными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Пусть $a_{k-m} \geq 0$ и u_m монотонна. Для определенности допустим, что u_m возрастает, т.е. все $u_m - u_{m-1}$ неотрицательны. Тогда

$$\begin{aligned} \hat{u}_m - \hat{u}_{m-1} &= \sum_k a_{k-m} u_k - \sum_k a_{k-m+1} u_k = \\ &= \sum_k a_{k-m} u_k - \sum_k a_{k-m} u_{k-1} = \sum_k a_{k-m} (u_k - u_{k-1}), \end{aligned}$$

т.е. $\hat{u}_m - \hat{u}_{m-1} \geq 0$. Таким образом, достаточность условия доказана. Докажем необходимость. Пусть, например, $a_{k_0} < 0$. Положим

$$u_m = \begin{cases} 1, & \text{при } m \geq k_0, \\ 0, & \text{при } m < k_0. \end{cases}$$

Тогда $\hat{u}_0 - \hat{u}_{-1} = a_{k_0}$, что невозможно, если предполагать, что схема переводит монотонные последовательности в монотонные с тем же направлением роста. Тем самым необходимость доказана.

Для монотонных схем легко обосновывается устойчивость. В самом деле, если все коэффициенты $a_k \geq 0$ и, кроме того,

$$\sum_k a_k = 1,$$

то

$$\max_m |\hat{u}_m| \leq \sum_k \left(|a_{k-m}| \cdot \max_m |u_m| \right).$$

Так как при наших предположениях $\max_k |a_k| \leq 1$, то имеет место неравенство

$$\sum_m |\hat{u}_m| \leq \sum_m |u_m|,$$

которое и означает устойчивость.

ОДНОМЕРНАЯ АКУСТИКА

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, описывающую распространение плоских звуковых волн

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} &= 0.\end{aligned}\tag{63}$$

Здесь u — скорость среды, по которой распространяется звук, p — давление в этой среде (говоря точнее, малые отклонения скорости и давления от их значений в невозмущенной среде, вызванные распространением звуковых волн). Постоянные ρ_0 , c_0 связаны со свойствами среды: ρ_0 — ее плотность, c_0^2 характеризует сжимаемость среды.

Умножая второе уравнение на $\frac{1}{\rho_0 c_0}$, а затем складывая с первым и вычитая из него, получаем два таких уравнения

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left(u + \frac{p}{\rho_0 c_0} \right) + c_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(u + \frac{p}{\rho_0 c_0} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(u - \frac{p}{\rho_0 c_0} \right) - c_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(u - \frac{p}{\rho_0 c_0} \right) &= 0.\end{aligned}\tag{64}$$

Величины

$$X = u + \frac{p}{\rho_0 c_0}, \quad Z = u - \frac{p}{\rho_0 c_0}$$

называются **римановы инварианты**. Они постоянны вдоль соответствующих характеристик и, следовательно, общее решение системы (63) можно записать в виде

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{2} [f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t)], \\ p &= \frac{\rho_0 c_0}{2} [f(x - c_0 t) - g(x + c_0 t)].\end{aligned}\tag{65}$$

Здесь f и g — произвольные функции, которые должны быть дифференцируемыми для выполнения равенств (63).

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОДНОМЕРНОЙ АКУСТИКИ

Интегрируя первое уравнение системы (63) по произвольной области с границей γ на плоскости переменных x, t и переходя к контурным интегралам, получим интегральное тождество

$$\oint_{\gamma} \rho_0 u \, dx - p \, dt = 0, \quad (66)$$

представляющее собой закон сохранения количества движения.

Аналогично поступая со вторым уравнением, получаем тождество

$$\oint_{\gamma} \frac{p}{c_0^2} \, dx - \rho_0 u \, dt = 0, \quad (67)$$

являющееся отражением закона сохранения массы, т.к. в акустическом случае $p = c_0(\rho - \rho_0)$ в силу уравнения состояния.

Умножив первое уравнение (63) на $\rho_0 u$, а второе на $\frac{p}{\rho_0 c_0^2}$ и сложив результаты, приходим к равенству

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_0 \frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (pu) = 0.$$

Из которого следует интегральное тождество

$$\oint_{\gamma} \left(\rho_0 \frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2} \right) \, dx - pu \, dt = 0, \quad (68)$$

называемое законом сохранения энергии акустических волн.

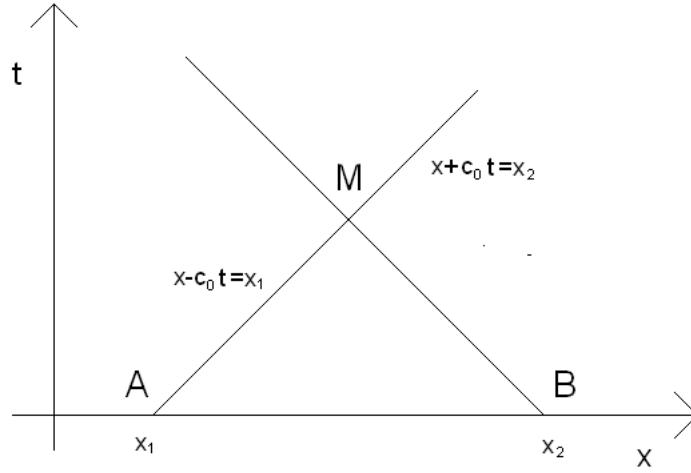


Рис. 5: Построение решения в точке М

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ АКУСТИКИ

Найдем решение системы (63), удовлетворяющее начальным данным

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad p(x, 0) = p_0(x) \quad (69)$$

Тогда

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \frac{1}{2}[f(x) + g(x)], \\ p_0 &= \frac{\rho_0 c_0}{2}[f(x) - g(x)]. \end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned} f(x) &= u_0(x) + \frac{p_0(x)}{\rho_0 c_0}, \\ g(x) &= u_0(x) - \frac{p_0(x)}{\rho_0 c_0}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{u_0(x - c_0 t) + u_0(x + c_0 t)}{2} + \frac{p_0(x - c_0 t) - p_0(x + c_0 t)}{2\rho_0 c_0}, \\ p(x, t) &= \frac{p_0(x - c_0 t) + p_0(x + c_0 t)}{2} - \rho_0 c_0 \frac{u_0(x - c_0 t) - u_0(x + c_0 t)}{2} \end{aligned} \quad (70)$$

