

СПЕЦКУРС

1/2 года

кафедры вычислительной математики
механико-математического факультета МГУ

**МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ
МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**

лектор - доцент Попов Анатолий Вадимович

2025 г.

ТЕМА 10.

Устойчивость метода прогонки

рабочий конспект

© Механико-математический факультет МГУ, 2025 г.

© А.В.Попов, 2025 г.

СЛАУ С ТРЕХДИАГОНАЛЬНЫМИ МАТРИЦАМИ

Многие алгоритмы, из активно использующихся для решения задач математической физики, приводят к решению (часто многократному) СЛАУ с трехдиагональными матрицами

$$A\mathbf{x} = \mathbf{d},$$

где

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & a_k & b_k & c_k & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix}.$$

Далее будем предполагать невырожденность матрицы A .

Алгоритм прогонки (правой прогонки), предназначенный для решения СЛАУ с такими матрицами, заключается в последовательном нахождении решения по следующим формулам

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -c_1/b_1, & \beta_1 &= d_1/b_1, \\ \alpha_k &= \frac{-c_k}{b_k + a_k\alpha_{k-1}}, & \beta_k &= \frac{d_k - a_k * \beta_{k-1}}{b_k + a_k\alpha_{k-1}} & k = 2, \dots, n-1, \\ \mathbf{x}_n &= \frac{d_n - a_n * \beta_{n-1}}{b_n + a_n\alpha_{n-1}}, \\ x_k &= \alpha_k x_{k+1} + \beta_k & k &= n-1, \dots, 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Аналогично можно выписать формулы левой и встречной прогонок.

- Метод прогонки был предложен И.М.Гельфандом и О.В.Локуциевским.
- Формулы прогонки представляют собой метод Гаусса без выбора главного элемента, но с учетом трехдиагональности матрицы.
- Важнейшим свойством этого алгоритма является то, что для нахождения вектора неизвестных требуется совершить порядка $8n$ арифметических действий. **Таким образом, мы имеем линейный рост количества арифметических операций в зависимости от размерности задачи.**
- При использовании метода прогонки важно понимать границы возможного его применения.

ДИАГОНАЛЬНОЕ ПРЕОБЛАДАНИЕ

Рассмотрим случай, когда $|a_k| \neq 0$ и $|c_k| \neq 0$ при $k = 2, \dots, n-1$. Это означает, что СЛАУ не распадается на совокупность СЛАУ меньшей размерности.

ТЕОРЕМА Диагональное преобладание у матрицы A является досточным условием применимости метода прогонки:

$$\begin{aligned} |b_k| &\geq |a_k| + |c_k|, & k = 2, \dots, n-1, \\ |c_1| &\leq |b_1|, & |a_n| \leq |b_n|, & |c_1| + |a_n| < |b_1| + |b_n|. \end{aligned}$$

Доказательство. Покажем, что при этих условиях

$$|\alpha_k| \leq 1, \quad \text{для } k = 1, \dots, n-1.$$

Предположим, что $|\alpha_k| \leq 1$, и покажем, что $|\alpha_{k+1}| \leq 1$. Т.к. $|\alpha_1| = \frac{|c_1|}{|b_1|} \leq 1$, то отсюда и будет следовать, что $|\alpha_k| \leq 1$ для всех $k = 1, \dots, n-1$.

Рассмотрим разность

$$|b_k + a_k \alpha_{k-1}| - |c_k| \geq |b_k| - |\alpha_{k-1}| |a_k| - |c_k| \geq |a_k| (1 - |\alpha_{k-1}|) \geq 0.$$

Поскольку $|c_k| \neq 0$, то $|b_k + a_k \alpha_{k-1}| > 0$, т.е.

$$|\alpha_k| = \frac{-c_k}{b_k + a_k \alpha_{k-1}} \leq 1.$$

Отсюда видно, что $|\alpha_k| < 1$, если $|\alpha_{k-1}| < 1$; все $|\alpha_k| < 1$ при $|\alpha_1| < 1$.

Оценим снизу знаменатель в формуле для вычисления x_n :

$$|b_n + a_n \alpha_{n-1}| \geq |b_n| - |\alpha_{n-1}| |a_n| \geq |b_n| (1 - \frac{|a_n|}{|b_n|} |\alpha_{n-1}|) > 0,$$

так как либо $|a_n|/|b_n| < 1$, либо $|\alpha_{n-1}| < 1$.

