

**СПЕЦКУРС**

1/2 года

кафедры вычислительной математики  
механико-математического факультета МГУ

**МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ  
НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ  
МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**

лектор - доцент Попов Анатолий Вадимович

**2025 г.**

ТЕМА 1.

**Модели в МСС**

рабочий конспект

© Механико-математический факультет МГУ, 2025 г.

© А.В.Попов, 2025 г.

## ОСНОВНЫЕ ГИПОТЕЗЫ МСС

1. Вещество состоит из отдельных тел (частиц). Объемы, занимаемые телами (частицами), много меньше объемов, в которых сосредоточено само вещество.

2. Взаимодействие частиц происходит посредством столкновения, электромагнитного взаимодействия, ядерных сил и т.д. Учет тех или иных взаимодействий зависит от детализации конкретной модели.

3. В любом существенном объеме находится много частиц. Поэтому вещество рассматривается как **СПЛОШНАЯ СРЕДА**, целиком заполняющая некоторую часть пространства. Такая идеализация дает возможность использовать при исследовании аппарат функций непрерывного аргумента, дифференциальное и интегральное исчисления.

4. Под пространством понимают совокупность точек, задаваемых с помощью чисел, называемых координатами. В МСС рассматриваются непрерывные метрические многообразия — пространства, в которых определены расстояния между точками. Далее будем считать, что система координат будет во всех случаях декартовой, т.е. расстояние между двумя точками  $A$  и  $B$  определяется по формуле

$$dist(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}.$$

5. В МСС используется **АБСОЛЮТНОЕ** время, т.е. время, не учитывающее эффекты теории относительности.

## ЛАГРАНЖЕВЫ И ЭЙЛЕРОВЫ ПЕРЕМЕННЫЕ

Геометрические координаты пространства  $x_1, x_2, x_3$  и время  $t$  носят название переменных Эйлера.

Для любой точки континуума, выделяемой координатами  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$ , можно записать закон движения

$$x_k = x_k(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t), \text{ где } k = 1, 2, 3.$$

Координаты  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$ , индивидуализирующие точки континуума (или определенные функции от них), и время  $t$  называются переменными Лагранжа. Точка зрения Лагранжа на изучение движения сплошной среды лежит в основе физических законов, т.к. они связаны с движением индивидуальных материальных частиц.

Скорость вычисляется для индивидуальной точки сплошной среды, т.е. при фиксированных  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$ . Поэтому берется частная производная вектор функции  $\mathbf{x}$  по  $t$

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}.$$

Кроме скорости требуется рассматривать ускорение  $\mathbf{a}$  точки сплошной среды. Если известно поле скоростей  $\mathbf{v}$  в эйлеровых переменных и закон движения, то вектор ускорения, задается формулой

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) &= \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_3} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \bar{\nabla})\mathbf{v}, \end{aligned}$$

где

$$\bar{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^T.$$

Аналогично, считается изменение любого параметра в единицу времени в частице сплошной среды в переменных Эйлера. Например, изменение температуры  $T$  равно

$$\frac{dT(\mathbf{x}(t), t)}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial T}{\partial x_3} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v}, \bar{\nabla})T.$$

### ТЕОРЕМА ГАУССА-ОСТРОГРАДСКОГО

Пусть вектор функция  $\mathbf{A}$  непрерывна в ограниченной области  $V$  вплоть до ее границы  $\Sigma$  и дифференцируема внутри этой области. Тогда верно равенство

$$\int_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV,$$

где  $\mathbf{n}$  — вектор внешней нормали, а

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}.$$

### ФОРМУЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПО ВРЕМЕНИ ИНТЕГРАЛА, ВЗЯТОГО ПО ПОДВИЖНОМУ ОБЪЕМУ

Пусть точки области  $V$  движутся со скоростями  $\mathbf{v}$ , тогда

$$\frac{d}{dt} \int_V f(x, y, z, t) dV = \int_V \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f\mathbf{v}) \right] dV.$$

## УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ

Материальными телами называются тела, обладающие свойствами инерции. Свойство инерции характеризуется массой. Фундаментальным законом ньютоновской механики является закон сохранения массы  $m$  любого индивидуального объема, т.е. объема, состоящего из одних и тех же частиц среды

$$\frac{dm}{dt} = 0.$$

В МСС почти всегда вместо массы рассматривают функцию плотности

$$\rho(\mathbf{x}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V},$$

где любой из объемов, содержит точку  $\mathbf{x}$ .