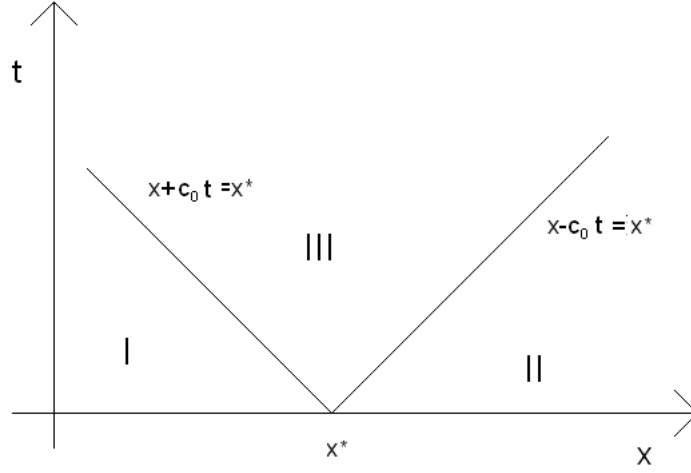


Рис. 6: Распад разрыва

ЗАДАЧА О РАСПАДЕ РАЗРЫВА ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ АКУСТИКИ

Найдем решение системы (63), удовлетворяющее начальным данным

$$\begin{aligned} u_0(x) &= u_I, & p_0(x) &= p_I & \text{при } x < x^*, \\ u_0(x) &= u_{II}, & p_0(x) &= p_{II} & \text{при } x > x^*. \end{aligned} \quad (71)$$

Тогда по формулам (70) находим

$$\begin{aligned} u &= u_I, & p &= p_I & \text{при } x < x^* - c_0 t \ ((x, t) \in I); \\ u &= u_{II}, & p &= p_{II} & \text{при } x > x^* + c_0 t \ ((x, t) \in II); \\ u &= \frac{u_I + u_{II}}{2} - \frac{p_{II} - p_I}{2\rho_0 c_0}, \\ p &= \frac{p_I + p_{II}}{2} - \rho_0 c_0 \frac{u_{II} - u_I}{2}, & \text{при } x^* + c_0 t > x > x^* - c_0 t \ ((x, t) \in III). \end{aligned} \quad (72)$$

Решение в области III находится из условий постоянства инвариантов Римана вдоль характеристик

$$\begin{aligned} u + \frac{p}{2\rho c_0} &= u_I + \frac{p_I}{2\rho_0 c_0} \\ u - \frac{p}{2\rho c_0} &= u_{II} - \frac{p_{II}}{2\rho_0 c_0}. \end{aligned}$$

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ АКУСТИКИ

Пусть на оси x задана равномерная сетка $\omega_h = \{x_j | jh, j \in Z\}$ и на временном слое t^* известно кусочно постоянное решение системы (63), равное $(u_{j-1/2}, p_{j-1/2})$ при $x \in (x_{j-1}, x_j)$. Тогда для всех значений $t < t^* + \tau$, где $\tau < \frac{h}{2c_0}$, формулы (72) позволяют определить точное решение такой задачи. В частности, значения этого решения в узлах сетки ω_h при всех $t \in (t^*, t^* + \tau)$ будут равны

$$\begin{aligned} P_j &= \frac{p_{j-1/2} + p_{j+1/2}}{2} - \rho_0 c_0 \frac{u_{j+1/2} - u_{j-1/2}}{2}, \\ U_j &= \frac{u_{j-1/2} + u_{j+1/2}}{2} - \frac{p_{j+1/2} - p_{j-1/2}}{2\rho_0 c_0}. \end{aligned} \quad (73)$$

В момент времени $t^* + \frac{h}{2c_0}$ характеристики, вышедшие из узлов x_{j-1} и x_j пересекутся в точке $x_{j-1/2} = (x_{j-1} + x_j)/2$, где может образоваться новый разрыв. После чего возникают новые задачи о распаде разрыва уже в точках $x_{j-1/2}$, но до времени $t < t^* + \frac{h}{c_0}$ решение узлах сетки ω_h по прежнему будет задаваться формулами (73).

Идея построения схемы — аппроксимация законов сохранения количества движения (66) и массы (67). Для этого рассмотрим контур интегрирования в виде прямоугольника $ABCD$ (см. рис. 7). В силу постоянства функций, составляющих решение на сторонах AD , AB и CD , из тождества (66) имеем

$$\hat{u}_{j-1/2} \equiv \frac{1}{x_j - x_{j-1}} \int_B^C u(x, t^* + \tau) dx = u_{j-1/2} - \frac{\tau}{h\rho_0} (P_j - P_{j-1}). \quad (74)$$

Аналогично, из тождества (67) получается уравнение

$$\hat{p}_{j-1/2} \equiv \frac{1}{x_j - x_{j-1}} \int_B^C p(x, t^* + \tau) dx = p_{j-1/2} - \frac{\tau\rho_0 c_0^2}{h} (U_j - U_{j-1}). \quad (75)$$

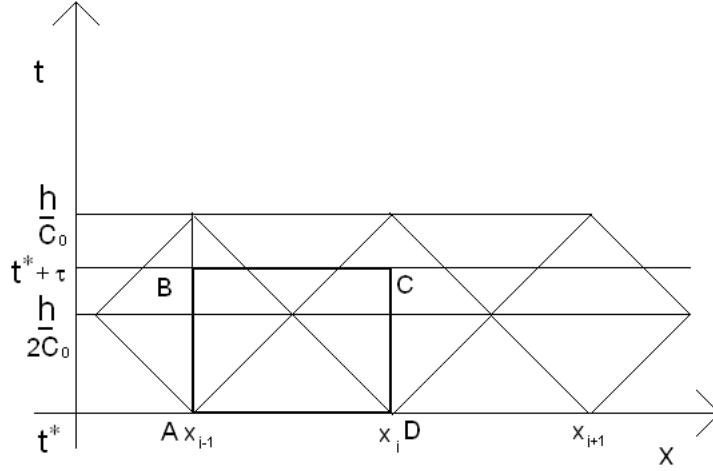


Рис. 7: Геометрия схемы Годунова

Уравнения (74)-(75) схемы Годунова можно переписать в следующем виде

$$\begin{aligned} u_t + \frac{1}{\rho_0} p_x &= \frac{c_0 h}{2} u_{x\bar{x}}, \\ p_t + \rho_0 c_0^2 u_x &= \frac{c_0 h}{2} p_{x\bar{x}}. \end{aligned} \quad (76)$$

Подчеркнем, что функции u и p определены в полуцелых узлах по пространственной переменной.

