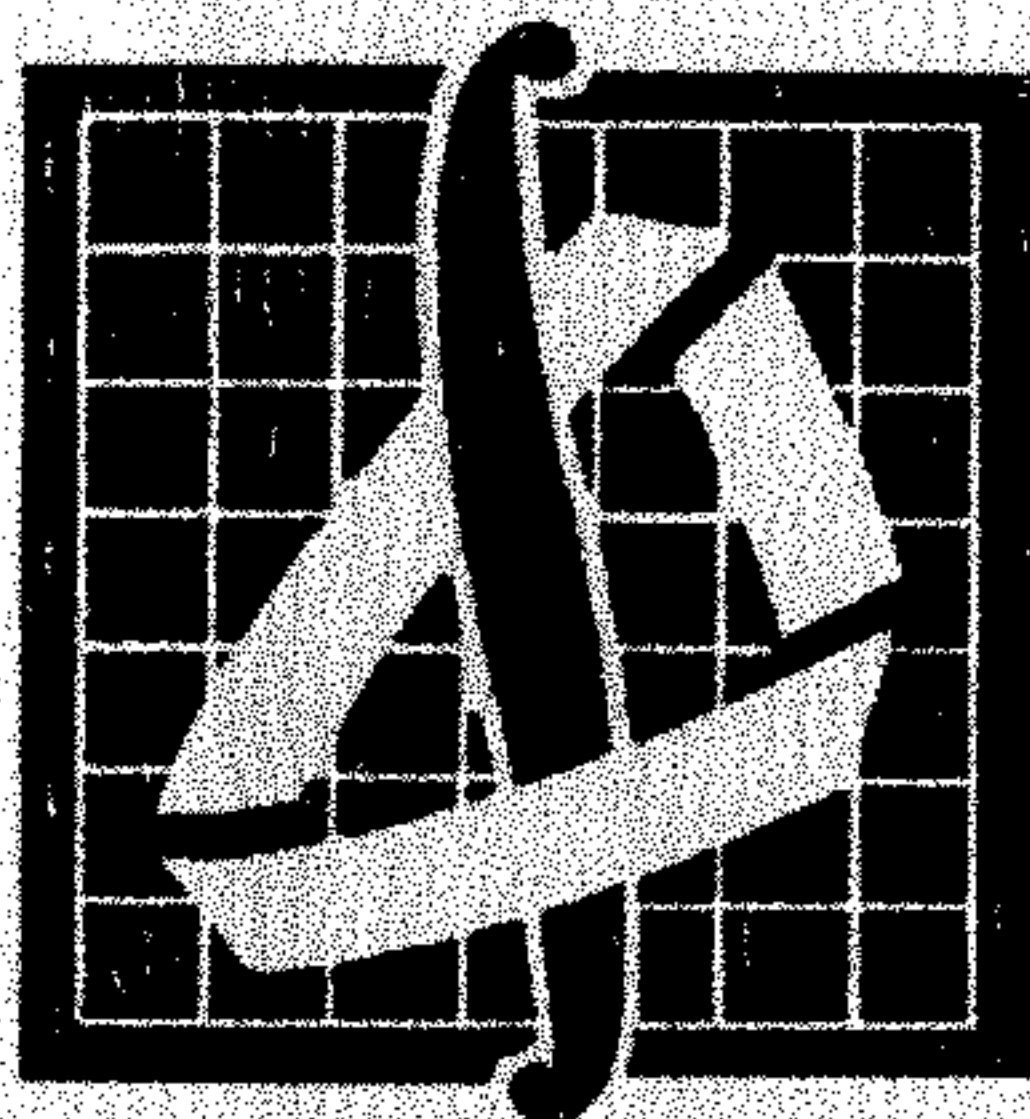


**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**



**Механико-математический факультет
Кафедра вычислительной математики**

А.В. Попов

**Практикум на ЭВМ.
Разностные методы решения
квазилинейных уравнений первого
порядка.**

Москва 2003 год

А.В.Попов Практикум на ЭВМ. Разностные методы решения квазилинейных уравнений первого порядка. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2003, — 128 с.

Настоящее пособие содержит описания разностных методов решения квазилинейных уравнений первого порядка и постановки задач, предлагаемых к реализации на ЭВМ студентам механико-математического факультета МГУ на занятиях по "Практикуму на ЭВМ". В пособии изложены основные приемы теоретического исследования разностных схем. В качестве примера выполнения задания практикума проведено теоретическое и численное исследование простейшей разностной схемы. В пособие включены необходимые сведения по точному решению квазилинейных уравнений первого порядка.

Для студентов и аспирантов, изучающих и применяющих методы вычислительной математики, и преподавателей, проводящих практические занятия.

Первое издание вышло в 1999 г. Во втором издании исправлены замеченные опечатки, изменено и дополнено изложение ряда разделов.

Рецензенты: кандидат физико-математических наук,
доцент Е.А.Лапшин,
доктор физико-математических наук,
доцент Е.В.Чижонков

© Механико-математический
факультет МГУ, 2003 г.

© А.В.Попов, 1999-2003 г.

Содержание

1	Введение	6
2	Постановки задач практикума	9
3	Однородные разностные схемы	16
3.1	Явные схемы	18
3.2	Неявные схемы	19
3.3	Схемы с весами	20
4	Схемы для краевой задачи	21
5	Схема Годунова	25
6	Удароуправляющие разностные схемы	26
6.1	Алгебраический подход	28
6.2	Геометрический подход	34
7	Теоретическое исследование разностной схемы	41
7.1	Аппроксимация	42
7.2	Дифференциальное приближение	43
7.3	Диссипативные и дисперсионные свойства	46
7.4	Устойчивость	53
7.5	Условие монотонности	57
7.6	Выводы	60
8	Оценки точности разностных решений	60
9	Численные эксперименты	64
9.1	Постановка разностной задачи	64
9.2	Тестирование на задаче с известным гладким решением	66
9.3	Расчет линейной задачи	68
9.4	Расчет нелинейной задачи	73

10	Методы нахождения решений разностных схем	75
10.1	Линеаризованные неявные разностные схемы . . .	76
10.2	Метод Ньютона для неявных разностных схем . .	78
11	Точные решения квазилинейного уравнения	80
11.1	Метод характеристик	81
11.2	Обобщенные решения	86
11.3	Задача Римана для уравнения Хопфа	90
11.4	Задача Римана для выпуклой функции состояния	93
11.5	Задача Римана для невыпуклой функции состояния	95
11.6	Закон сохранения	97
11.7	Распространение двуполярного импульса	104
11.8	Примеры распространения двуполярного импульса	110
11.9	Примеры дифференциальных задач	123
	Литература	125

Список таблиц

1	Пример вариантов задания N 1	12
2	Нормы погрешности расчетов задачи с гладким решением	67
3	Оценки погрешности расчета задач с гладким решением на сетке с $\tau = 0.1, h = 0.1$	68
4	Оценки погрешности расчета задач с гладким решением на сетке с $\tau = 0.01, h = 0.01$	68
5	Нормы погрешности расчетов линейной задачи . . .	70
6	Оценки погрешности расчета линейной задачи на сетке с $\tau = 0.1, h = 0.1$	72
7	Оценки погрешности расчета линейной задачи на сетке с $\tau = 0.01, h = 0.01$	72
8	Нормы погрешности расчетов нелинейной задачи .	74
9	Оценки погрешности расчета нелинейной задачи на сетке с $\tau = 0.1, h = 0.1$	74
10	Оценки погрешности расчета нелинейной задачи на сетке с $\tau = 0.01, h = 0.01$	75

1 Введение

Многие физические процессы описываются квазилинейными уравнениями первого порядка, поэтому требуется решать задачи, поставленные для этих уравнений. В такого рода задачах одной из независимых переменных, как правило, является время, а физические процессы, моделируемые ими, протекают достаточно долго. Нелокальная теория решений рассматриваемых уравнений создается начиная с XVIII века. Основной трудностью явилась проблема особенностей, которые могут возникать у гладких классических решений с течением времени. Долгое время были неясны даже подходы к вопросу в каком смысле можно считать решением дифференциального уравнения функцию, не принадлежащую пространству дифференцируемых функций. Только во второй половине XX века была создана теория обобщенных решений квазилинейных уравнений, которая связана с именами Э.Хопфа, О.А.Олейник, А.Н.Тихонова, П.Лакса, И.М.Гельфанда, О.А.Ладыженской, С.Н.Кружкова и многих других.