Таким образом, знаменатели в формулах прогонки отличны от нуля и алгоритм реализуем.

ЗАМЕЧАНИЕ Если хотя бы в одной строке k_0 матрицы A есть строгое диагональное преобладание, то $|\alpha_k| < 1$ для всех $k \geq k_0$. Поэтому условие

$$|c_1| + |a_n| < |b_1| + |b_n|$$

является лишним.

УСТОЙЧИВОСТЬ МЕТОДА ПРОГОНКИ

Таким образом, при выполнении условий диагонального преобладания решение СЛАУ с трехдиагональной матрицей определяется посредством формул прогонки. Вычисления по этим формулам ведутся на ЭВМ приближенно, с конечным числом значащих цифр. В результате ошибок округления фактически находится не вектор \mathbf{x} , а вектор $\tilde{\mathbf{x}}$ — решение той же задачи с возмущенными коэффициентами a_k, b_k, c_k и d_k . Возникает естественный вопрос: не происходит ли в ходе вычислений возрастания ошибки округления, что может привести как к потере точности, так и невозможности продолжить вычисления из-за роста получаемых величин.

Примером может служить определение x_k по формуле

$$x_{k+1} = qx_k \quad \text{при } q > 1. \quad (2)$$

Очевидно, что $x_n = q^n x_0$ и для любого x_0 можно указать такое n_0 , при котором x_{n_0} будет машинной бесконечностью, т.е. при определении x_{n_0} произойдет переполнение памяти.

В случае алгоритма (2) в силу ошибок округления, определяются не x_k , а \tilde{x}_k из уравнения

$$\tilde{x}_{k+1} = q\tilde{x}_k + \eta,$$

где η — ошибка округления. Отсюда следует, что для погрешности $r_k = \tilde{x}_k - x_k$ имеем задачу

$$r_{k+1} = qr_k + \eta, \quad r_0 = \eta.$$

Ее решение можно определить формулой

$$r_k = q^k \eta + \frac{q^k - 1}{q - 1} \eta.$$

Откуда видно, что ошибка r_k при $q > 1$ экспоненциально нарастает с ростом k .

В методе прогонки роль коэффициента q играют прогоночные коэффициенты α_k . Поэтому условие, что они ограничены по модулю единицей, гарантирует ненакапливание ошибок округления при вычислении решения СЛАУ по формулам (1).

Если учесть, что в ходе вычислений возмущаются и коэффициенты α_k, β_k , то можно показать, что ошибка в определении решения \mathbf{x} пропорциональна квадрату числа узлов

$$\max_k |r_k| \approx \varepsilon_0 n^2,$$

где ε_0 — ошибка округления. Отсюда видно, что существует связь между точностью ε определения решения задачи, числом n уравнений и числом значащих цифр на ЭВМ, т.к.

$$\varepsilon_0 n^2 \approx \varepsilon.$$

ВОЗМУЩЕННАЯ ЗАДАЧА

Ошибку, вносимую за счет округлений результатов арифметических действий на ЭВМ, можно исследовать путем выписывания возмущенной задачи, для исследования которой в дальнейшем можно применить известные методы оценки погрешности. Следуя работе Н.С.Бахвалова [5], разберем этот способ на примере первой краевой задачи для обыкновенного уравнения второго порядка

$$u'' + p(x)u = f(x) \quad (3)$$

на отрезке $[0, 1]$ при граничных условиях $u(0) = a, u(1) = b$.

Пусть для решения задачи (3) используется простейшая разностная схема

$$\begin{aligned} (L_h v)_m &\equiv v_{x\bar{x},m} + p_m v_m = f_m, & m = 1, \dots, M-1, \\ v_0 &= a, & v_M = b. \end{aligned} \quad (4)$$