Построенная разностная схема имеет порядок аппроксимации на гладких решениях $\tau + h$, а ее дифференциальное приближение с точностью до $\tau^2 + h^2$ имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{hc_0}{2} \left(1 - \frac{c_0 \tau}{h}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{hc_0}{2} \left(1 - \frac{c_0 \tau}{h}\right) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (77)$$

Из вида дифференциального приближения можно сделать вывод, что при $\tau > \frac{h}{c_0}$ по схеме считать нельзя, т.к. в этом случае система (77) является обратной задачей Коши для уравнений параболического типа. Необходимость этого условия для устойчивости можно также показать, используя спектральный признак устойчивости.

Введем энергетическую норму

$$\|u, p\| = \sqrt{\frac{\rho_0}{2} \|u\|^2 + \frac{1}{2\rho_0 c_0^2} \|p\|^2}.$$

ТЕОРЕМА Для решения разностной схемы (74)-(75) выполнена оценка

$$\|\hat{u}, \hat{p}\| \leq \|u, p\|,$$

при следующем условии на шаги сетки $\tau \leq \frac{h}{c_0}$.

НЕВЯЗКОЕ ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ БЮРГЕРСА

Законы сохранения, которые лежат в основе дифференциальных уравнений, чаще всего приводят к дивергентной форме записи конвективной части дифференциального оператора. Поэтому рассмотрим уравнение переноса с переменным коэффициентом (его часто называют линейным невязким уравнением Бюргерса) в следующем виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(a(t, x)u)}{\partial x} = 0 \quad (78)$$

в области $Q = [0, T] \times [0, 1]$ с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x). \quad (79)$$

Пусть коэффициент a при всех t удовлетворяет условиям

$$a(t, 0) = a(t, 1) = 0.$$

В этом случае краевые условия на функцию u задавать не нужно. Далее будем предполагать достаточную гладкость коэффициента a .

Запишем уравнение (78) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(a(t, x)u)}{\partial x} + \frac{a(t, x)}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a'(t, x)}{2} u = 0. \quad (80)$$

НЕЯВНАЯ Р.С. С ЦЕНТРАЛЬНЫМИ РАЗНОСТЯМИ

Для задачи (80),(79) рассмотрим р.с.

$$\begin{aligned} v_{t,0} + \frac{1}{2}(\hat{a}\hat{v})_{x,0} + \frac{1}{2}a'_0v_0 - \frac{h}{2} \left((av)_{x\bar{x},1} - \frac{1}{2}(av)_{x\bar{x},2} \right) &= 0, \\ v_t + \frac{1}{2}(\hat{a}\hat{v})_x + \frac{1}{2}\hat{a}\hat{v}_x + \frac{1}{2}a'v &= 0, \quad 0 < m < M, \\ v_{t,M} + \frac{1}{2}(\hat{a}\hat{v})_{\bar{x},M} + \frac{1}{2}a'_Mv_M + \frac{h}{2} \left((av)_{x\bar{x},M-1} - \frac{1}{2}(av)_{x\bar{x},M-2} \right) &= 0, \\ v_m^0 &= u_0(mh), \quad 0 \leq m \leq M. \end{aligned} \tag{81}$$

Поиск решения этой р.с. приводит к необходимости искать на каждом временном слое решение СЛАУ, задаваемой следующими уравнениями

$$\begin{aligned} \hat{v}_0 + \frac{\tau}{2h}\hat{a}_1\hat{v}_1 &= \left(1 - \frac{\tau}{2}a'_0\right)v_0 - \frac{5\tau}{2h}a_1v_1 + \frac{2\tau}{h}a_2v_2 - \frac{\tau}{2h}a_3v_3, \\ -\frac{\tau}{4h}(\hat{a}_{m-1} + \hat{a}_m)\hat{v}_{m-1} + \hat{v}_m + \frac{\tau}{4h}(\hat{a}_{m+1} + \hat{a}_m)\hat{v}_{m+1} &= \left(1 - \frac{\tau}{2}a'_m\right)v_m, \quad 1 \leq m \leq M, \\ \hat{v}_M - \frac{\tau}{2h}\hat{a}_{M-1}\hat{v}_{M-1} &= \left(1 - \frac{\tau}{2}a'_M\right)v_M + \frac{5\tau}{2h}a_{M-1}v_{M-1} - \frac{2\tau}{h}a_{M-2}v_{M-2} + \frac{\tau}{2h}a_{M-3}v_{M-3}. \end{aligned} \tag{82}$$

Матрица A этой СЛАУ является суммой диагональной матрицы A_1 и двухдиагональной кососимметрической матрицы A_2 . У матрицы A_1 в первой и последней строках на диагонали стоят элементы равные $1/2$, а остальные элементы диагонали равны 1 . Поскольку в силу кососимметричности $(A_2v, v) = 0$, то

$$(Av, v) = (A_1v, v) > 0$$

для любой $v \neq 0$, поэтому решение р.с. (81) всегда существует и единственно. Найти его можно, используя метод прогонки.