Основные особенности у решений таких задач бывают двух типов: слабые разрывы, когда само решение еще непрерывно, но разрывной становится производная, и сильные разрывы, когда за конечное время решение приобретает разрыв первого рода. Кратко теория решения этих задач изложена в параграфе "Точные решения квазилинейного уравнения первого порядка" данного пособия. Более подробно с ней можно ознакомиться по книгам [11, 19].

Построение точных решений прикладных задач данного типа возможно далеко не всегда, поэтому часто используют численные методы для приближенного вычисления этих решений. Важное место среди применяемых методов занимают разностные схемы. Целое поколение ученых всего мира занималось их созданием, обоснованием и выяснением границ их практического использования. В их числе российские ученые Н.С.Бахвалов, С.К.Годунов, Н.Н.Кузнецов, А.А.Самарский, Н.Н.Яненко и многие другие.

Данный практикум предназначен для изучения применения конечно-разностных схем к решению нелинейных задач гипер-

1. Введение

болического типа. Именно этот способ положен в основу решения сложных задач газовой динамики, гидродинамики, акустики, а также многих других важных задач физики и химии [6, 9, 15, 19, 23]. Изучение конечно-разностных методов решения перечисленных задач предлагается провести на примере одного квазилинейного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0. \quad (1.1)$$

Функция $u = u(t, x)$ – неизвестна и подлежит определению. Она зависит от двух переменных t (имеет физический смысл времени) и x (одномерная пространственная координата). Уравнение (1.1) дополняется начальным условием при $t = 0$ на искомую функцию u

$$u|_{t=0} = u_0(x). \quad (1.2)$$

Функция $F(u)$ является заданной. Часто ее называют функцией состояния.

Приближенное решение задачи (1.1) - (1.2) требуется найти в полосе

$$P_T = \{(t, x) \mid 0 < t < T, -\infty < x < +\infty\}.$$

Сформулированная задача с одной стороны сохраняет в себе все основные особенности решения сложных прикладных задач гиперболического типа, а с другой стороны является достаточно компактной для реализации и доступной для понимания в качестве учебной задачи. Поэтому на ее примере удобно продемонстрировать основные понятия, методы и технологию использования разностных схем для уравнений математической физики. Такие задачи называются модельными. Больше того, в заданиях практикума приведены такие функции $F(u)$ и $u_0(x)$, что задача (1.1) - (1.2) имеет точное решение, выписываемое в явном виде. Это позволяет сравнить получаемое сеточное решение с точным, проверив тем самым теоретические и практические оценки точности расчетов.

1. Введение

Пособие содержит все основные сведения, необходимые для выполнения заданий практикума. При желании можно более подробно ознакомиться с используемыми разделами теории по книгам, указанным в библиографии.

Первое издание вышло в 1999 г. Объем второго издания вырос в два раза за счет описания новых разностных схем, методик теоретического анализа разностных методов, практических советов по расчету прикладных задач и увеличения числа примеров практических заданий. Во втором издании шире освещены способы построения точных решений квазилинейных уравнений, в частности, задачи Римана о распаде разрыва, а также исправлены замеченные опечатки и неточности, допущенные в первом издании.

Хотелось бы поблагодарить академика РАН Н.С. Бахвалова, профессора Е.В. Чижонкова и доцентов В.Р. Душина за внимательное прочтение рукописи пособия и сделанные замечания. Особенно хочется выразить благодарность доценту Е.А. Лапшину за множество полезных рекомендаций, способствовавших улучшению пособия, а также студентку Н. Пшеницину за помощь в наборе раздела 11.8. Также автор благодарит доцента К.Ю. Богачева и старшего научного сотрудника А.Г. Якушева за помощь при создании оригинал-макета книги.

2 Постановки задач практикума

Задание N 1.

Первое задание практикума состоит в изучении возможности применения однородных разностных схем (схем сквозного счета, см. 3) для расчета обобщенных решений задачи (1.1) - (1.2). При этом необходимо провести как теоретическое исследование разностных схем, так и получить результаты численного эксперимента. Выбор конкретной постановки задачи (1.1) - (1.2) и разностных схем для ее расчета остается за преподавателем. Примеры разностных схем и постановок дифференциальных задач приведены ниже.

Сформулируем теперь подробно задание практикума.

1. Теоретическое исследование состоит из выяснения порядка аппроксимации разностной схемы на гладких решениях дифференциальной задачи и изучения устойчивости разностной схемы как в линейном, так и в нелинейном случаях. В нелинейном случае при выполнении заданий практикума исследование рекомендуется проводить, используя принцип замороженных коэффициентов по спектральному признаку устойчивости. В линейном случае следует найти дифференциальное приближение исследуемой разностной схемы с точностью до третьей производной по пространственной переменной и дать прогноз какие свойства разностного решения в основном будут наблюдаться при численном эксперименте: диссипативные или дисперсионные. С использованными терминами и методиками исследования данных вопросов более глубоко, чем изложено в предлагаемом пособии, рекомендуется знакомиться по учебникам [4, 10, 21, 22]. При выводе дифференциального приближения разностных схем предлагается использовать книги [1, 24]. В данном пособии приведен пример теоретического исследования простейшей разностной схемы для задачи (1.1) - (1.2) в случае $F(u) = u^2$.

2. Численный эксперимент проводится

1) для теста с известным гладким решением,

2. Постановки задач практикума

- 2) для линеаризованного уравнения с поставленным в задании начальным условием,
- 3) для задачи, которая дана в задании.

Во всех случаях требуется оценить абсолютную и относительную погрешность приближенного решения. Для этого следует применить как приближенные оценки, в которых используются только результаты расчетов на различных сетках (смотри параграф "Оценки точности разностных решений"), так и точные оценки, в которых используются проекции на сетку точного дифференциального решения, построенного по методике, изложенной в параграфе "Точные решения квазилинейного уравнения первого порядка." Сравнение сеточных функций следует проводить при $t = 1$ в нормах, указанных в выполняемом задании. Примеры наиболее часто используемых норм приведены в параграфе "Оценки точности разностных решений".

Расчеты нужно провести на различных сетках и полученные результаты следует занести в аналогии таблиц 2-10 (см. параграф 9), которые требуется проанализировать. По окончании выполнения задания должен быть написан отчет о проделанной работе, в который обязательно включаются следующие разделы.

Содержание отчета.

1. Постановка задачи.
2. Теоретическое исследование алгоритмов: исследование аппроксимации, устойчивости разностной схемы и вывод дифференциального приближения.
3. Описание отладочных тестов и их результаты. Отметить, нашли ли подтверждение теоретические исследования.
4. Результаты расчетов линеаризованной задачи.
5. Результаты расчетов нелинейной задачи.
6. Графические иллюстрации результатов расчетов.
7. Сравнительный анализ результатов расчетов.

2. Постановки задач практикума

Сдача задания осуществляется только при наличии отчета и отлаженных программ, по которым выполнялись расчеты.

Пример вариантов задания N 1

В качестве функций $F(u)$ взять $F = au$ в линейном случае и $F = au^2$ в нелинейном.

В таблице 1 в колонке "разностные схемы" указаны номера схем, под которыми они перечислены в параграфе 3, и заданы их параметры.

Начальная функция определяется номером. Указанным номерам соответствуют следующие начальные функции

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leq 0, \\ 0, & \text{если } x > 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ 1, & \text{если } x > 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leq -0,25, \\ -4x, & \text{если } -0,25 < x \leq 0, \\ 0, & \text{если } x > 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ 4x, & \text{если } 0 < x \leq 0,25, \\ 1, & \text{если } x > 0,25. \end{cases} \quad (2.4)$$

Параметр a задается в последнем слобце таблицы 1.