Алгебраическая система, соответствующая схеме (4), состоит из уравнений вида

$$v_{m-1} - (2 - p_m h^2) v_m + v_{m+1} = f_m h^2. \quad (5)$$

Метод прогонки приводит к следующим формулам

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= u_0 = a, & C_0 &= 0, \\ C_m &= \frac{1}{2 - p_m h^2 - C_{m-1}}, & \varphi_m &= C_m(\varphi_{m-1} - f_m h^2), & m = 1, \dots, M-1 \\ v_M &= u(1) = b, & v_m &= C_m v_{m+1} + \varphi_m, & m = M-1, \dots, 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Округленное значение z^* числа z — результат арифметического действия — можно записывать в виде $z^* = z(1 + \alpha)$, где $|\alpha| \leq \varepsilon$. Далее греческими буквами с индексами внизу будем обозначать величины, по модулю не превосходящие ε , а с индексами сверху — величины, не превосходящие некоторую постоянную, умноженную на ε . Для краткости будем считать, что

$$v_0 = v_0^*, \quad v_M = v_M^*.$$

Имеем,

$$C_m^* = \frac{1 + \alpha_m}{((2 - p_m h^2 + \xi^m) - C_{m-1}^*)(1 + \beta_m)}. \quad (7)$$

Здесь ξ^m — погрешность округления при вычислении $2 - p_m h^2$,
 β_m — относительная погрешность округления результата вычитания

$$(2 - p_m h^2 + \xi^m) - C_{m-1}^*,$$

α_m — относительная погрешность округления величины, обратной к знаменателю.

Положим $\frac{1 + \beta_m}{1 + \alpha_m} = 1 + \alpha^m$.

Тогда (7) можно представить в виде

$$C_{m+1}^* = \frac{1}{((2 - p_m^* h^2) - C_{m-1}^*)}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} p_m^* &= p_m - \xi^m h^{-2} - \alpha^m (2 - p_m h^2 + \xi^m - C_{m-1}^*) h^{-2} = \\ &= p_m + \beta^m h^{-2} + \alpha^m C_{m-1}^* h^{-2}. \end{aligned}$$

Аналогично, имеем

$$\varphi_m^* = (C_m^*(\varphi_{m-1}^* - (f_m h^2 + \rho^m))(1 + \xi_m))(1 + \gamma_m), \quad (8)$$

$$v_m^* = (C_m^* v_{m+1}^*(1 + \kappa_m) + \varphi_m^*)(1 + \sigma_m). \quad (9)$$

Здесь ρ^m — погрешность вычисления величины $f_m h^2$,
 $\xi_m, \gamma_m, \kappa_m, \sigma_{m+1}$ — погрешности действий, указанных в скобках, после которых стоят множители, содержащие эти величины. Положим,

$$\begin{aligned} (1 + \gamma_m)(1 + \xi_m) - 1 &= \gamma^m, \\ \frac{\sigma_m}{1 + \sigma_m} &= \sigma^m, \quad \frac{\gamma^m}{1 + \gamma^m} = \xi^m, \\ \varphi_m^{**} &= \varphi_m^* + \kappa_m C_m^* v_{m+1}^* + \sigma^m v_m^*. \end{aligned} \quad (10)$$

В этих обозначениях (9) перепишется в виде

$$v_m^* = C_m^* v_{m+1}^* + \varphi_m^{**}.$$

Подставляя в (8) φ_{m-1}^* и φ_m^* , выраженные из (10) через остальные величины, получим

$$\begin{aligned} &\frac{\varphi_m^{**} - \kappa_m C_m^* v_{m+1}^* - \sigma^m v_m^*}{1 + \gamma^m} = \\ &= C_m^*(\varphi_{m-1}^{**} - \kappa_{m-1} C_{m-1}^* v_m^* - \sigma^{m-1} v_{m-1}^* - f_m h^2 - \rho^m). \end{aligned} \quad (11)$$

Подставив предварительно

$$\frac{\varphi_m^{**}}{1 + \gamma^m} = \varphi_m^{**} - \xi^m \varphi_m^{**} = \varphi_m^{**} - \xi^m (v_m^* - C_m^* v_{m+1}^*)$$

в (11), мы можем переписать (11) в виде

$$\varphi_m^{**} = C_m^* (\varphi_{m-1}^{**} - f_m^* h^2),$$

где

$$f_m^* = f_m + h^{-2} \left[\rho^m + \kappa_{m-1} C_{m-1}^* v_m^* + \sigma^{m-1} v_{m-1}^* - \frac{\kappa_m}{1 + \gamma^m} v_{m+1}^* - \frac{\sigma_m}{1 + \gamma^m} v_m^* (C_m^*)^{-1} - \xi^m (v_m^* (C_m^*)^{-1} - v_{m+1}^*) \right]. \quad (12)$$