Точное решение задачи (80),(79) удовлетворяет р.с. в каждой точке сетки с некоторой невязкой

$$\begin{aligned} u_{t,0} + \frac{1}{2}(\hat{a}\hat{u})_{x,0} + \frac{1}{2}a'_0u_0 - \frac{h}{2} \left((au)_{x\bar{x},1} - \frac{1}{2}(au)_{x\bar{x},2} \right) &= \varphi_0, \\ u_t + \frac{1}{2}(\hat{a}\hat{u})_x + \frac{1}{2}\hat{a}\hat{u}_x + \frac{1}{2}a'u &= \varphi_m, \quad 0 < m < M, \\ u_{t,M} + \frac{1}{2}(\hat{a}\hat{u})_{\bar{x},M} + \frac{1}{2}a'_Mu_M + \frac{h}{2} \left((au)_{x\bar{x},M-1} - \frac{1}{2}(au)_{x\bar{x},M-2} \right) &= \varphi_M. \end{aligned}$$

Значения невязки φ в узлах (погрешность аппроксимации) являются величинами порядка $\tau + h^2$ при условии, что $u \in C^{2,3}(Q)$.

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОШИБКИ И ЕЕ ОЦЕНКА В НОРМЕ L_2

Обозначим разность между решением разностной схемы (81) и точным решением задачи (80),(79) в узлах сетки через функцию w . Функция w является решением задачи

$$\begin{aligned} w_{t,0} + \frac{1}{2}(\hat{a}\hat{w})_{x,0} + \frac{1}{2}a'_0w_0 - \frac{h}{2} \left((aw)_{x\bar{x},1} - \frac{1}{2}(aw)_{x\bar{x},2} \right) &= \varphi_0, \\ w_t + \frac{1}{2}(\hat{a}\hat{w})_x + \frac{1}{2}\hat{a}\hat{w}_x + \frac{1}{2}a'w &= \varphi, \quad 0 < m < M, \\ w_{t,M} + \frac{1}{2}(\hat{a}\hat{w})_{\bar{x},M} + \frac{1}{2}a'_Mw_M + \frac{h}{2} \left((aw)_{x\bar{x},M-1} - \frac{1}{2}(aw)_{x\bar{x},M-2} \right) &= \varphi_M, \\ w^0 &= 0. \end{aligned} \tag{83}$$

Определим скалярное произведение двух функций, заданных на сетке $\bar{\omega}_h$

$$[f, g]^* = \frac{h}{2}(f_0g_0 + f_Mg_M) + h \sum_{m=1}^{M-1} f_mg_m.$$

Умножая уравнения (83) скалярно на \hat{w} , получим

$$\begin{aligned} (A\hat{w}, \hat{w}) + \frac{1}{2}[\hat{w}, a'w]^* - \frac{h^2}{4} \left(\left((aw)_{x\bar{x},1} - \frac{1}{2}(aw)_{x\bar{x},2} \right) \hat{w}_0 - \right. \\ \left. - \left((aw)_{\bar{x},M-1} - \frac{1}{2}(aw)_{x\bar{x},M-2} \right) \hat{w}_M \right) &= [\hat{w}, \varphi]^*. \end{aligned}$$

Из этого тождества, учитывая гладкость и равенство нулю на границе области функции a , а также кососимметричность оператора A_2 ($A = A_1 + A_2$), получаем неравенство

$$(\|\hat{w}\|^*)^2 - (\|w\|^*)^2 \leq \tau C((\|w\|^*)^2 + (\|\hat{w}\|^*)^2) + \frac{\tau}{2}(\|\varphi\|^*)^2. \tag{84}$$

Применив к последнему неравенству лемму Гронуолла, получаем оценку

$$\max_{n=1,\dots,N} \|w^n\|^* \leq e^{CT} \sqrt{\tau \sum_{n=1}^N (\|\varphi\|^*)^2}.$$

ОЦЕНКА ДЛЯ ОШИБКИ В НОРМЕ W_2^1

Продифференцируем разностным образом уравнения для ошибки (83) по пространственной переменной

$$\begin{aligned}
 w_{tx,0} + \frac{1}{2h} \left((\hat{a}\hat{w})_{x,1}^0 - (\hat{a}\hat{w})_{x,0} \right) + \frac{1}{2h} \hat{a}_1 \hat{w}_{x,1}^0 + \frac{1}{2} (a'w)_{x,0} + \frac{h}{2} \left((aw)_{x\bar{x},1} - \frac{1}{2} (aw)_{x\bar{x},2} \right) &= \varphi_{x,0}, \\
 w_{tx} + \frac{1}{2} (\hat{a}\hat{w})_{xx}^0 + \frac{1}{2} (\hat{a}\hat{w}_x)_x + \frac{1}{2} (a'w)_x &= \varphi_x, \quad 0 < m < M-1, \\
 w_{tx,M-1} + \frac{1}{2h} \left((\hat{a}\hat{w})_{x,M-1} - (\hat{a}\hat{w})_{x,M-1}^0 \right) - \frac{1}{2h} \hat{a}_{M-1} \hat{w}_{x,M-1}^0 + \frac{1}{2} (a'w)_{x,M-1} + \\
 + \frac{h}{2} \left((aw)_{x\bar{x},M-1} - \frac{1}{2} (aw)_{x\bar{x},M-2} \right) &= \varphi_{x,M-1}.
 \end{aligned} \tag{85}$$

Утверждение. Значения φ_x в узлах являются величинами порядка $\tau + h^2$ при условии, что $\{u, u'\} \in C^{2,3}(Q)$ и $a \in C^{1,4}(Q)$.

Доказательство. Доказательство утверждения замечания основывается на стандартной технике исследования аппроксимации в случае гладких функций. В узлах с номерами $m = 0$ и $m = M - 2$ порядок величин φ_x очевиден. Докажем, что $\varphi_{x,0}$ является величиной порядка $\tau + h^2$. Сначала распишем выражение

$$\begin{aligned}
 \hat{u}_{x,0} - h(u_{x\bar{x},1} - \frac{1}{2}u_{x\bar{x},2}) &= \hat{u}'_0 + \frac{h}{2}\hat{u}''_0 + \frac{h^2}{6}\hat{u}'''_0 + O(h^3) - \\
 -h(u'_1 - \frac{1}{2}u''_2 + O(h^2)) &= \hat{u}'_0 + \frac{h}{2}\hat{u}''_0 + \frac{h^2}{6}\hat{u}'''_0 - h(u''_0 + hu'''_0 - \frac{1}{2}u''_0 - hu'''_0) + O(h^3) = \\
 &= \hat{u}'_0 + \frac{h^2}{6}\hat{u}'''_0 + \frac{h\tau}{2}\hat{u}''(n\tau + \xi\tau, 0) + O(h^3) = \hat{u}'_0 + \frac{h^2}{6}\hat{u}'''_0 + O(h^3 + \tau h).
 \end{aligned}$$