Условия задач практикума можно разнообразить за счет выбора начальной функции, предложив следующие функции u_0 :

$$u_0(x) = \begin{cases} 2, & \text{если } x \leq 0, \\ 0, & \text{если } 0 < x \leq 0,5, \\ -1, & \text{если } x > 0,5. \end{cases} \quad (2.5)$$

$$u_0(x) = \begin{cases} 2, & \text{если } x \leq 0, \\ -1, & \text{если } 0 < x \leq 0,5, \\ 1, & \text{если } x > 0,5. \end{cases} \quad (2.6)$$

2. Постановки задач практикума

N задания	разностные схемы	u_0	a
1	3.1, 3.20 ($\omega = 0, 1; 1$)	2.1	$-1/2$
2	3.1, 3.20 ($\omega = 0, 1; 1$)	2.4	$-1/2$
3	3.3, 3.13	2.2	$1/2$
4	3.3, 3.13	2.3	$1/2$
5	3.4, 3.14	2.1	$-1/2$
6	3.4, 3.14	2.4	$-1/2$
7	3.5, 3.19	2.2	$1/2$
8	3.5, 3.19	2.3	$1/2$
9	3.6, 3.21 ($\omega = 0, 1; 1$)	2.1	$-1/2$
10	3.6, 3.21 ($\omega = 0, 1; 1$)	2.4	$-1/2$
11	3.7, 3.20 ($\omega = 0, 1; 1$)	2.2	$1/2$
12	3.7, 3.20 ($\omega = 0, 1; 1$)	2.3	$1/2$
13	3.8, 3.18 ($\omega = 0; 1$)	2.1	$-1/2$
14	3.8, 3.18 ($\omega = 0; 1$)	2.4	$-1/2$
15	3.9, 3.15	2.2	$1/2$
16	3.9, 3.15	2.3	$1/2$
17	3.10, 3.16	2.1	$-1/2$
18	3.10, 3.16	2.4	$-1/2$
19	3.22 ($\sigma = 0; 1/2; 1$)	2.1	$-1/2$
20	3.22 ($\sigma = 0; 1/2; 1$)	2.4	$-1/2$
21	3.23 ($\sigma = 0; 1/2; 1$)	2.2	$1/2$
22	3.23 ($\sigma = 0; 1/2; 1$)	2.3	$1/2$
23	3.26 ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0; 1$)	2.2	$1/2$
24	3.26 ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0; 1$)	2.3	$1/2$
25	3.27 ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0; 1/2$)	2.1	$-1/2$
26	3.27 ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0; 1/2$)	2.4	$-1/2$
27	3.28 ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0; 1$)	2.2	$1/2$
28	3.28 ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0; 1$)	2.3	$1/2$

Таблица 1: Пример вариантов задания N 1

2. Постановки задач практикума

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq -0,25, \\ 4x + 1, & \text{если } -0,25 < x \leq 0, \\ 0, & \text{если } x > 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq -0,25 \\ 4x + 1, & \text{если } -0,25 < x \leq 0, \\ -2x + 1, & \text{если } 0 < x \leq 0,5, \\ 0, & \text{если } x > 0,5. \end{cases} \quad (2.8)$$

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq -0,2, \\ 15x + 3, & \text{если } -0,2 < x \leq 0, \\ -x - 0,25, & \text{если } 0 < x \leq 0,25, \\ 0, & \text{если } x > 0,25. \end{cases} \quad (2.9)$$

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq -0,25 \\ -8x - 2, & \text{если } -0,25 < x \leq 0, \\ -x + 0,25, & \text{если } 0 < x \leq 0,25, \\ 0, & \text{если } x > 0,25. \end{cases} \quad (2.10)$$

Постановку задания N 1 можно изменить, рассмотрев иные функции состояния. К числу функций $F(u)$, для которых можно относительно легко выписать точные решения при простейших начальных условиях, относятся функции

$$F(u) = au^3, \quad F(u) = \sin(u), \quad F(u) = e^u, \quad F(u) = \ln(u).$$

В параграфе 11.9 приведены примеры дифференциальных задач с такими функциями состояния.

Задание N 2.

Второе задание практикума состоит в изучении точности расчета по одной из удароуправляющих схем обобщенных решений уравнения Хопфа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0. \quad (2.11)$$

2. Постановки задач практикума

В тестовых расчетах следует рассмотреть два варианта задания начальных данных

$$u_0(x) = \begin{cases} \max(0, x(1-x)), & \text{если } x \geq 0, \\ -u_0(-x), & \text{если } x < 0, \end{cases} \quad (2.12)$$

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0,2 < x \leq 2, \\ -0,5, & \text{если } 2 < x \leq 3, \\ -1, & \text{если } 3 < x \leq 4,8, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2.13)$$

Для более точного описания распространения особенностей решений требуется построить графики полученных разностных функций на различных временных слоях. В случае начальной функции (2.12) этими слоями служат точки, соответствующие $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 5$ и $t_4 = 12$, а в случае (2.13): $t_1 = 0,75$, $t_2 = 2$, $t_3 = 3$ и $t_4 = 5$.

Расчеты, как и в первом задании, требуется проводить на различных сетках, заносая их в аналоги таблиц 2-10. Для сравнительного анализа удароулавливающих схем и схем сквозного счета требуется провести расчеты аналогичных задач по схеме Русанова (3.11) и проанализировать полученные результаты.

Примеры вариантов задания N 2

1. Проанализировать точность схемы TVD-I (6.10) с различным методом вычисления весовой функции (6.11)-(6.17). На основании полученных результатов выбрать наилучший способ вычисления весовой функции.

2. Проанализировать точность схемы TVD-II (6.21) с различным методом вычисления весовой функции, определяемым значением параметра ω , положив его равным η из набора (6.22). Изменить схему TVD-II согласно (6.24). На основании численных экспериментов сделать вывод о наилучшем значении параметра η и целесообразности использования модификации (6.24).

3. Проанализировать точность схемы TVD-III (6.25) с различным методом вычисления весовой функции (6.11)-(6.17). На

2. Постановки задач практикума

основании полученных результатов выбрать наилучший способ вычисления весовой функции.

4. Проанализировать точность схемы TVD-IY (6.26) с различным методом вычисления весовой функции (6.11)-(6.17). На основании полученных результатов выбрать наилучший способ вычисления весовой функции.

5. Проанализировать точность схемы FCT-I (6.27). Сравнить полученные результаты с результатами расчетов по схеме Годунова (5.1).

6. Проанализировать точность схемы FCT-I (6.28). Сравнить полученные результаты с результатами расчетов по схеме Годунова (5.1).

7. Проанализировать точность схемы MUSCL-I (6.30) с различным методом вычисления весовой функции, определяемым значением параметра ω , положив его равным η из набора (6.22). Изменить схему MUSCL-I согласно (6.24). На основании численных экспериментов сделать вывод о наилучшем значении параметра η и целесообразности использования модификации (6.24).

8. Проанализировать точность схемы MUSCL-II (6.32)-(6.35). Сравнить полученные результаты с результатами расчетов по схеме Годунова (5.1).

9. Проанализировать точность схемы MUSCL-III (6.36)-(6.38). Сравнить полученные результаты с результатами расчетов по схеме Годунова (5.1).

10. Проанализировать точность схемы MUSCL-IV (6.39)-(6.42). Сравнить полученные результаты с результатами расчетов по схеме Годунова (5.1).

11. Проанализировать точность схемы ENO-I (6.43)-(6.44). Полученные результаты сравнить с результатами расчетов по схеме Годунова (5.1).

12. Проанализировать точность схемы ENO-II (6.45). Сравнить полученные результаты с результатами расчетов по схеме Годунова (5.1).

13. Проанализировать точность схемы PPM (6.46)-(6.51).

3. Однородные разностные схемы

Сравнить полученные результаты с результатами расчетов по схеме Годунова (5.1).

3 Однородные разностные схемы

При решении прикладных задач могут встречаться различные особенности, например, разрывы решения. В газовой динамике, модельным уравнением которой служит уравнение (1.1), к таким особенностям относятся ударные волны и контактные разрывы. Последние возникают, в частности, на границе раздела двух сред с различными физическими свойствами. Помимо этих физических особенностей, в процессе решения задачи приходится иметь дело с нерегулярностями разностного происхождения. К ним следует отнести прежде всего граничные точки сетки. Наличие в задаче подобных неоднородностей вынуждает в окрестности каждой особой точки видоизменять алгоритм численного счета, приспособляя его к каждой индивидуальной особенности. Такой путь достаточно громоздок и приводит к усложнению логической структуры алгоритма, ибо, как правило, заранее положение нерегулярных точек неизвестно. Естественно пытаться строить такие разностные схемы, которые реализуются по одним и тем же формулам во всех узлах сетки, независимо от того, совпадает данный узел с точкой нерегулярности решения или нет. Схемы такого типа называются однородными или схемами сквозного счета [23].