Таким образом, значения v_m^* , получившиеся в результате решения системы (5) методом прогонки с учетом округлений, являются точными решениями схемы

$$(L_h^* v^*)_m \equiv v_{x\bar{x},m}^* + p_m^* v_m^* = f_m^*, \quad m = 1, \dots, M-1, \quad (13)$$

$$v_0^* = a, \quad v_M^* = b.$$

Пусть схема (4) приводит к СЛАУ с трехдиагональной матрицей

$$A\mathbf{v} = \mathbf{f}.$$

Тогда, учитывая вид найденных функций p^* и f^* , СЛАУ, к решению которой приводит схема (13), будет следующего вида

$$(A + A_\varepsilon)\mathbf{v}^* = \mathbf{f} + h^{-2}\rho.$$

Матрица A_ε — трехдиагональная, все ее элементы ограничены по модулю величиной $Ch^{-2}\varepsilon$. Учитывая это, методом энергетических оценок можно получить оценки для погрешности с учетом ошибок округления. Для схемы (4) дополнительное слагаемое в правой части оценки будет вида $Ch^{-2}\varepsilon$ при условии, что все прогоночные коэффициенты C_j равномерно ограничены сверху константой.

ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Рассмотрим одномерную параболическую задачу области $Q = [0, T] \times [0, X]$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(t, x), & \mu > 0, \\ u(0, x) &= u_0(x), & x \in [0, X], \\ u(t, 0) &= u^l(t), & u(t, 1) = u^r(t), & t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (14)$$

Ее приближенное решение будем искать по р.с.

$$\begin{aligned} v_t &= (\mu \hat{v}_x)_{\bar{x}}, & x_m &\in \omega_h, \\ v_m^0 &= u_0(x_m), & x_m &\in \bar{\omega}_h, \\ v_0^n &= u^l(n\tau), & v_M^n &= u^r(n\tau), & t_n &\in \bar{\omega}_\tau. \end{aligned} \quad (15)$$

При фиксированном n разностное решение на слое $n + 1$ находится из СЛАУ

$$(E + \tau A)\hat{v} = v + \tau b,$$

где $A = A^* > 0$ — трехдиагональная матрица размером $(M - 1) \times (M - 1)$ и b — вектор из R^{M-1} .

Аналогично тому, как это было сделано выше для краевой задачи обыкновенного уравнения второго порядка, можно показать, что при решении этой системы по способу прогонки с точностью арифметических операций равной ε , найденный вектор \hat{v} удовлетворяет уравнению

$$(E + \tau A + \tau A_\varepsilon)\hat{v}^* = (1 + \xi)(v + \tau b),$$

где матрица $A_\varepsilon > 0$ — трехдиагональная, для элементов которой справедлива оценка

$$|a_{ij}^\varepsilon| \leq C \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{h^2} \right) \varepsilon,$$

и значениями функции ξ являются величины порядка ε .

Используя этот факт, можно доказать, что дополнительная погрешность, вносимая округлениями результатов арифметических операций в оценки точности в нормах $L_{2,h}$ и $W_{2,h}^1$, составляет величину порядка

$$\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{h^2} \right) \varepsilon.$$

УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА

Рассмотрим начально-краевую задачу для одномерного уравнения переноса в области $Q = [0, T] \times [0, X]$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial au}{\partial x} &= 0, \\ a(t, 0) &= u(t, 1) = 0, \quad t \in [0, T], \\ u(0, x) &= u_0(x), \quad x \in [0, X]. \end{aligned} \quad (16)$$

Ее приближенное решение будем искать по р.с.

$$\begin{aligned} v_{t,0} + \frac{1}{2}(\hat{a}\hat{v})_{x,0} + \frac{1}{2}a'_0v_0 - \frac{h}{2} \left((av)_{x\bar{x},1} - \frac{1}{2}(av)_{x\bar{x},2} \right) &= 0, \\ v_t + \frac{1}{2}(\hat{a}\hat{v})_x + \frac{1}{2}\hat{a}\hat{v}_x + \frac{1}{2}a'v &= 0, \quad 0 < m < M, \\ v_{t,M} + \frac{1}{2}(\hat{a}\hat{v})_{\bar{x},M} + \frac{1}{2}a'_Mv_M + \frac{h}{2} \left((av)_{x\bar{x},M-1} - \frac{1}{2}(av)_{x\bar{x},M-2} \right) &= 0, \\ v_m^0 &= u_0(mh), \quad 0 \leq m \leq M. \end{aligned} \quad (17)$$