Используя полученный результат, заключаем

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{h} \left(\hat{u}'_x - \hat{u}_{x,0} + h(u_{x\bar{x},1} - \frac{1}{2}u_{x\bar{x},2}) \right) &= \\
 \frac{\hat{u}'_1 - \hat{u}'_0}{h} + \frac{h^2}{6} \frac{\hat{u}'''_1 - \hat{u}'''_0}{h} + O(\tau + h^2) &= \hat{u}''_{1/2} + O(\tau + h^2).
 \end{aligned}$$

В узле с номером $m = M - 1$ доказательство утверждения проводится аналогично.

Для получения оценки ошибки в норме W_2^1 умножим каждое из уравнений (85) на соответствующее $h\hat{w}_x$ и просуммируем по m от 0 до $M - 1$. В результате получим тождество

$$\begin{aligned}
 [\hat{w}_x, w_{tx}] + \frac{\hat{w}_{x,0}}{2} \left((\hat{a}\hat{w})_{x,1}^0 - (\hat{a}\hat{w})_{x,0} + \hat{a}_1 \hat{w}_{x,1}^0 \right) + \\
 + \frac{h\hat{w}_{x,0}}{2} \left((a'w)_{x,0} + h \left((aw)_{x\bar{x},1} - \frac{1}{2} (aw)_{x\bar{x},2} \right) \right) + \\
 + \frac{1}{2} (\hat{w}_x, (\hat{a}\hat{w})_{xx}^0) + \frac{1}{2} (\hat{w}_x, (\hat{a}\hat{w}_x)_x) + \frac{1}{2} (\hat{w}_x, (a'w)_x) + \\
 + \frac{\hat{w}_{x,M-1}}{2} \left((\hat{a}\hat{w})_{x,M-1} - (\hat{a}\hat{w})_{x,M-1}^0 - \hat{a}_{M-1} \hat{w}_{x,M-1}^0 \right) + \\
 + \frac{h\hat{w}_{x,M-1}}{2} \left((a'w)_{x,M-1} + h \left((aw)_{x\bar{x},M-1} - \frac{1}{2} (aw)_{x\bar{x},M-2} \right) \right) &= [\hat{w}_x, \varphi].
 \end{aligned} \tag{86}$$

Лемма. Для любых сеточных функций W , V и a при условии, что $a_0 = a_M = 0$ верны неравенства

$$\begin{aligned}
& \left| (W_x W_{xx}^0, a^{+1}) \right| \leq \|a_x\|_C \|W_x\|^2, \\
& \left| \frac{W_{x,0}}{2h} \left((aW)_{x,1}^0 - (aW)_{x,0} \right) + \frac{W_{x,0}}{2h} a_1 W_{x,1}^0 + \right. \\
& \left. + \frac{W_{x,M-1}}{2h} \left((aW)_{x,M-1}^0 - (aW)_{x,M-1} \right) + \frac{W_{x,M-1}}{2h} a_{M-1} W_{x,M-1}^0 \right| \leq \\
& \leq 2 \|a_x\|_C \|W_x\|^2, \\
& \left| \frac{W_{x,0}}{2} (a'V)_{x,0} + \frac{W_{x,0}}{2} \left((aV)_{x\bar{x},1} - \frac{1}{2} (aV)_{x\bar{x},2} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{W_{x,M-1}}{2} (a'V)_{x,M-1} + \frac{W_{x,M-1}}{2} \left((aV)_{x\bar{x},M-1} - \frac{1}{2} (aV)_{x\bar{x},M-2} \right) \right| \leq \\
& \leq C \|W_x\| (\|a'\|_C + \|a_x\|_C) \|V_x\| + ((\|a'_x\|_C + \|a_{x\bar{x}}\|_C) \|V\|).
\end{aligned} \tag{87}$$

Доказательство. Докажем первое неравенство

$$\begin{aligned}
(W_x W_{xx}^0, a^{+1}) &= \frac{1}{2} (W_{x,1} W_{x,2} a_2 - W_{x,1} W_{x,0} a_2 + W_{x,2} W_{x,3} a_3 - W_{x,2} W_{x,1} a_3 + \dots + \\
&+ W_{x,M-2} W_{x,M-1} a_{M-1} - W_{x,M-2} W_{x,M-3} a_{M-1}) = \\
&= -\frac{h}{2} (W_{x,1} W_{x,0} (a_{x,0} + a_{x,1}) + W_{x,1} W_{x,2} a_{x,2} + \\
&+ W_{x,2} W_{x,3} a_{x,3} + \dots + W_{x,M-3} W_{x,M-2} a_{x,M-2} + W_{x,M-2} W_{x,M-1} a_{x,M-1}) \leq \|a_x\|_C \|W_x\|^2.
\end{aligned}$$

Два оставшихся неравенства доказываются аналогично.

Используя лемму и стандартную технику преобразования и оценки разностных выражений, из тождества (86) получаем

$$\| \hat{w}_x \|^2 - \| w_x \|^2 \leq \tau C \left((\|w\|_2^1)^2 + (\|\hat{w}\|_2^1)^2 \right) + \|\varphi_x\|^2.$$

Суммируя последнее неравенство с неравенством (84) имеем

$$(\|\hat{w}\|_2^1)^2 - (\|w\|_2^1)^2 \leq \tau C \left((\|w\|_2^1)^2 + (\|\hat{w}\|_2^1)^2 \right) + (\|\varphi\|_2^1)^2. \tag{88}$$

Подчеркнем, что величина C зависит лишь от нормы коэффициента a в пространстве $C^{0,2}(Q)$.

Из неравенства (88), используя разностную лемму Гронуолла, получаем

$$\max_{n=1,\dots,N} \|w^n\|_2^1 \leq e^{CT} \sqrt{\tau \sum_{n=1}^N (\|\varphi\|_2^1)^2}. \tag{89}$$

Из неравенства (89), воспользовавшись теоремой вложения (4) $\|w\|_C \leq C(X) \|w\|_2^1$, имеем оценку для ошибки в непрерывной норме.