Во всех заданиях практикума функция $F(u)$ удовлетворяет условию Липшица и, следовательно, имеет место эффект конечной скорости распространения возмущений и конечной области зависимости решения в любой точке (t, x) от начальных данных задачи (1.1) - (1.2). Это дает возможность, учитывая заданную начальную функцию $u_0(x)$, свести решение задач практикума к задаче в ограниченной по пространственной переменной области

$$Q_T = \{(t, x) \mid 0 < t < T, X_{\min} < x < X_{\max}\}$$

3. Однородные разностные схемы

$$g_x = \frac{g_{m+1}^n - g_m^n}{h}, \quad g_{\bar{x}} = \frac{g_{m+1}^n - g_{m-1}^n}{2h}, \quad g_{\bar{x}} = \frac{g_m^n - g_{m-1}^n}{h}.$$

Для сокращения записи ниже через F_m^n обозначено значение $F(v_m^n)$.

3.1 Явные схемы

Явными схемами называются схемы, в которых дифференциальный оператор по пространственным переменным аппроксимируется на нижних временных слоях. Такой способ аппроксимации позволяет получить простые расчетные формулы для вычисления разностного решения.

$$v_t + (F(v))_x = 0; \quad (3.1)$$

$$v_t + (F(v))_{\bar{x}} = 0; \quad (3.2)$$

$$v_t + (F(v))_{\bar{x}} = 0; \quad (3.3)$$

$$v_{\bar{t}} + (F(v))_{\bar{x}} = 0; \quad (3.4)$$

$$v_t + (F(v))_{\bar{x}} = \frac{h}{2} v_{x\bar{x}}; \quad (3.5)$$

$$v_t + (F(v))_{\bar{x}} = \frac{h^2}{2\tau} v_{x\bar{x}}; \quad (3.6)$$

$$v_t + (F(v))_{\bar{x}} = \frac{\tau}{2} (F'_v(v) F(v)_x)_{\bar{x}}; \quad (3.7)$$

$$v_t + 0,5(1 - \text{sign}(F'_v(v))) (F(v))_x + 0,5(1 + \text{sign}(F'_v(v))) (F(v))_{\bar{x}} = 0; \quad (3.8)$$

$$v_m^{(1)} = v_m^n - \frac{\tau}{h} (F_{m+1}^n - F_m^n),$$

$$v_m^{n+1} = \frac{1}{2} \left(v_m^n + v_m^{(1)} - \frac{\tau}{h} \left(F(v_m^{(1)}) - F(v_{m-1}^{(1)}) \right) \right); \quad (3.9)$$

$$v_m^{(1)} = v_m^n - \frac{\tau}{h} (F_m^n - F_{m-1}^n),$$

$$v_m^{n+1} = \frac{1}{2} \left(v_m^n + v_m^{(1)} - \frac{\tau}{h} \left(F(v_{m+1}^{(1)}) - F(v_m^{(1)}) \right) \right); \quad (3.10)$$

3.2. Неявные схемы

Метод Русанова [20]

$$\begin{aligned}
 v_{m+0,5}^{(1)} &= \frac{1}{2} (v_{m+1}^n + v_m^n) - \frac{\tau}{3h} (F_{m+1}^n - F_m^n), \\
 v_m^{(2)} &= v_m^n - \frac{2\tau}{3h} \left(F(v_{m+0,5}^{(1)}) - F(v_{m-0,5}^{(1)}) \right), \\
 v_m^{n+1} &= v_m^n - \frac{\tau}{24h} (-2F_{m+2}^n + 7F_{m+1}^n - 7F_{m-1}^n + 2F_{m-2}^n) - \\
 &\quad - \frac{3\tau}{8h} \left(F(v_{m+1}^{(2)}) - F(v_{m-1}^{(2)}) \right) - \\
 &\quad - \frac{\omega}{24} (v_{m+2}^n - 4v_{m+1}^n + 6v_m^n - 4v_{m-1}^n + v_{m-2}^n)
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Параметр ω задается из промежутка $[4\nu^2 - \nu^4; 3]$, где $\nu = F'(v)\tau/h$. Можно положить

$$\omega = 4\nu^2 - \nu^4,$$

что приведет к снижению диссипативных свойств схемы (см. 7.2), а для уменьшения дисперсионных свойств схемы взять

$$\omega = \frac{(4\nu^2 + 1)(4 - \nu^2)}{5}.$$

Метод Уорминга-Катлера-Ломакса

$$\begin{aligned}
 v_m^{(1)} &= v_m^n - \frac{2\tau}{3h} (F_{m+1}^n - F_m^n), \\
 v_m^{(2)} &= \frac{1}{2} \left(v_m^n + v_m^{(1)} - \frac{2\tau}{3h} \left(F(v_m^{(1)}) - F(v_{m-1}^{(1)}) \right) \right), \\
 v_m^{n+1} &= v_m^n - \frac{\tau}{24h} (-2F_{m+2}^n + 7F_{m+1}^n - 7F_{m-1}^n + 2F_{m-2}^n) - \\
 &\quad - \frac{3\tau}{8h} \left(F(v_{m+1}^{(2)}) - F(v_{m-1}^{(2)}) \right) - \\
 &\quad - \frac{\omega}{24} (v_{m+2}^n - 4v_{m+1}^n + 6v_m^n - 4v_{m-1}^n + v_{m-2}^n)
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Параметр ω задается также, как в схеме Русанова.

3.2 Неявные схемы

Неявными схемами называются схемы, в которых для аппроксимации дифференциального оператора по пространственным переменным используются значения неизвестной функции на верхнем

3. Однородные разностные схемы

временном слое. В случае, когда для этого используются только значения на верхнем временном слое, схему называют чисто неявной или схемой с опережением.

$$v_t + (F(\hat{v}))_x = 0; \quad (3.13)$$

$$v_t + (F(\hat{v}))_{\bar{x}} = 0; \quad (3.14)$$

$$v_t + 0.5 (F(\hat{v}))_x + 0.5 (F(v))_{\bar{x}} = 0; \quad (3.15)$$

$$v_t + 0.5 (F(\hat{v}))_{\bar{x}} + 0.5 (F(v))_x = 0; \quad (3.16)$$

$$v_t + 0,5(1 - \text{sign}(F'_v(v))) (F(\hat{v}))_x + \\ + 0,5(1 + \text{sign}(F'_v(v))) (F(\hat{v}))_{\bar{x}} = 0; \quad (3.17)$$

$$v_t + (F(\hat{v}))_{\bar{x}} = \frac{\omega}{8} (v_{m+2}^n - 4v_{m+1}^n + 6v_m^n - 4v_{m-1}^n + v_{m-2}^n). \quad (3.18)$$

Параметр ω задается из промежутка $[0; 1]$.

$$v_t + (F(\hat{v}))_{\bar{x}} = \frac{\tau}{2} (F'_v(v) F(\hat{v})_x)_{\bar{x}}; \quad (3.19)$$

$$v_t + (F(\hat{v}))_{\bar{x}} = \frac{\omega h^2}{\tau} v_{x\bar{x}}; \quad (3.20)$$

$$v_t + (F(\hat{v}))_{\bar{x}} = \omega \tau \left((F'_v(v))^2 \hat{v}_x \right)_{\bar{x}}. \quad (3.21)$$

Параметр ω задается из промежутка $(0; 1]$.