При фиксированном n разностное решение на слое $n+1$ находится из СЛАУ

$$(\tilde{E} + \tau A)\hat{v} = v + \tau b,$$

где \tilde{E} — матрица, отличающаяся от единичной только первым и последним элементами диагонали (они равны по $1/2$), $A = -A^* > 0$ — трехдиагональная матрица размером $(N+1) \times (N+1)$ и b — вектор из R^{N+1} . В случае матрицы A , соответствующей схеме (17), в работе [6] доказывается, что для прогоночных коэффициентов верна оценка

$$|C_m| \leq C \frac{\tau}{h} + 1.$$

Там же доказано, что при решении этой системы по способу прогонки с точностью арифметических операций равной ε , найденный вектор \hat{v} удовлетворяет уравнению

$$(E + \tau A + \tau A_\varepsilon)\hat{v}^* = (1 + \xi)(v + \tau b),$$

где матрица $A_\varepsilon > 0$ — трехдиагональная, для элементов которой справедлива оценка

$$|a_{ij}^\varepsilon| \leq C \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{h} \left(1 + \frac{\tau}{h} \right) \right) \varepsilon,$$

и значениями функции ξ являются величины порядка ε .

Используя этот факт, можно доказать, что дополнительная погрешность, вносимая округлениями результатов арифметических операций в оценки точности в нормах $L_{2,h}$ и $W_{2,h}^1$, составляет соответственно величины порядка

$$\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{h} \left(1 + \frac{\tau}{h} \right) \right) \varepsilon \quad \text{и} \quad \left(\frac{1}{\tau h} + \frac{1}{h^2} \left(1 + \frac{\tau}{h} \right) \right) \varepsilon.$$

СХЕМЫ С РАСЩЕПЛЯЮЩИМИСЯ ОПЕРАТОРАМИ

Рассмотрим р.с., которая на каждом временном слое сводится к решению уравнения

$$B_1 B_2 \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (18)$$

где B_1 и B_2 трехдиагональные матрицы.

От уравнения (18) перейдем к системе

$$\begin{cases} B_1 \mathbf{y} = \mathbf{b}, \\ B_2 \mathbf{x} = \mathbf{y}. \end{cases} \quad (19)$$

Пусть нам известно, что при решении на ЭВМ уравнения вида

$$B_k \mathbf{z}_k = \mathbf{d}_k$$

мы получаем функцию z_k^* , которая является точным решением уравнения

$$(B_k + B_k^*) z_k^* = (1 + \xi_k) \mathbf{d}_k.$$

Таким образом, решая систему (19) при наличии округлений, мы получаем две функции x^* и y^* , являющиеся точным решением системы

$$\begin{cases} (B_1 + B_1^*) \mathbf{y}^* = (1 + \xi_1) \mathbf{b}, \\ (B_2 + B_2^*) \mathbf{x}^* = (1 + \xi_2) \mathbf{y}^*. \end{cases} \quad (20)$$

Сведем (20) к одному уравнению

$$(B_1 B_2 + B^*) \mathbf{x}^* = \mathbf{b} + \mathbf{b}^*, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} B^* &= B_1^* B_2 + B_1 B_2^* + B_1^* B_2^*, \\ \mathbf{b}^* &= \xi_1 \mathbf{b} + (B_1 + B_1^*) \left(\frac{\xi_2}{1 + \xi_2} (B_2 + B_2^*) \mathbf{x}^* \right). \end{aligned}$$

Проводя исследования энергетическим методом задачи (20), можно получить оценки с учетом погрешности округлений арифметических операций.