Тогда для конечного объема верно равенство

$$m = \int_V \rho dV,$$

где интеграл взят по подвижному индивидуальному объему.

Используя функцию плотности, закон сохранения массы запишем в виде

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0.$$

Применив правило дифференцирования интеграла, взятого по подвижному объему, получаем

$$\frac{dm}{dt} = \int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0.$$

Поскольку это равенство справедливо для любого индивидуального объема, получим первое основное дифференциальное уравнение МСС

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

называемое уравнением неразрывности в переменных Эйлера.

## УРАВНЕНИЕ СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

Второй закон Ньютона, для объема  $V$  в МСС выглядит следующим образом

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \rho \mathbf{F} dV + \int_{\Sigma} \mathbf{p}_n d\sigma,$$

где  $\mathbf{p}_n$  — сила внутренних напряжений, а  $\mathbf{F}$  — объемная (массовая) сила. Выделяемый объем  $V$  является произвольным субстациональным (существенным) подвижным деформируемым объемом, состоящим по определению из одних и тех же частиц среды.

Напряжение  $p_n$  на любой площадке  $d\sigma$  выражается через напряжения  $\mathbf{p}^1$ ,  $\mathbf{p}^2$  и  $\mathbf{p}^3$  на взятых в той же точке фиксированных площадках, параллельных координатным плоскостям

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}^1 \cos(n, x_1) + \mathbf{p}^2 \cos(n, x_2) + \mathbf{p}^3 \cos(n, x_3).$$

При допущении непрерывности и дифференцируемости векторов  $\mathbf{p}^i$  по теореме Гаусса-Остроградского получаем

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \rho \mathbf{F} dV + \int_V \left[ \frac{\partial \mathbf{p}^1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{p}^2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{p}^3}{\partial x_3} \right] dV.$$

В силу произвольности объема из интегрального закона получаем **второе основное уравнение МСС**

$$\frac{d(\rho \mathbf{v})}{dt} = \rho \mathbf{F} + \frac{\partial \mathbf{p}^1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{p}^2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{p}^3}{\partial x_3}.$$

Для жидкостей и газов общепринятым является **закон состояния Стокса**, согласно которому компоненты тензора напряжений выражаются через давление и скорость по формулам

$$P_{kk} = (-p + 2\mu \frac{\partial v_k}{\partial x_k}) + \left( \lambda - \frac{2}{3}\mu \right) \operatorname{div} \mathbf{v},$$

$$P_{kl} = \mu \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right), \quad k \neq l.$$

Величины  $\mu$  и  $\lambda$  называются коэффициентами динамической и объемной вязкости соответственно. Во многих моделях они считаются известными неотрицательными константами, либо заданными функциями термодинамических параметров.

## УРАВНЕНИЕ СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

**Первое начало термодинамики**, или закон сохранения энергии, можно сформулировать как невозможность осуществления вечного двигателя первого рода, т.е. циклически работающей машины, которая могла бы служить источником полезной энергии без использования какого-либо внешнего по отношению к этой машине источника энергии.

**Закон сохранения энергии** при допущении об аддитивности внутренней энергии по массам частиц конечного объема тела можно записать в следующей форме

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left( \frac{\mathbf{v}^2}{2} + U \right) dV = \int_V \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\Sigma} \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{v} d\sigma - \int_{\Sigma} \mathbf{q}_n d\sigma,$$

где  $U$  — внутренняя энергия,  $\mathbf{q}_n$  — приток энергии через поверхность  $\Sigma$ .

Из интегрального закона при дополнительных условиях гладкости получается дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt} \left[ \rho \left( \frac{\mathbf{v}^2}{2} + U \right) \right] = \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \operatorname{div} (\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{v}) - \operatorname{div} \mathbf{q}_n.$$

**Закон теплопроводности Фурье** — наиболее распространенный, хорошо оправдывающийся на практике закон, задающий приток тепла

$$\mathbf{q} = -\kappa \operatorname{grad} \Theta,$$

где  $\Theta$  — температура среды по шкале Кельвина, а  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности. Во многих важных примерах коэффициент  $\kappa$  постоянен или является функцией температуры  $\Theta$ .

## ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ

Система уравнений, состоящая из уравнений неразрывности, сохранения импульса и энергии не является замкнутой. Для ее замыкания необходимо привлекать дополнительные предположения.