3.3 Схемы с весами

Для простоты рассмотрим только двухслойные разностные схемы, т. е. схемы, в формулах которых участвуют значения разностного решения только со слоев n и $(n + 1)$. С целью сокращения записей введем обозначение

$$v^\sigma = \sigma \hat{v} + (1 - \sigma)v.$$

Параметр σ называется весом. Он отвечает за доли, в которых берется функция v с верхнего слоя и с нижнего. При $\sigma = 0$ схема

4. Схемы для краевой задачи

использует в данном месте только значение с нижнего слоя, т. е. явным образом. Если $\sigma = 1$, то применяется значение с верхнего временного слоя, т. е. получается чисто неявная аппроксимация. При $\sigma \neq 0$ и $\sigma \neq 1$ в схеме участвуют как значения с нижнего, так и с верхнего слоев. При $\sigma = 1/2$ схема обладает симметрией относительно нижнего и верхнего слоев.

$$v_t + (F^\sigma(v))_x = 0; \quad (3.22)$$

$$v_t + (F^\sigma(v))_{\bar{x}} = 0; \quad (3.23)$$

$$v_t + 0,5(1 - \text{sign}(F'_v(v))) (F^\sigma(v))_x + \\ + 0,5(1 + \text{sign}(F'_v(v))) (F^\sigma(v))_{\bar{x}} = 0; \quad (3.24)$$

$$v_t + (F^\sigma(v))_{\bar{x}} = \frac{\omega}{8} (v_{m+2}^n - 4v_{m+1}^n + 6v_m^n - 4v_{m-1}^n + v_{m-2}^n). \quad (3.25)$$

Параметр ω задается из промежутка $[0; 1]$.

$$v_t + (F^{\sigma_1}(v))_{\bar{x}} = \frac{\tau}{2} (F'_v(v) F^{\sigma_2}(v)_x)_{\bar{x}}; \quad (3.26)$$

$$v_t + (F^{\sigma_1}(v))_{\bar{x}} = \frac{\omega h^2}{\tau} (v^{\sigma_2})_{x\bar{x}}; \quad (3.27)$$

$$v_t + (F^{\sigma_1}(v))_{\bar{x}} = \omega \tau \left((F'_v(v))^2 v_x^{\sigma_2} \right)_{\bar{x}}. \quad (3.28)$$

Параметр ω задается из промежутка $(0; 1]$.

4 Схемы для краевой задачи

Запись разностных схем (3.1)-(3.28) явно не учитывает того, что реально задача (1.1) - (1.2) решается в ограниченной по пространственной переменной области. Это делается позже на этапе постановки разностной задачи (см. раздел 9). Однако уже при конструировании разностных схем часто учитывают особенности той

4. Схемы для краевой задачи

краевой задачи, к которой будет сведена задача (1.1) - (1.2). Рассмотрим в качестве примера разностные схемы, предназначенные для решения краевой задачи для уравнения (1.1) в области

$$P_T = \{(t, x) \mid 0 < t < T, 0 < x < +\infty\}$$

с начальным и краевым условиями

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u|_{x=0} = w_0(t). \quad (4.1)$$

Ниже мы будем считать, что задача (1.1), (4.1) поставлена корректно. Другими словами функции u_0 , w_0 и F таковы, что характеристики на фазовой плоскости (t, x) являются выходящими из точек вертикальной части границы $x = 0$, а именно образуют острый угол с направлением оси x .

На множестве $(t \geq 0, x \geq 0)$ введем равномерную сетку с шагами τ и h . Для решения задачи (1.1), (4.1) в случае

$$u_0(0) = w_0(0)$$

в [6] предложена разностная схема третьего порядка точности следующего вида

$$\begin{aligned} v_{m-1}^{n+1} - 2v_m^n + v_{m+1}^{n-1} = & v_{m-1}^n - 2v_m^{n-1} + v_{m+1}^{n-2} - \\ & - \tau/h \left((F(v_{m-1}^n) - 2F(v_m^{n-1}) + F(v_{m+1}^{n-2})) - \right. \\ & \left. - (F(v_{m-2}^n) - 2F(v_{m-1}^{n-1}) + F(v_m^{n-2})) \right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Для реализации счета по схеме (4.2) значения решения в узлах (τ, mh) , $m = 2, 3, \dots$, находятся по схеме (3.11), значения решения в узлах $(n\tau, h)$, $n = 3, 4, \dots$, находятся по схеме

$$\begin{aligned} v_{m-1}^{n+1} - 2v_m^n + v_{m+1}^{n-1} = & v_{m-1}^n - 2v_m^{n-1} + v_{m+1}^{n-2} - \\ & - \tau/h \left((F(v_m^{n-1}) - 2F(v_{m+1}^{n-2}) + F(v_{m+2}^{n-3})) - \right. \\ & \left. - (F(v_{m-1}^{n-1}) - 2F(v_m^{n-2}) + F(v_{m+1}^{n-3})) \right). \end{aligned}$$

4. Схемы для краевой задачи

Для нахождения решения в узлах (τ, h) , $(2\tau, h)$ предлагается использовать схему (3.11), используя дополнительные сведения о решаемой задаче. Например, в задачах практикума предлагается использовать знание функции $u_0(x)$ при $x < 0$.

Вычисление по схеме (4.2) можно вести прогонкой по линиям $t = (\tau/h)x + C$.

Опишем теперь схему третьего порядка точности, построенную в [6], для решения задачи (1.1), (4.1) в случае, если

$$u_0(0) \neq w_0(0).$$

В основу алгоритма нахождения разрывного решения положена схема (4.2). Если $m > 1$, то вычисление решения на $(n + 1)$ -ом слое по n -му ведется непосредственно по формулам схемы (4.2), а если $m = 1$, то используются следующие расчетные формулы

$$\begin{aligned} v_{m+0,5}^{(1)} &= \frac{1}{2} (v_{m+1}^n + v_m^n) - \frac{\tau}{3h} (F_{m+1}^n - F_m^n), \\ v_m^{(2)} &= v_m^n - \frac{2\tau}{3h} (F(v_{m+0,5}^{(1)}) - F(v_{m-0,5}^{(1)})), \\ v_1^{n+1} &= v_1^n - \frac{\tau}{24h} (F_0^n - 12F_1^n + 15F_2^n - 4F_3^n) - \\ &\quad - \frac{3\tau}{8h} (F(v_2^{(2)}) - F(w_0(n\tau + \frac{2}{3}\tau))). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Алгоритм поиска разрывного решения заключается в следующем.

1. Вычисляется скачок начальных данных:

$$sk = u_0(+0) - w_0(+0)$$

и составляются новые начальные условия:

$$u_0^I(x) = u_0(x), \quad w_0^I(t) = w_0(t) + sk$$

и

$$u_0^{II}(x) = u_0(x) - sk, \quad w_0^{II}(t) = w_0(t).$$

Пусть на n -ом слое найдены два решения v^I и v^{II} , соответствующие первым и вторым начальным данным. Опишем способ

4. Схемы для краевой задачи

нахождения разрывного решения на $(n + 1)$ -ом слое. С помощью схемы (4.3) на $(n + 1)$ -ом слое вычисляются соответственно \hat{v}^I и \hat{v}^{II} .

Пусть x_0 — точка пересечения линии разрыва $x(t)$ с n -ым слоем, x_1 — со слоем $(n + 1)$, тогда

$$x_1 = x_0 + \left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_0 \tau + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right|_0 \tau^2 + \underline{\underline{O(\tau^3)}}.$$

Соотношение на разрыве имеет вид

$$(v^+ - v^-) \frac{dx}{dt} = F(v^+) - F(v^-),$$

где v^+ , v^- — правое и левое предельное значение функции на линии разрыва.

Отсюда

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F(v^+) - F(v^-)}{v^+ - v^-}, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{F(v^+) - F(v^-)}{v^+ - v^-} \right). \quad (4.4)$$

Соотношения (4.4) имеют смысл, когда $x(t)$ не имеет вертикальной касательной.

Тогда:

$$x_1 = x_0 + \left. \frac{F(v^+) - F(v^-)}{v^+ - v^-} \right|_0 \tau + \frac{1}{2} \left. \frac{d}{dt} \left(\frac{F(v^+) - F(v^-)}{v^+ - v^-} \right) \right|_0 \tau^2 + \underline{\underline{O(\tau^3)}}.$$

Аппроксимируя v^+ , v^- с третьим порядком точности, вычисляем x_1 .