СХЕМА А.Г.СОКОЛОВА

Неизвестная функция v , заданная в узлах сетки $\omega_h^{1/2}$, ищется по схеме, аппроксимирующей уравнение переноса в дивергентной форме (78)

$$v_t + (\sigma\{\hat{v}, a\}a)_x = 0, \quad 0 \leq m < M, \quad n \geq 0. \quad (90)$$

Известная функция a задается в узлах сетки ω_h , причем $a_0 = a_M = 0$. В формуле (90) были использованы обозначения

$$\sigma\{v, a\} = v \frac{|a| - a}{2|a|} + v^{(-1)} \frac{|a| + a}{2|a|} = \begin{cases} v, & \text{если } a < 0, \\ v^{(-1)}, & \text{если } a \geq 0, \end{cases} \quad (91)$$

Разностное уравнение (90) в индексах имеет вид (считаем, что функция \hat{v} доопределена нулем при $m = -1$ и $m = M$)

$$\begin{aligned} & \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{2h} + \\ & + \frac{(a_{m+1}^n - |a_{m+1}^n|)v_{m+1}^{n+1} + (a_{m+1}^n + |a_{m+1}^n| - a_m^n + |a_m^n|)v_m^{n+1} - (a_m^n + |a_m^n|)v_{m-1}^{n+1}}{2h} = 0, \end{aligned} \quad (92)$$

$$0 \leq m < M, \quad n \geq 0.$$

Приведем еще одну запись уравнения (90), где разностные уравнения выписаны в зависимости от знаков функции a в узлах шаблона

Итак, если $a_{m+1} \geq 0$ и $a_m \geq 0$, имеем

$$v_t + (a^{(+1)}v)_{\bar{x}} = 0.$$

Если $a_{m+1} < 0$ и $a_m < 0$, имеем

$$v_t + (av)_x = 0.$$

Если $a_{m+1} \geq 0$ и $a_m \leq 0$, имеем

$$v_t + a_x v = 0.$$

Если $a_{m+1} < 0$ и $a_m > 0$, имеем

$$v_t + \frac{a_{m+1}v_{m+1} - a_mv_{m-1}}{h} = 0.$$

Матрица сеточного оператора $A\hat{v} = (\sigma\{\hat{v}, a\}a)_x$

$$\frac{1}{2h} \begin{pmatrix} a_1 + |a_1| & a_1 - |a_1| & 0 & \dots & 0 \\ -a_1 - |a_1| & a_2 + |a_2| - a_1 + |a_1| & a_2 - |a_2| & 0 & \dots \\ 0 & -a_2 - |a_2| & a_3 + |a_3| - a_2 + |a_2| & a_3 - |a_3| & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

имеет следующие свойства: на диагонали стоят неотрицательные числа, вне диагонали неположительные числа; сумма элементов по столбцу равна нулю. Матрица является трехдиагональной, причем если для какого-нибудь i $A_{i,i+1} \neq 0$, то $A_{i+1,i} = 0$. Другими словами говоря, если в каком-то столбце с номером i есть три ненулевых элемента, то в i -той строке ненулевым будет только диагональный элемент.

Рассмотрим матрицу $B = (E + \tau A)^*$. У нее по диагонали стоят неотрицательные числа, вне диагонали — неположительные числа. За счет единичной матрицы выполняется условие строго диагонального преобладания. Для таких матриц метод Якоби сходится с любого начального приближения. Пусть СЛАУ $Bx = b$ решается методом Якоби с начальным приближением $x_0 = 0$ и вектором правой части b , состоящим из неотрицательных чисел. Из вычислительной схемы метода Якоби

$$\hat{x}_m = \frac{1}{B_{m,m}} \left(b_m - \sum_{k=1, k \neq m}^M B_{m,k} x_k \right), \quad m = 1, 2, \dots, M$$

следует, что $\hat{x}_m \geq 0$ для всех $m = 1, 2, \dots, M$ на любой итерации. Поэтому предельный вектор тоже будет неотрицательным. Таким образом, для любого неотрицательного вектора b вектор $B^{-1}b$ будет неотрицательным. Отсюда следует, что матрица B^{-1} состоит из неотрицательных чисел. Следовательно матрица $(E + \tau A)^{-1} = (B^{-1})^*$ существует и состоит из неотрицательных чисел.

Следствие. Разностная схема Соколова монотонна.

Теорема. Разностная схема Соколова (90) для уравнения переноса с любой заданной сеточной функцией $a_0 = a_M = 0$ имеет единственное решение, причем если $v^0 \geq 0$, то и $v^n \geq 0$ для всех n . Разностная схема является консервативной, т.е.

$$\sum_{m=0}^{M-1} h v_m^n = \sum_{m=0}^{M-1} h v_m^0.$$

ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ БЮРГЕРСА С ВЯЗКОСТЬЮ

Линейное уравнение Бюргерса с вязкостью является простейшим представителем уравнений, которых учитываются как конвективные, так и диссипативные процессы

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(a(t, x)u)}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (93)$$

Уравнение будем рассматривать в области $Q = [0, T] \times [0, 1]$ с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x) \quad (94)$$

и простейшими граничными условиями

$$u(t, 0) = u_l(t), \quad u(t, 1) = u_r(t). \quad (95)$$

Для решения задачи (93)-(95) рассмотрим разностную схему

$$\begin{aligned} v_t + \frac{1}{2}(\hat{a}\hat{v})_x + \frac{1}{2}\hat{a}\hat{v}_x + \frac{1}{2}a_0 v &= \mu \hat{v}_{x\bar{x}}, \quad 0 < m < M, \\ \hat{v}_0 &= u_l((n+1)\tau), \quad \hat{v}_M = u_r((n+1)\tau), \\ v_m^0 &= u_0(mh), \quad 0 \leq m \leq M. \end{aligned} \quad (96)$$

Для нахождения решения разностной схемы (96) на каждом временном слое требуется решать СЛАУ

$$A\hat{v} = b,$$

где $A = E + \frac{\tau}{4h}A_1 + \frac{\tau\mu}{h^2}A_2$.