В большинстве моделей используются соотношения между термодинамическими функциями, которые следуют из законов термодинамики. В наиболее распространенном случае состояние среды описывают с помощью следующих пяти термодинамических функций: плотности  $\rho$ , температуры  $\Theta$ , давления  $p$ , внутренней энергии  $U$  и энтропии  $s$ .

**Энтропия** — это функция состояния термодинамической системы, определяющая меру необратимого рассеивания (диссипации) энергии.

### Основное термодинамическое тождество

$$\Theta ds = dU + p d(1/\rho).$$

**Второе начало термодинамики** утверждает, что для любого индивидуального (состоящего из одних и тех же материальных частиц) теплоизолированного объема его суммарная энтропия не убывает.



## УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ

В двухпараметрических средах считается, что независимыми могут быть лишь два из термодинамических параметров. Поэтому, учитывая, что основное термодинамическое тождество является универсальной связью, в общем случае к нему требуется добавить два дополнительных соотношения, называемых **уравнениями состояния**.

**Пример 1.** Пусть независимыми функциями являются энтропия  $s$  и плотность  $\rho$ . Тогда

$$U = U(s, \rho).$$

В этом случае из основного термодинамического тождества вытекают еще два уравнения

$$\Theta = \frac{\partial U}{\partial s}, \quad p = \rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho}.$$

**Пример 2.** Пусть независимыми функциями являются плотность  $\rho$  и температура  $\Theta$ . Тогда

$$p = p(\rho, \Theta) \quad \text{и} \quad U = U(\rho, \Theta).$$

В этом случае эти две функции должны быть согласованы с основным термодинамическим тождеством, т.е.

$$p = \rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho} + \Theta \frac{\partial p}{\partial \Theta}.$$

## МОДЕЛЬ ВЯЗКОГО БАРОТРОПНОГО ГАЗА

Система уравнений, описывающая нестационарное движение баротропного газа, выглядит следующим образом

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) &= 0, \\ \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p &= L\mathbf{u} + \rho \mathbf{f}, \\ p &= p(\rho),\end{aligned}$$

где  $L$  есть линейный симметричный положительно определенный оператор

$$L\mathbf{u} \equiv \operatorname{div}(\mu \nabla \mathbf{u}) + \frac{1}{3} \nabla(\mu \operatorname{div} \mathbf{u}).$$

Здесь  $(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u})$  – тензор второго ранга, полученный в результате прямого произведения векторов  $\rho \mathbf{u}$  и  $\mathbf{u}$ . При вычислении дивергенции от тензора второго ранга свертка осуществляется по его первому индексу.

Через  $\mu$  обозначен коэффициент вязкости газа, который задается неотрицательной константой или известной функцией от термодинамических параметров. Уравнение состояния газа  $p = p(\rho)$  и вектор внешних сил  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  являются заданными. Уравнение состояния:  $p = \rho^\gamma$ . Константа  $\gamma$  обычно считается равной 1.4.

Такая форма записи уравнений баротропного газа называется дивергентной.

Покоординатная запись этой системы с постоянным коэффициентом вязкости имеет следующий вид

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \rho u_3}{\partial x_3} = 0, \\
& \frac{\partial \rho u_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_1^2}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho u_2 u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \rho u_3 u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial p}{\partial x_1} = \\
& = \mu \left( \frac{4}{3} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + \frac{1}{3} \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right) \right) + \rho f_1, \\
& \frac{\partial \rho u_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_1 u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho u_2^2}{\partial x_2} + \frac{\partial \rho u_3 u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial p}{\partial x_2} = \\
& = \mu \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + \frac{1}{3} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} \right) \right) + \rho f_2, \\
& \frac{\partial \rho u_3}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_1 u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho u_2 u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial \rho u_3^2}{\partial x_3} + \frac{\partial p}{\partial x_3} = \\
& = \mu \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + \frac{1}{3} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3 \partial x_2} \right) \right) + \rho f_3.
\end{aligned}$$

Приведем недивергентный вид записи системы

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) &= 0, \\ \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} \right] + \nabla p &= L \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}, \\ p &= p(\rho).\end{aligned}$$

Эта форма записи получается из дивергентной формы вычитанием уравнения неразрывности, умноженного на  $u_k$ , из соответствующего уравнения сохранения импульса.