СХЕМА С РАСЩЕПЛЯЮЩИМСЯ ОПЕРАТОРОМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В случае двух пространственных переменных для уравнения теплопроводности для оператора B^* и вектора b^* справедливы оценки

$$\begin{aligned}\|B^*\mathbf{u}\| &\leq C\varepsilon \left(1 + \frac{\tau}{h_1^2}\right) \left(1 + \frac{\tau}{h_2^2}\right) \|\mathbf{u}\|, \\ \|\mathbf{b}^*\| &\leq C\varepsilon \left(\|\mathbf{b}\| + \left(1 + \frac{\tau}{h_1^2}\right) \left(1 + \frac{\tau}{h_2^2}\right) \|\mathbf{x}^*\|\right).\end{aligned}$$

Используя эти оценки, получаем, что учет округления арифметических операций приводит к дополнительному слагаемому в мажоранте неравенства, оценивающего погрешность разностного решения в нормах $L_{2,h}$ и $W_{2,h}^1$, вида

$$\frac{\varepsilon}{\tau} \left(1 + \frac{\tau}{h_1^2}\right) \left(1 + \frac{\tau}{h_2^2}\right).$$

СХЕМА С РАСЩЕПЛЯЮЩИМСЯ ОПЕРАТОРОМ
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

В случае двух пространственных переменных для уравнения переноса для оператора B^* и вектора b^* справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|B^*\mathbf{u}\| &\leq C \left(\varepsilon \left(1 + \frac{\tau}{h_2} + \frac{\tau^2}{h_2^2} \right) \left(\frac{(\tau h_1 + \tau^2) \left(1 + \frac{\tau}{h_1} \right)}{h_1^2} + 1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \left(1 + \frac{\tau}{h_1} + \frac{\tau^2}{h_1^2} \right) \left(\frac{(\tau h_2 + \tau^2) \left(1 + \frac{\tau}{h_2} \right)}{h_2^2} + 1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^2 \prod_{k=1}^2 \left((\tau h_k + \tau^2) \left(1 + \frac{\tau}{h_k^2} \right) \frac{1}{h_k} + 1 \right) \right) \|\mathbf{u}\|, \\ \|\mathbf{b}^*\| &\leq C \varepsilon \left(\|\mathbf{b}\| + \right. \\ &\quad \left. + \prod_{k=1}^2 \left(1 + \frac{\tau}{h_k} + \frac{\tau^2}{h_k^2} + \varepsilon \left((\tau h_k + \tau^2) \left(1 + \frac{\tau}{h_k} \right) \frac{1}{h_k^2} + 1 \right) \right) \right) \|\mathbf{x}^*\|. \end{aligned}$$

Используя эти оценки, получаем, что учет округления арифметических операций приводит к дополнительному слагаемому в мажоранте неравенства, оценивающего погрешность разностного решения в норме $W_{2,h}^1$, вида

$$\frac{\varepsilon}{\tau} \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) \prod_{k=1}^2 \left(1 + \frac{\tau}{h_k} + \frac{\tau^2}{h_k^2} + \frac{\tau^3}{h_k^3} \right).$$

ХОРОШАЯ ОБУСЛОВЛЕННОСТЬ РАЗНОСТНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим разностную задачу на функцию v_m :

$$a_m v_{m-1} + b_m v_m + c_m v_{m+1} = f_m \quad m = 1, \dots, M-1, \quad (22)$$

с краевыми условиями

$$v_0 = \varphi, \quad v_M = \psi. \quad (23)$$

Будем говорить, что краевая задача (22)-(23) с коэффициентами a_m, b_m, c_m , ограниченными в совокупности ($|a_m|, |b_m|, |c_m| < K$), **хорошо обусловлена**, если при всех достаточно больших M она имеет единственное решение v_m при произвольных правых частях φ, ψ и \mathbf{f} , и если функция v удовлетворяет оценке

$$\|v\|_C \leq C \max\{|\varphi|, |\psi|, \|\mathbf{f}\|_C\}, \quad (24)$$

где C — величина, не зависящая от M .

- Иногда к числу хорошо обусловленных относят и те задачи, для которых C нельзя выбрать постоянным, но можно выбрать растущим не быстрее заданной степени M . Например, $C = M$ или $C = M^2$.

- Приведенное определение хорошей обусловленности равносильно одному из принятых в теории СЛАУ, когда мерой обусловленности системы уравнений $Ax = b$ с матрицей A считают число $\|A\| \cdot \|A^{-1}\|$.

- Выполнение неравенства (24) означает, что чувствительность решения v к ошибкам (например, ошибкам измерения или округления), допущенным при задании правых частей φ, ψ и \mathbf{f} , не возрастает с ростом числа M .

КРИТЕРИЙ ХОРОШЕЙ ОБУСЛОВЛЕННОСТИ

В книге Сергея Константиновича Годунова и Виктора Соломоновича Рябенского "Разностные схемы" доказан критерий хорошей обусловленности задачи (22)-(23) с переменными коэффициентами при условии, что эти коэффициенты изменяются достаточно "плавно".