За значение разрывного решения задачи (1.1), (4.1) с разрывом начальных данных в точке $(0, 0)$ принимается функция \hat{v} , определенная по правилу:

$$\hat{v}_m = \hat{v}_m^I, \quad \text{при } x_m \geq x_1, \quad \hat{v}_m = \hat{v}_m^{II}, \quad \text{при } x_m < x_1.$$

5 Схема Годунова

С.К.Годунов в своей работе 1959 г. [8] предложил оригинальный метод решения одномерных задач с разрывными решениями. Опишем этот метод для решения задачи (1.1) - (1.2). Метод состоит в том, что по известным значениям функции v на n -ом временном слое вычисляются приближенные значения $F_{m+1/2}^{n+1/2}$, а затем находятся значения \hat{v} по центрированной формуле

$$\hat{v} = v - \frac{\tau}{h} \left(F_{m+1/2}^{n+1/2} - F_{m-1/2}^{n+1/2} \right). \quad (5.1)$$

Значения $v_{m+1/2}^{n+1/2}$, необходимые для вычисления величин

$$F_{m+1/2}^{n+1/2} = F(v_{m+1/2}^{n+1/2}),$$

берутся равными в точке $((n + 1/2)\tau, (m + 1/2)h)$ решению задачи Римана о распаде разрыва для уравнения (1.1) с кусочно-постоянной начальной функцией

$$u_0^n(x) = \begin{cases} v_m^n, & x < (m + 1/2)h, \\ v_{m+1}^n, & x > (m + 1/2)h, \end{cases}$$

при $t = n\tau$.

Говоря иными словами, для определения значений $v_{m+1/2}^{n+1/2}$ ищется точное решение уравнения (1.1) с кусочно-постоянной начальной функцией u_0^n при $t = n\tau$, равной на интервале $((m - 1/2)h, (m + 1/2)h)$ значению v_m^n и за значение $v_{m+1/2}^{n+1/2}$ принимается величина этого решения в точке $((n + 1/2)\tau, (m + 1/2)h)$. Для избежания влияния двух различных точек разрыва функции u_0 на значение в точке $((n + 1/2)\tau, (m + 1/2)h)$ шаг τ выбирается из условия

$$\max_m |F'(v_m^n)| \frac{\tau}{h} < 1.$$

Из сказанного следует, что метод Годунова в описанном здесь варианте существенно использует возможность точно решить для

уравнения (1.1) задачу Коши с начальной функцией вида

$$u_0(x) = \begin{cases} u^-, & x < 0, \\ u^+, & x > 0, \end{cases} \quad (5.2)$$

где u^- и u^+ произвольные константы.

Такая задача называется задачей Римана о распаде разрыва. Для ее решения требуется знать теорию разрывных обобщенных решений для уравнения (1.1). В конце этой книги в разделе 11.3 приведено решение этой задачи для функции $F(u) = u^2$ и в разделах 11.4 и 11.5 описан процесс построения решения этой задачи для выпуклой и невыпуклой функций $F(u)$ соответственно.

6 Удароулавливающие разностные схемы

Для достижения высокой точности численного решения как в разрывных, так и в гладких областях предложены удароулавливающие схемы, называемые схемами высокого разрешения. Основная идея, стоящая за всеми подобными схемами, как можно больше использовать схемы высших порядков в областях гладкости решения и в то же время разумно добавлять достаточное рассеяние в локализованную область высокого градиента с тем, чтобы избежать возможной численной осцилляции. В результате удароулавливающие схемы нелинейны даже при применении их к линейным задачам. Более подробно с этими методами можно ознакомиться по монографии [15].

Опишем простейшие удароулавливающие разностные схемы. Интегрируя уравнение (1.1) по области $Q_{nm} = \{(t, x) | n\tau < t < (n+1)\tau, (m-1/2)h < x < (m+1/2)h\}$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{(m-1/2)h}^{(m+1/2)h} u((n+1)\tau, x) dx &= \int_{(m-1/2)h}^{(m+1/2)h} u(n\tau, x) dx - \\ - \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} F(t, (m+1/2)h) dt &+ \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} F(t, (m-1/2)h) dt. \end{aligned}$$

6. Удароуправляющие разностные схемы

Заменяя точные интегралы их приближениями, получаем разностную схему

$$\hat{v} = v - \frac{\tau}{h}(f_{m+1/2} - f_{m-1/2}), \quad (6.1)$$

в которой члены $f_{m+1/2}$ и $f_{m-1/2}$ называются граничными потоками и являются функциями F на одном или более временных слоях. Правильное вычисление граничных потоков является ключом к построению хорошей разностной схемы.

Три классические схемы, называемые противопотоковая (3.1, 3.2, 3.8), с центральной разностью (3.3) и "тренога" (3.7), используют различные приближения для вычисления граничных потоков.

Граничный поток в противопотоковой схеме первого порядка можно записать в виде

$$f_{m+1/2}^{UP} = \frac{F_{m+1} + F_m}{2} - \text{sign}(a_{m+1/2}) \frac{F_{m+1} - F_m}{2} \quad (6.2)$$

или

$$f_{m+1/2}^{UP} = \frac{F_{m+1} + F_m}{2} - |a_{m+1/2}| \frac{\Delta_{m+1/2}}{2}, \quad (6.3)$$

где

$$\Delta_{m+1/2} = v_{m+1} - v_m. \quad (6.4)$$

Скорость волны a вычисляется как

$$a_{m+1/2} = \begin{cases} \frac{F_{m+1} - F_m}{\Delta_{m+1/2}}, & \text{если } \Delta_{m+1/2} \neq 0; \\ \frac{\partial F}{\partial u}, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (6.5)$$

Скорость волны a и шаги сетки задают число Куранта – очень важный параметр при решении гиперболических уравнений:

$$\lambda = \frac{a\tau}{h}.$$

6. Удароулавливающие разностные схемы

Выбор граничного потока в виде (6.3) может не удовлетворять условию неубывания энтропии (см. раздел 11.2), поэтому $|a_{m+1/2}|$ заменяется на $\psi(a_{m+1/2})$, которое определяется как

$$\psi(a_{m+1/2}) = \max(|a_{m+1/2}|, \delta), \quad (6.6)$$

где δ – малое положительное число.

Граничный поток в схеме с центральной разностью записывается в виде

$$f_{m+1/2}^{CN} = \frac{F_{m+1} + F_m}{2}. \quad (6.7)$$

В схеме "тренога" (в зарубежной литературе она называется схемой Лакса-Вендроффа) поток определяется следующим образом

$$f_{m+1/2}^{LW} = \frac{F_{m+1} + F_m}{2} - \frac{\tau a_{m+1/2}^2}{2h} \Delta_{m+1/2}. \quad (6.8)$$

Хорошо известно, что противопотоковая схема слишком диссипативная, в то время как схемы с центральной разностью и "тренога" слишком дисперсионные в области сильных градиентов (см. раздел 7.3).

Рассмотрим, следуя [25], два подхода для построения удароулавливающих схем: алгебраический и геометрический.

6.1 Алгебраический подход

Большинство методов, созданных на основе алгебраического подхода, используют для определения граничных потоков линейную комбинацию приближений низкого f^L и высокого f^H порядков:

$$f_{m+1/2} = f_{m+1/2}^L + \phi_{m+1/2}(f_{m+1/2}^H - f_{m+1/2}^L). \quad (6.9)$$

TVD-схемы

Ключ к успеху в алгебраическом подходе заключается в правильном вычислении весовой функции $\phi_{m+1/2}$ таким образом,

6.1. Алгебраический подход

чтобы решение, вычисленное с использованием численного потока, определенного по формуле (6.9) удовлетворяло некоторым желательным требованиям. Одно из таких требований, названное *уменьшением общей вариации* (total variation diminishing, TVD), предложено для разработки свободных от осцилляции схем.