## МОДЕЛЬ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА

В общем случае, когда давление в газе зависит не только от его плотности, но и от температуры, требуется добавлять в систему уравнение баланса энергии. Приведем его в случае политропного газа, т.е. когда внутренняя энергия зависит лишь от температуры  $U = c_v \Theta$  ( $c_v = \text{const} > 0$ )

$$c_v \rho \left[ \frac{\partial \Theta}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla) \Theta \right] = \kappa \Delta \Theta - p \operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{2}{3} \mu (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 + 2\mu D : D,$$

где  $\kappa = \text{const} > 0$  (коэффициент теплопроводности), а  $D$  — линейный тензор деформаций Коши-Грина

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

В случае теплопроводного газа вторым уравнением состояния часто полагают **уравнение Клайперона**

$$p = R\rho\Theta, \quad R = \text{const} > 0.$$

Уравнение состояния Клайперона не соответствует действительности для

- сильно сжатых газов (когда плотность очень велика),
- состояний, близких к точкам конденсации газов в жидкость,
- жидкостей,
- при очень малых температурах, близких к абсолютному нулю.

Для описания процессов вблизи точек конденсации газа и для некоторых диапазонов жидкой фазы используют **уравнение состояния Ван-дер-Ваальса**

$$p = \frac{R\rho\Theta}{1 - b\rho} - a\rho^2,$$

где  $R$ ,  $b$  и  $a$  — положительные постоянные.

Введение знаменателя

$$1 - b\rho = 1 - \frac{\rho}{\rho^*}$$

приводит к резкому возрастанию давления при приближении плотности  $\rho$  к значению  $\rho^*$ , которое выбирается большим.

Добавочный член  $a\rho^2$  существенен также только при больших плотностях. С помощью этого члена учитывается появление сил отталкивания между молекулами.

## ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ВЯЗКОГО ГАЗА

Пусть движение среды происходит в ограниченной области  $\Omega$ , граница которой  $\partial\Omega$  является непроницаемой твердой стенкой. Тогда на границе области задается условие "прилипания"

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0.$$

Другая возможность — на границе  $\partial\Omega$  задается вектор напряжения  $\mathbf{P}_n$

$$\mathbf{P}_n|_{\partial\Omega} \equiv -(p + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{n} + 2\mu (D, \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = \mathbf{H}.$$

Такие граничные напряжения возникают, например, в задачах со **свободными границами**. При этом для определения самой границы  $\partial\Omega$  служит так называемое **кинематическое условие**

$$\partial\Omega = \{(x, t) \mid \xi(x, t) = 0\},$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla) \xi = 0.$$

Это условие означает, что материальная частица, находящаяся на свободной границе, может перемещаться только вдоль нее.

При задании условий на скорость типа "прилипания" или "свободной границы" граничных условий для функции плотности не требуется. На участках границы, где газ втекает в область, т.е. там где выполняется условие

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n}) < 0,$$

необходимо задавать скорость и плотность втекающего потока

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\gamma, \quad \rho = \rho_\gamma.$$

В точках, где газ вытекает из области, т.е. где выполняется условие

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n}) > 0,$$

задается лишь граничное условие на скорость, а для плотности граничного условия нет.

Для теплопроводного газа следует задать граничные условия, характеризующие **тепловой режим течения**. Наиболее общий вид граничных данных для температуры следующий

$$\kappa \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{n}} = k (\Theta - \chi)|_{\partial \Omega}.$$

Здесь  $k$  и  $\chi$  — заданные функции,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к границе  $\partial \Omega$ ,  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$  — производная по нормали. Равенство означает, что тепловой поток через границу  $\frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{n}}$  пропорционален разности температур газа  $\Theta$  и стенки  $\chi$ .

Возможны два других варианта

$$\Theta|_{\partial \Omega} = \chi$$

и

$$\kappa \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{n}} = q,$$

когда задаются граничные условия в виде известных температуры  $\Theta$  или теплового потока  $\kappa \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{n}}$ .

## ОБОСНОВАНИЕ ЗАДАЧ ДЛЯ ВЯЗКОГО ГАЗА

Система уравнений, описывающая движение вязкого газа является сложной для исследования по двум причинам.

1. Система является составной: уравнение неразрывности является уравнением первого порядка, а остальные при положительных коэффициентах вязкости  $\mu$  и теплопроводности  $\kappa$  — параболическими.
2. Нелинейность системы.