Сформулируем точные условия на коэффициенты.

- Коэффициенты ограничены в совокупности

$$|a_m| < C, \quad |b_m| < C, \quad |c_m| < C.$$

- Все три коэффициента ни при каком m одновременно не становятся малыми

$$d_n = \max\{|a_m|, |b_m|, |c_m|\} \geq B > 0.$$

- Коэффициенты удовлетворяют условию гладкости

$$|a_m - a_k| \leq D \left| \frac{m - k}{M} \right|^\omega, \quad |b_m - b_k| \leq D \left| \frac{m - k}{M} \right|^\omega,$$

$$|c_m - c_k| \leq D \left| \frac{m - k}{M} \right|^\omega, \quad D > 0, \quad \omega > 0.$$

В этих условиях использованы величины C , B , D и ω , которые не зависят от M и m .

Последнее условие — условие гладкости — выполнено, например, если коэффициенты являются значениями некоторых функций в узлах сетки

$$a_m = a(m/M), \quad b_m = b(m/M), \quad c_m = c(m/M),$$

определенных на отрезке $[0, 1]$ и удовлетворяющих условию Гельдера

$$|a(x) - a(x')| \leq D|x - x'|^\omega,$$

$$|b(x) - b(x')| \leq D|x - x'|^\omega,$$

$$|c(x) - c(x')| \leq D|x - x'|^\omega.$$

ТЕОРЕМА. Для хорошей обусловленности задачи (22)-(23) с коэффициентами, удовлетворяющими сформулированным условиям, необходимо и достаточно, чтобы корни q_1 и q_2 квадратного уравнения

$$a_m + b_m q + c_m q^2 = 0, \quad 0 < m < M,$$

удовлетворяли условию вида

$$|q_1| < 1 - \frac{\theta}{2}, \quad |q_2^{-1}| < 1 - \frac{\theta}{2}, \quad (25)$$

где $\theta > 0$ — некоторое число, не зависящее от M и m .

• Если коэффициенты a_m, b_m, c_m — вещественные, то условие (25) можно заменить легко проверяемым условием

$$\frac{|b_m| - |a_m + c_m|}{|b_m| + |a_m| + |c_m|} \geq \theta > 0,$$

где $\theta > 0$ не зависит от M и m .

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ХОРОШЕЙ ОБУСЛОВЛЕННОСТИ

Достаточными условиями хорошей обусловленности являются

$$|b_m| \geq |a_m| + |c_m| + \delta, \quad \delta > 0$$

, или

$$\frac{|b_m| - |a_m| - |c_m|}{|b_m| + |a_m| + |c_m|} \geq \theta > 0, \quad d_n = \max\{|a_m|, |b_m|, |c_m|\} \geq B > 0.$$

- При условии выполнения либо критерия, либо достаточных условий хорошей обусловленности доказано, что метод прогонки всегда реализуем, а погрешности, допускаемые в процессе вычислений, не накапливаются и не приводят к возрастающим с ростом M ошибкам в вычисляемых значениях решения.

- Слабая чувствительность в вычислительным погрешностям вместе с малым числом арифметических действий для ее реализации делают прогонку очень удобным вычислительным алгоритмом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Лаборатория Базовых Знаний. 2000 г.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
3. Богачев К.Ю. Практикум на ЭВМ. Методы решения линейных систем и нахождения собственных значений. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом ф-те МГУ, 1999.
4. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва "Наука", М., 1977.
5. Бахвалов Н.С. О накоплении вычислительной погрешности при численном решении дифференциальных уравнений. — Сб. работ ВЦ МГУ, N 1, 1962, с. 47-68.
6. Popov A.V. Convergence analysis of a finite difference scheme for viscous gas problems. Technical Report N 20, 1997, Department of Mathematical Modelling. Technical University of Denmark.
7. Попов А.В. Численные методы решения задач динамики вязкого теплопроводного газа в переменных Эйлера. Дисс. на соиск. уч. ст. к.ф.м.н., МГУ, мех-мат, 1990.
8. Огнева В.В. Метод прогонки для решения разностных уравнений. Журн.вычисл.матем. и матем.физ., т. 7, N 4, 1967, с. 803-812.