Матрица A_1 кососимметричная

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \hat{a}_1 + \hat{a}_2 & 0 & \dots & 0 \\ -\hat{a}_1 - \hat{a}_2 & 0 & \hat{a}_2 + \hat{a}_3 & 0 & \dots \\ 0 & -\hat{a}_2 - \hat{a}_3 & 0 & \hat{a}_3 + \hat{a}_4 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Симметричная трехдиагональная матрица A_2 — матрица второй разностной производной, по диагонали которой стоят 2, а на двух побочных — -1. Поэтому

$$(Av, v) = (v, v) + \frac{\tau}{4h}(A_1v, v) + \frac{\tau\mu}{h^2}(A_2v, v) \geq \|v\|^2.$$

Следовательно, матрица A является невырожденной и разностная схема (96) всегда имеет решение.

Вектор правой части b задается следующим образом

$$\begin{pmatrix} v_1 - \frac{\tau}{2}a_{0,1}v_1 + \frac{\tau}{4h}(\hat{a}_0 + \hat{a}_1)\hat{u}_l \\ \dots \\ v_m - \frac{\tau}{2}a_{0,m}v_m \\ \dots \\ v_{M-1} - \frac{\tau}{2}a_{0,M-1}v_1 + \frac{\tau}{4h}(\hat{a}_{M-1} + \hat{a}_M)\hat{u}_r \end{pmatrix}$$

ОЦЕНКА ОШИБКИ В НОРМЕ L_2

Обозначим разность между решением разностной схемы (96) и точным решением задачи (93)-(95) в узлах сетки через функцию w . Функция w является решением задачи

$$\begin{aligned} w_t + \frac{1}{2}(\hat{a}\hat{w})_x^0 + \frac{1}{2}\hat{a}\hat{w}_x^0 + \frac{1}{2}a_0 w &= \mu w_{x\bar{x}} + \varphi, & 0 < m < M, \\ \hat{w}_0 &= 0, & \hat{w}_M &= 0, \\ w^0 &= 0. \end{aligned} \quad (97)$$

Умножив эти уравнения скалярно на \hat{w} , получаем

$$(\hat{w}, w_t) + \frac{1}{2}(\hat{w}, (\hat{a}\hat{w})_x^0 + \hat{a}\hat{w}_x^0) + \frac{1}{2}(\hat{w}, a_0 w) = \mu(\hat{w}, \hat{w}_{x\bar{x}}) + (\hat{w}, \varphi). \quad (98)$$

Каждое из слагаемых тождества (98) оценим нужным нам образом

$$\begin{aligned} (\hat{w}, w_t) &= \left(\frac{\hat{w} + w}{2}, w_t \right) + \frac{\tau}{2}(w_t, w_t) = \frac{1}{2\tau}\|\hat{w}\|^2 - \frac{1}{2\tau}\|w\|^2 + \frac{\tau}{2}\|w_t\|^2, \\ (\hat{w}, (\hat{a}\hat{w})_x^0 + \hat{a}\hat{w}_x^0) &= 0, \\ (\hat{w}, a_0 w) &\leq \|a'\|_C \|\hat{w}\| \|w\| \leq \frac{\|a'\|_C}{2}(\|\hat{w}\|^2 + \|w\|^2), \\ (\hat{w}, \hat{w}_{x\bar{x}}) &= -\|\hat{w}_x\|^2, \\ (\hat{w}, \varphi) &\leq \frac{1}{2}(\|\varphi\|^2 + \|\hat{w}\|^2). \end{aligned}$$

С помощью этих неравенств из тождества (98) получаем неравенство

$$\|\hat{w}\|^2 + 2\tau\mu\|\hat{w}_x\|^2 - \|w\|^2 \leq \tau C(\|w\|^2 + \|\hat{w}\|^2) + \tau\|\varphi\|^2. \quad (99)$$

Применив к последнему неравенству лемму Гронуолла, получаем оценку

$$\max_{n=1, \dots, N} \sqrt{\|w^n\|^2 + 2\tau\mu\|w_x^n\|^2} \leq e^{CT} \sqrt{\tau \sum_{n=1}^N \|\varphi\|^2}.$$

ОЦЕНКА ОШИБКИ В НОРМЕ W_2^1

Умножив уравнения (98) скалярно на $\hat{w}_{x\bar{x}}$, получаем

$$(\hat{w}_{x\bar{x}}, w_t) + \frac{1}{2}(\hat{w}_{x\bar{x}}, (\hat{a}\hat{w})_x + \hat{a}\hat{w}_x) + \frac{1}{2}(\hat{w}_{x\bar{x}}, a_0 w) = \mu(\hat{w}_{x\bar{x}}, \hat{w}_{x\bar{x}}) + (\hat{w}_{x\bar{x}}, \varphi). \quad (100)$$

Каждое из слагаемых тождества (100) оценим нужным нам образом

$$\begin{aligned} -(\hat{w}_{x\bar{x}}, w_t) &= [\hat{w}_x, w_{xt}] \leq \frac{1}{2\tau} \|\hat{w}_x\|^2 - \frac{1}{2\tau} \|w_x\|^2, \\ |(\hat{w}_{x\bar{x}}, (\hat{a}\hat{w})_x)| &\leq \|\hat{w}_{x\bar{x}}\| (\|a\|_C \|\hat{w}_x\| + \|a'\|_C \|\hat{w}_x\|) \leq \\ &\leq \varepsilon \|\hat{w}_{x\bar{x}}\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} (\|a\|_C \|\hat{w}_x\| + \|a'\|_C \|\hat{w}_x\|)^2, \\ (\hat{w}_{x\bar{x}}, \hat{a}\hat{w}_x) &\leq \varepsilon \|\hat{w}_{x\bar{x}}\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|a\|_C^2 \|\hat{w}_x\|^2, \\ (\hat{w}_{x\bar{x}}, a_0 w) &\leq \|a'\|_C \|\hat{w}_{x\bar{x}}\| \|w\| \leq \varepsilon \|\hat{w}_{x\bar{x}}\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|a'\|_C^2 \|w\|^2, \\ (\hat{w}_{x\bar{x}}, \varphi) &\leq \varepsilon \|\hat{w}_{x\bar{x}}\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|\varphi\|^2. \end{aligned}$$