Первая теорема существования была получена в 1962 году Дж.Нэшэм для задачи Коши в малом по времени. Для краевых задач теоремы существования были получены В.А.Солонниковым в 70-х годах.

Японскими математиками А.Мацумура и Т.Нишида доказаны теоремы существования "в целом" по времени при условии, что давление  $p$  является постоянным для задачи Коши и смешанных краевых задач. Ими же доказаны теоремы существования "в целом" по времени для общей системы, но при условии, что начальные данные близки к состоянию покоя. Пример теоремы существования при условии определенных ограничений на уравнения состояния газа можно найти в работе чешского математика Э.Файрайзла.

Глобальные теоремы существования без каких либо дополнительных предположений на функцию давления до сих пор доказаны лишь в одномерном случае Я.И.Каннелем для баротропного газа и А.В.Кажиховым для теплопроводного газа.

В силу важности практических приложений масса работ посвящена изучению частных проблем, связанных с системой Навье-Стокса. Например, о приближенном отыскании зоны ударной волны, о скачках решений, существование периодических решений, осесимметричных решений и т.д.



## ТЕОРЕМА А.В.КАЖИХОВА

В одномерном случае успех в деле доказательства теорем существования был определен видом записи системы в лагранжевых массовых переменных. Для их введения рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial y}{\partial s} = u(y, s), \quad y|_{s=t} = x, \quad x \in \Omega, \quad t \in [0, T].$$

Положим  $\xi = y(s, x, t)|_{s=0}$  и возьмем за новые переменные  $\xi$  и  $t$ . После чего сделаем еще одну замену

$$q(\xi) = \int_0^\xi \rho_o(\eta) d\eta.$$

Переменная  $q$  называется лагранжевой массовой переменной. В переменных  $(t, q)$  система Навье-Стокса принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho^2 \frac{\partial u}{\partial q} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial q} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial q} \right) - \frac{\partial p}{\partial q}, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial}{\partial q} \left( \rho \frac{\partial \Theta}{\partial q} \right) + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial q} \right)^2 - p \frac{\partial u}{\partial q}, \\ p &= k\rho\Theta. \end{aligned}$$

Эта система выписана в безразмерных переменных, что позволило сократить число констант до двух

$$k = R/c_V, \quad \lambda = \kappa/(\nu c_V).$$

Краевые условия в исходных эйлеровых переменных выражаются соотношениями

$$u|_{x=0} = u|_{x=L} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial \Theta}{\partial x}|_{x=L} = 0,$$

где  $\Omega = [0, L]$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ** Обобщенным решением называется совокупность функций  $(\rho, u, \Theta)$ ,

$$\rho(t) \in L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega)), \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} \in L_2(Q),$$

$$(u(t), \Theta(t)) \in L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega)) \cap L_2(0, T; W_2^2(\Omega)),$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial \Theta}{\partial t} \right) \in L_2(Q), \quad \Omega = (0, 1), \quad Q = \Omega \times (0, T),$$

удовлетворяющих уравнениям системы почти всюду в  $Q$  и принимающих заданные граничные и начальные значения в смысле следов функций из указанных классов.

**ТЕОРЕМА** Пусть начальные данные обладают следующими свойствами гладкости

$$(\rho_0, u_0, \Theta_0) \in W_2^1(\Omega), \quad u_0(0) = u_0(1) = 0.$$

Тогда существует единственное обобщенное решение задачи, причем  $\rho(x, t)$  и  $\Theta(x, t)$  — строго положительные и ограниченные функции.

Если дополнительно

$$\rho_0 \in C^{1+\alpha}(\Omega), \quad (u_0, \Theta_0) \in C^{2+\alpha}(\Omega), \quad 0 < \alpha < 1,$$

и начальные данные согласованы с граничными, то решение является классическим

$$\rho(x, t) \in C^{1+\alpha}(Q), \quad (u(x, t), \Theta(x, t)) \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(Q).$$

**Определение.** Говорят, что функция удовлетворяет условию Липшица с показателем  $\alpha$  ( $\alpha \in (0, 1]$ ) на отрезке  $[a, b]$ , если для любых двух точек  $x_1$  и  $x_2$  из этого отрезка верно неравенство

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|^\alpha,$$

где  $M$  — некоторая постоянная.