I.

$$f_{m+1/2}^L = f_{m+1/2}^{UP}, \quad f_{m+1/2}^H = f_{m+1/2}^{LW}. \quad (6.10)$$

Весовая функция вычисляется одним из следующих способов:

$$\phi(r)_1 = \text{minimod}(1, r); \quad (6.11)$$

$$\phi(r)_2 = \frac{r + |r|}{1 + r}; \quad (6.12)$$

$$\phi(r)_3 = \max(0, \min(2, 2r, (1 + r)/2)); \quad (6.13)$$

$$\phi(r)_4 = \max(0, \min(2r, 1), \min(r, 2)); \quad (6.14)$$

$$\phi(r^+, r^-)_5 = \text{minimod}(1, r^+, r^-); \quad (6.15)$$

$$\phi(r^+, r^-)_6 = \text{minimod}(1, r^+) + \text{minimod}(1, r^-) - 1; \quad (6.16)$$

$$\phi(r^+, r^-)_7 = \max(0, \min(2, 2r^+, 2r^-, \frac{r^+ + r^-}{2})). \quad (6.17)$$

Функция minimod от двух аргументов определяется как

$$\text{minimod}(a, b) = \text{sign}(a) \max(0, \min(|a|, \text{sign}(a) \cdot b)). \quad (6.18)$$

"Трехаргументная" функция minimod , используемая в (6.15), равна наименьшему по модулю аргументу, если все аргументы одного знака. В противном случае ее значение берется равным нулю.

Двухпараметрические весовые функции можно получать, используя однопараметрические функции $\phi(r)$ из (6.11)-(6.14) по следующей формуле

$$\phi(r^+, r^-) = \phi(r^+) + \phi(r^-) - c,$$

6. Удароуправляющие разностные схемы

где константа c может быть 1 (для minimod) или 2 (для других).

Величина r вычисляется по формуле

$$r = \frac{(|a_{m+1/2-\sigma}| - \lambda a_{m+1/2-\sigma}^2) \Delta_{m+1/2-\sigma}}{(|a_{m+1/2}| - \lambda a_{m+1/2}^2) \Delta_{m+1/2}}, \quad (6.19)$$

где $\sigma = \text{sign}(a_{m+1/2})$, величины r^+ и r^- определяются отношениями

$$r^+ = \frac{\Delta_{m+1/2+1}}{\Delta_{m+1/2}}, \quad r^- = \frac{\Delta_{m+1/2-1}}{\Delta_{m+1/2}}. \quad (6.20)$$

II.

$$f_{m+1/2}^L = f_{m+1/2}^{UP}, \quad f_{m+1/2}^H = f_{m+1/2}^{CN}. \quad (6.21)$$

Весовая функция вычисляется следующим образом

$$\phi(r) = \frac{3-\eta}{4} \text{minimod} \left[\frac{r}{\omega}, 1 \right] + \frac{1+\eta}{4} \text{minimod}(1, r\omega),$$

где ω – параметр сжатия, определяемый как

$$1 \leq \omega \leq \frac{3-\eta}{1-\eta}.$$

Величина η может принимать одно из следующих значений

$$-1, \quad -1/3, \quad 0, \quad 1/3, \quad 1/2, \quad 1. \quad (6.22)$$

Отношение r определяется как

$$r = \frac{a_{m+1/2-\sigma} \cdot \Delta_{m+1/2-\sigma}}{a_{m+1/2} \cdot \Delta_{m+1/2}}, \quad (6.23)$$

где $\sigma = \text{sign}(a_{m+1/2})$.

6.1. Алгебраический подход

Вышеприведенная схема имеет первый порядок точности по времени. Повысить его можно за счет замены эйлеровской временной дискретизации (6.1) каким-либо линейным многошаговым методом, таким как дискретизация Рунге-Кутты. Например,

$$\begin{aligned} v_m^{n+1/2} &= v_m^n - \frac{\tau}{2h} \left(f_{m+1/2}^n - f_{m-1/2}^n \right), \\ v_m^{n+1} &= v_m^n - \frac{\tau}{h} \left(f_{m+1/2}^{n+1/2} - f_{m-1/2}^{n+1/2} \right). \end{aligned} \quad (6.24)$$

III.

$$\begin{aligned} f_{m+1/2} &= f_{m+1/2}^{UP} + \frac{\phi(r^+) + \phi(r^-)}{2} (f_{m+1/2}^{LW} - f_{m+1/2}^{UP}) - \\ &\quad - \frac{1}{2} (\psi(a_{m+1/2} + \gamma_{m+1/2}) - \psi(a_{m+1/2})) \Delta_{m+1/2}, \end{aligned} \quad (6.25)$$

где функции Δ , a , ψ , r^+ и r^- определяются формулами (6.4)-(6.6) и (6.20) соответственно. Коэффициент γ задается выражением

$$\gamma_{m+1/2} = \frac{\psi(a_{m+1/2}) - \lambda a_{m+1/2}^2}{2} \begin{cases} \frac{F_{m+1} - F_m}{\Delta_{m+1/2}}, & \text{если } \Delta_{m+1/2} \neq 0; \\ 0, & \text{если } \Delta_{m+1/2} = 0. \end{cases}$$

Выбор весовой функция ϕ может быть осуществлен одним из способов, описанных в методе (6.10).

IV.

Представим функцию F в точке m в виде суммы

$$F_m = F^+ + F^-,$$

где

$$\begin{aligned} F_m^+ &= F(a_m^+), & F_m^- &= F(a_m^-), \\ a_m^+ &= \max(v_m, 0), & a_m^- &= \min(v_m, 0). \end{aligned}$$

6. Удароуправляющие разностные схемы

В литературе эту операцию называют расщеплением потока.

Поток в противопотоковой схеме в терминах расщепления потока записывается следующим образом

$$f_{m+1/2}^{UP} = F_m^+ + F_{m+1}^-,$$

а поток в схеме "треугога"

$$f_{m+1/2}^{LW} = \frac{F_m + F_{m+1}}{2} - \frac{\tau}{2h} a_{m+1/2} (F_{m+1} - F_m).$$

В результате, TVD поток может быть записан в виде

$$f_{m+1/2} = f_{m+1/2}^{UP} + \frac{\phi_m(r^+) + \phi_{m+1}(r^-)}{2} (f_{m+1/2}^{LW} - f_{m+1/2}^{UP}) - \frac{\phi_m(r^+) + \phi_{m+1}(r^-)}{2} (\Delta^+ F_m - \lambda a_{m+1/2} \Delta^+ (F_m^+ - F_m^-)), \quad (6.26)$$

где

$$r^+ = \frac{\Delta^- f^+}{\Delta^+ f^+}, \quad r^- = \frac{\Delta^+ f^-}{\Delta^- f^-},$$

$$\Delta^+ = ()_{m+1} - ()_m, \quad \Delta^- = ()_m - ()_{m-1}.$$

Выбор весовой функция ϕ может быть осуществлен одним из способов, описанных в методе (6.10).

FCST-схемы

Важным подклассом TVD-схем являются схемы, называемые схемами потока, корректирующего перенос (flux corrected transport, FCST). С точки зрения сохранения монотонности решения FCST является одним из типов TVD схемы. Отличие же в том, что обычные TVD схемы (например, приведенные выше) одношаговые, тогда как у FCST два шага. Двухшаговая FCST – это, по существу, гибридная схема, состоящая из комбинированных схем первого и высшего порядков. Она вычисляет предварительные данные из схемы первого порядка, а затем фильтрует поправку высшего порядка, используя весовые множители, чтобы

6.1. Алгебраический подход

предотвратить появление новых экстремумов. Таким образом, в области, где искомая функция изменяется плавно, используется схема высшего порядка. В области резкого изменения искомой функции предпочтение отдается схеме низшего порядка.

Формально, FCT процедура такова:

- 1) вычисляется поток низкого порядка $f_{m+1/2}^L$;
- 2) вычисляется поток высокого порядка $f_{m+1/2}^H$;
- 3) определяется антидиффузионный поток

$$A_{m+1/2} = f_{m+1/2}^H - f_{m+1/2}^L;$$

- 4) вычисляется решение низкого порядка

$$v_m^{td} = v_m^n - \frac{\tau}{h}(f_{m+1/2}^L - f_{m-1/2}^L);$$

- 5) ограничивается или корректируется антидиффузионный поток

$$A^c = A^c(A);$$

- 6) вычисляется решение на верхнем временном слое, используя ограниченный антидиффузионный поток

$$v_m^{n+1} = v_m^{td} - \frac{\tau}{h}(A_{m+1/2}^c - A_{m-1/2}^c).$$

I.

Поток высокого порядка определяется схемой "тренога", а поток низкого порядка – противопотоковой схемой. Ограниченный антидиффузионный поток задается следующей формулой

$$A_{m+1/2}^c = s \cdot \max \left\{ 0, \min \left[|A_{m+1/2}|, \frac{s \cdot h(v_{m+2}^{td} - v_{m+1}^{td})}{\tau}, \frac{s \cdot h(v_m^{td} - v_{m-1}^{td})}{\tau} \right] \right\}, \quad (6.27)$$

где $s = \text{sign}(A_{m+1/2})$.