С помощью этих неравенств из тождества (100) получаем неравенство

$$\|\hat{w}_x\|^2 + \tau\mu \|\hat{w}_{x\bar{x}}\|^2 - \|w_x\|^2 \leq \tau C (\|w\|^2 + \|\hat{w}\|^2 + \|\hat{w}_x\|^2) + \frac{\tau}{\mu} \|\varphi\|^2. \quad (101)$$

Сложив неравенства (98) и (100), получаем

$$\left(\|\hat{w}_x\|_2^1\right)^2 + \tau\mu \|\hat{w}_{x\bar{x}}\|^2 - \left(\|w_x\|_2^1\right)^2 \leq \tau C \left(\left(\|w\|_2^1\right)^2 + \left(\|\hat{w}\|_2^1\right)^2\right) + \tau \left(\frac{1}{\mu} + 1\right) \|\varphi\|^2. \quad (102)$$

Применив к последнему неравенству лемму Гронуолла, получаем оценку

$$\max_{n=1, \dots, N} \sqrt{(\|w^n\|_2^1)^2 + \tau\mu \|w_{x\bar{x}}^n\|^2} \leq e^{CT} \sqrt{\tau \left(\frac{1}{\mu} + 1\right) \sum_{n=1}^N \|\varphi\|^2}.$$

УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Уравнение теплопроводности с переменным коэффициентом является модельным как для процессов, для которых этот коэффициент зависит от термодинамических параметров по известному закону, так и для некоторых "искусственных" случаев записи уравнений с целью построить численный метод решения, обладающий нужными свойствами. Чтобы не выходить за рамки темы лекции про линейные уравнения будем считать, что коэффициент теплопроводности является заданной функцией от координат t и x , обладает необходимой гладкостью и принимает положительные значения, отделенные от нуля величиной δ_μ .

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (103)$$

Уравнение будем рассматривать в области $Q = [0, T] \times [0, 1]$ с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x) \quad (104)$$

и простейшими граничными условиями

$$u(t, 0) = u_l(t), \quad u(t, 1) = u_r(t). \quad (105)$$

Для решения задачи (103)-(105) рассмотрим разностную схему

$$\begin{aligned} v_t &= \tilde{\mu} \hat{v}_{x\bar{x}} + ((\mu^{+1/2} - \tilde{\mu}) v_x)_{\bar{x}}, & 0 < m < M, \\ \hat{v}_0 &= u_l((n+1)\tau), & \hat{v}_M &= u_r((n+1)\tau), \\ v_m^0 &= u_0(mh), & 0 \leq m \leq M, \end{aligned} \quad (106)$$

где $\tilde{\mu}^n = \max_{m=0}^{M-1} \mu(n\tau, (m+1/2)h)$. В уравнении (106) обозначение $\mu^{+1/2}$ означает, что значение коэффициента берется в точке $(n\tau, (m+1/2)h)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Решение разностной схемы (106) существует и единственно. Порядок аппроксимации на гладких решениях задачи (103)-(105) $u \in C^{2,4}(Q)$ равен $\tau + h^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Разностная схема (106) использует значение коэффициента теплопроводности с нижнего временного слоя. В случае нелинейных задач, когда μ зависит от решения, такой способ аппроксимации не всегда является правильным. Бывает так, что значения μ необходимо брать с верхнего временного слоя.

ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ

Выпишем уравнение для ошибки решения схемы (106)

$$\begin{aligned} w_t &= \tilde{\mu} \hat{w}_{x\bar{x}} + ((\mu^{+1/2} - \tilde{\mu}) w_x)_{\bar{x}} + \varphi, & 0 < m < M, \\ \hat{w}_0 &= 0, & \hat{w}_M &= 0, \\ w_m^0 &= 0, & 0 \leq m \leq M, \end{aligned} \quad (107)$$

где φ — невязка, с которой удовлетворяет точное решение задачи (103)-(105) уравнениям разностной схемы (106).

Умножив скалярно это уравнение на \hat{w} , после стандартных преобразований получаем неравенство

$$\|\hat{w}\|^2 - \|w\|^2 + \tau(\tilde{\mu} - \delta_\mu)(\|\hat{w}_x\|^2 - \|w_x\|^2) + 2\tau\delta_\mu\|\hat{w}_x\|^2 \leq \tau\|\hat{w}\|^2 + \tau\|\varphi\|^2. \quad (108)$$

При получении неравенства (108) была использована цепочка неравенств

$$|[\hat{w}_x, (\mu - \tilde{\mu})w_x]| \leq \|\tilde{\mu} - \mu\|_C \|\hat{w}_x\| \|w_x\| \leq \frac{\tilde{\mu} - \delta_\mu}{2} (\|\hat{w}_x\|^2 + \|w_x\|^2).$$

Далее, используя разностную лемму Гронуолла, из неравенства (108) получаем оценку для погрешности в норме L_2 .

$$\max_{n=1, \dots, N} \sqrt{\|w^n\|^2 + \tau(\tilde{\mu} - \delta_\mu)\|w_x^n\|^2} \leq e^T \sqrt{\tau \sum_{n=1}^N \|\varphi\|^2}.$$

Замечание. Слагаемое $2\tau\delta_\mu\|\hat{w}_x\|^2$ может быть использовано для оценки погрешности решений более сложных уравнений, как это было сделано выше для линейного уравнения Бюргерса.

Аналогично, умножая уравнение (107) скалярно на $\hat{w}_{x\bar{x}}$, можно получить оценки в норме W_2^1 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложений к газовой динамике: М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства "Наука", 1968 г., 592 с.
2. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений: 2-е изд., испр. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012 г. — 656 с.
3. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: Т. 1: Пер. с англ. — Мир, 1990. — 384 с.
4. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва "Наука", М., 1976.
5. Попов А.В. Практикум на ЭВМ. Разностные методы решения квазилинейных уравнений первого порядка. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: издательство центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2003, — 128 с.