Класс функций, удовлетворяющих условию Липшица, обозначают  $C^\alpha$ . Если функция имеет  $k$  производных и ее  $k$ -ая производная удовлетворяет условию Липшица, то пишут, что  $f \in C^{k+\alpha}$ .

## МОДЕЛЬ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Уравнением состояния данной модели служит **условие несжимаемости**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla) \rho = 0.$$

Это предположение с высокой степенью точности оправдано для жидкостей. Тогда из уравнения неразрывности вытекает, что

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$$

и система Навье-Стокса при  $\mu = \text{const} > 0$  записывается в виде двух уже выписанных уравнений и уравнения

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} \right] + \nabla p = \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}.$$

При этом уравнение энергии отделено от системы и решается после нахождения скорости и плотности.

Если  $\rho \equiv \text{const} > 0$ , то **жидкость называется однородной**. Не нарушая общность, можно принять  $\rho \equiv 1$ , тогда система сводится к уравнениям для скорости и давления

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}.$$

## ОБОСНОВАНИЕ ЗАДАЧ ДЛЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Самые значительные результаты в обосновании разрешимости начально-краевых задач динамики вязкой несжимаемой жидкости получены О.А.Ладыженской и ее учениками в случае однородной среды.

В этой модели в качестве краевых условий задается вектор скорости  $\mathbf{u}$  на всей границе области  $\Omega$  на протяжении всего временного интервала

$$\mathbf{u}|_{[0,T] \times \partial\Omega} = \mathbf{u}_\gamma.$$

Область  $\Omega$  не меняется со временем, но есть обобщения на случай области, зависящей от временной переменной.

Относительно разрешимости доказаны следующие результаты.

1. Начально-краевая задача разрешима "в целом", если она двумерная.
2. Аналогичные результаты доказаны для задачи, если все ее данные обладают аксиальной симметрией относительно какой-либо оси и область  $\Omega$ , заполненная жидкостью, не содержит этой оси.
3. Однозначная разрешимость "в целом" имеет место и для задачи Коши, если компоненты известных векторов  $\mathbf{f}$  (правая часть нестационарного уравнения) и  $\mathbf{u}_0$  (начального условия для вектора скорости) не зависят от полярного угла  $\phi$  и компоненты  $f^\phi$  и  $u^\phi$  равны нулю.
4. Для общего трехмерного случая задача однозначно разрешима вблизи гладких начальных данных, т.е., вообще говоря для малых интервалов  $[0, T]$  изменения времени  $t$ . Величина  $T$  оценена снизу постоянной, определяемой нормами данных задачи. Если последние меньше некоторого определенного числа, то  $T = \infty$ , т.е. задача однозначно разрешима при любом  $t > 0$ .

## МОДЕЛЬ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Идеальная несжимаемая жидкость — это классическая модель гидродинамики. Она описывается следующей системой уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla) \rho &= 0, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) &= 0, \\ \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} \right] + \nabla p &= \rho \mathbf{f}.\end{aligned}$$

Эти уравнения — частный случай модели вязкой несжимаемой жидкости, когда вязкость  $\mu$  равна нулю.

**Простейшей краевой задачей** для этой модели является случай движения жидкости в ограниченной области с твердыми непроницаемыми стенками. Если граница неподвижна, то в качестве граничного условия нужно поставить условие непротекания

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = 0.$$

Гораздо более сложной для исследования является **задача протекания**. В этом случае для доказательства однозначной разрешимости в малом по времени нужно задавать весь вектор скорости и плотность входного потока, а на выходе и твердой стенке — нормальную составляющую скорости.

## МОДЕЛЬ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Формально система уравнений газовой динамики получается из системы, описывающей движение вязкого теплопроводного газа, выбором коэффициентов вязкости и теплопроводности равными нулю. Тем самым все уравнения системы имеют первый порядок. Приведем часто используемый вид записи этой системы. Для этого введем вспомогательные векторы столбцы

$$\sigma = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (e + p)u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ p + \rho v^2 \\ \rho vw \\ (e + p)v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ p + \rho w^2 \\ (e + p)w \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнения в декартовых координатах записываются так

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial z} = 0.$$

Выше буквой  $e$  была обозначена полная энергия, которая равна сумме внутренней и кинетической энергий

$$e = \rho U + \rho \frac{\mathbf{u}^2}{2}.$$

## УСЛОВИЯ НА РАЗРЫВЕ

Уравнения газовой динамики допускают возникновение и существование поверхностей разрыва двух видов: ударных волн и тангенциальных разрывов.

Условия для **ударной волны** имеют следующий вид

$$\begin{aligned}[\rho]D - [\rho(\mathbf{u}, \mathbf{n})] &= 0, \\ [\rho(\mathbf{u}, \mathbf{n})]D - [p + \rho(\mathbf{u}, \mathbf{n})^2] &= 0, \\ [e]D - [(e + p)(\mathbf{u}, \mathbf{n})] &= 0, \\ [\mathbf{u} - (\mathbf{u}, \mathbf{n})\mathbf{n}] &= 0.\end{aligned}$$

Выше через  $D$  обозначена скорость движения поверхности разрыва в направлении вектора  $\mathbf{n}$  нормали к ней,  $[f]$  — скачок функции  $f$  на поверхности разрыва. Последнее равенство означает, что касательная к поверхности разрыва компонента скорости является непрерывной.

Для **тангенциального разрыва** непрерывны нормальная компонента скорости  $\mathbf{u}$  и давление  $p$ , а плотность  $\rho$  и касательная (тангенциальная) компонента скорости  $\mathbf{u}$  могут испытывать произвольные скачки.

На разрывах должен быть выполнен закон возрастания энтропии.

## ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Отдельные экспериментальные факты течения жидкости и газа были установлены Архимедом (287-212 до н.э.), Паскалем (Blaise Pascal, 1588-1651), Торичелли (Evangelista Torricelli, 1608-1647) и Ньютоном (Isaac Newton, 1643-1727).

Основоположником теоретической гидродинамики можно считать двух выходцев из Швейцарии, работавших в том числе и в России — Леонарда Эйлера и Даниила (или Даниеля) Бернулли.

Термин "гидродинамика" был введен Бернулли (Daniel Bernoulli, 1700-1783). Даламбер (Jean le Rond D'Alembert, 1717-1783) ввел закон сохранения массы для жидкости в виде уравнения неразрывности.

Леонард Эйлер (Leonard Euler, 1707-1783) в 1755 г. выписал уравнения движения идеальной жидкости и развил их математическую теорию. Он вывел уравнение неразрывности, выражающее свойство сохранения массы в движущемся вместе с жидкостью материальном объеме. Он же получил уравнение баланса импульса в локальной форме без учета влияния вязкости. В те времена жидкость и газ рассматривали как сплошную среду в буквальном смысле слова. Молекулярный состав вещества в рассмотрение не принимался. Плотность определялась как формальный математический предел отношения массы жидкости в момент времени  $t$  в объеме к величине этого объема при его стремлении к нулю.

Работы Л.Эйлера продолжил Лагранж (Joseph Louis Lagrange, 1736-1813).

Клод Луи Навье (Claude Louis Navier, 1785-1836) вывел уравнения движения вязкой жидкости, пользуясь гипотезой взаимодействия молекул. История уравнений вязкой жидкости отсчитывается с того момента, когда Навье в 1822 г. сделал доклад об их простейшем варианте в несжимаемом случае. Соответствующая статья была опубликована через пять лет.

Джордж Стокс (George Gabriel Stokes, 1819-1903) получил уравнения движения вязкой жидкости на аксиоматической основе. По современным представлениям в качестве постулатов использовались интегральные законы сохранения массы, импульса и полной энергии в материальном объеме, движущемся вдоль интегральных кривых поля скоростей. Его можно считать основателем современной гидродинамики.

Осборн Рейнольдс (Osborne Reynolds, 1842-1912), изучая движение вязкой жидкости, ввел понятия ламинарного и турбулентного течений и указал возможность резкого перехода от одного течения к другому.

Кинетическое обоснование уравнений гидродинамики было построено на основе уравнения Больцмана. Это уравнение для описания поведения функции распределения частиц моноатомного газа с бинарными столкновениями было выписано австрийским физиком Людвигом Больцманом (Ludwig Boltzmann, 1844-1906) в 1872 г.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды, т. I, – 5-е изд. — М.: Наука, 1994. — 528 с.
2. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей, Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1983. 315 с.
3. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой жидкости, Издательство "Наука", Главная редакция физико-математической литературы, М., 1970.
4. Feireisl E. Mathematical theory of viscous fluids: retrospective and future perspectives, discrete and continuous dynamical systems, v. 27, N 2, 2010, pp. 533-555.