I.

Значение зависимой переменной на границе ячейки сетки получается посредством следующего ограничителя наклона:

$$\begin{aligned} v_{m+1/2,R} &= v_{m+1} - \frac{1}{4} \left[(1 - \eta) \Delta_{m+3/2}^* + (1 + \eta) \Delta_{m+1/2}^{**} \right], \\ v_{m+1/2,L} &= v_m + \frac{1}{4} \left[(1 - \eta) \Delta_{m-1/2}^{**} + (1 + \eta) \Delta_{m+1/2}^* \right], \\ \Delta_{m+1/2}^* &= \text{minimod} \left[\Delta_{m+1/2}, \omega \Delta_{m-1/2} \right], \\ \Delta_{m+1/2}^{**} &= \text{minimod} \left[\Delta_{m+1/2}, \omega \Delta_{m+3/2} \right], \end{aligned} \quad (6.29)$$

где величина $\Delta_{m+1/2}$ определяется равенством (6.4), а величины ω и η выбираются так же как в TVD-схеме (6.21).

Граничный поток определяется по следующей формуле

$$\begin{aligned} f_{m+1/2} &= \frac{1}{2} \left[F(v_{m+1/2,R}) + F(v_{m+1/2,L}) - \right. \\ &\left. \left| \frac{F(v_{m+1/2,R}) - F(v_{m+1/2,L})}{v_{m+1/2,R} - v_{m+1/2,L}} \right| (v_{m+1/2,R} - v_{m+1/2,L}) \right]. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Для достижения временной дискретизации второго порядка (в дополнение к приведенной выше пространственной дискретизации) можно заменить явную эйлеровскую дискретизацию (6.1) линейным многошаговым методом (6.24) или дискретизацией типа Рунге-Кутта.

II.

Кусочно-линейная функция v на отрезке $[x_{m-1/2}, x_{m+1/2}]$ задается следующей формулой

$$v(t^n, x) = v_m^n + s_m^n \frac{x - x_m}{h}, \quad (6.31)$$

где s_m^n определяется из некоторых ограничительных функций. Например,

$$s_m^n = \text{minimod}(\Delta_{m+1/2}, \Delta_{m-1/2}). \quad (6.32)$$

6. Удароуправляющие разностные схемы

С помощью функции v вычисляются $v_{m+1/2,R}^n$ и $v_{m+1/2,L}^n$:

$$v_{m+1/2,R}^n = v_{m+1}^n - \frac{s_{m+1}^n}{2}, \quad v_{m+1/2,L}^n = v_m^n + \frac{s_m^n}{2}. \quad (6.33)$$

Введем кусочно-линейную функцию потока g с углом наклона g'_m :

$$g'_m = \begin{cases} \frac{F(v_{m+1/2,R}^n) - F(v_{m+1/2,L}^n)}{v_{m+1/2,R}^n - v_{m+1/2,L}^n}, & \text{если } s_m^n \neq 0, \\ F'(v_m^n), & \text{если } s_m^n = 0. \end{cases} \quad (6.34)$$

Тогда поток равен

$$\begin{aligned} f_{m+1/2} &= \frac{1}{\tau} \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} g(v(x_{m+1/2}, t)) dt = \\ &= \begin{cases} F(v_{m+1/2,R}^n) - \frac{\tau s_m^n}{2h} (g'_m)^2, & \text{если } F' > 0, \\ F(v_{m+1/2,L}^n) - \frac{\tau s_m^n}{2h} (g'_{m+1})^2, & \text{если } F' < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.35)$$

III.

Для расчета угла наклона s_m^n функции v (6.31) на каждом отрезке используется следующий двухшаговый алгоритм. Первый шаг — это монотонизированный центрально-разностный алгоритм:

$$\delta_m = 2 \min \text{mod}(\Delta_{m+1/2}, \Delta_{m-1/2}), \quad (6.36)$$

$$\delta_m^f = \min \left[\frac{\Delta_{m+1/2} + \Delta_{m-1/2}}{2}, \delta_m \right] \cdot \text{sign}(\Delta_{m+1/2} + \Delta_{m-1/2}). \quad (6.37)$$

На втором шаге выбирается угол наклона по формуле

$$\begin{aligned} s_m^n &= \min \left[\frac{2}{3} |\Delta_{m+1/2} + \Delta_{m-1/2}| - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} (\delta_{m+1}^f - \delta_m^f), \delta_m^f \right] \cdot \text{sign}(\Delta_{m+1/2} + \Delta_{m-1/2}). \end{aligned} \quad (6.38)$$

6.2. Геометрический подход

Заметим, что в случае, если минимум в уравнениях (6.36)-(6.38) достигается в первом аргументе, то получаем

$$s_m^n = \frac{2}{3}(v_{m+1} - v_{m-1}) - \frac{1}{12}(v_{m+2} - v_{m-2}).$$

Это конечно-разностное приближение для первой производной функции v четвертого порядка точности.

IV.

Угол наклона s_m^n функции v (6.31) на каждом отрезке задается формулой

$$s_m^n = \begin{cases} \text{sign}(\Delta_{m+1/2} + \Delta_{m-1/2}) \min \left[\frac{1}{2} |\Delta_{m+1/2} + \Delta_{m-1/2}|, \right. \\ \left. 2|\Delta_{m+1/2}|, 2|\Delta_{m-1/2}| \right], & \text{если } \Delta_{m+1/2} \cdot \Delta_{m-1/2} > 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (6.39)$$

Далее применяется двухшаговый алгоритм

$$v_m^{n+1/2} = v_m^n - \frac{\tau}{2h} \left[F \left(v_m^n + \frac{s_m^n}{2} \right) - F \left(v_m^n - \frac{s_m^n}{2} \right) \right], \quad (6.40)$$

$$v_m^{n+1} = v_m^n - \frac{\tau}{h} \left[f_{m+1/2}^{n+1/2} - f_{m-1/2}^{n+1/2} \right], \quad (6.41)$$

где

$$f_{m+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left[F(v_{m+1/2,R}^{n+1/2}) + F(v_{m+1/2,L}^{n+1/2}) - \left| \frac{F(v_{m+1/2,R}^{n+1/2}) - F(v_{m+1/2,L}^{n+1/2})}{v_{m+1/2,R}^{n+1/2} - v_{m+1/2,L}^{n+1/2}} \right| (v_{m+1/2,R}^{n+1/2} - v_{m+1/2,L}^{n+1/2}) \right], \quad (6.42)$$

$$v_{m+1/2,L}^{n+1/2} = v_m^{n+1/2} + s_m^n/2, \quad v_{m+1/2,R}^{n+1/2} = v_{m+1}^{n+1/2} - s_{m+1}^n/2.$$

ENO-схемы

TVD-схемы имеют порядок точности не выше первого. Схемы, имеющие равномерно второй порядок точности были названы ENO-схемами (essentially nonoscillatory – существенно неколебательные). Эти схемы не обладают нежелательными обрезаящими явлениями, но обладают большими временными затратами по сравнению с TVD-схемами. Это вызвано тем, что ENO-схемы используют более широкий (7-точечный вместо 5-точечного) конечно-разностный шаблон.

I.

Угол наклона s_m^n функции v (6.31) на каждом отрезке задается формулой

$$s_m^n = \text{minimod} \left[\Delta_{m+1/2} - D_{m+1/2}, \Delta_{m-1/2} + D_{m-1/2} \right], \quad (6.43)$$

где величина D характеризует кривизну графика функции v :

$$D_{m+1/2} = \text{minimod} [v_{m+1} - 2v_m + v_{m-1}, v_{m+2} - 2v_{m+1} + v_m].$$

Величина потока на границе вычисляется по формуле

$$f_{m+1/2} = \begin{cases} \frac{F(v_m^n) + a_{m+1/2}(1 - a_{m-1/2}\tau/h)s_m^n/2}{1 + (a_{m+1/2} - a_{m-1/2})\tau/h}, \\ \text{если } a_{m+1/2} \geq 0, \\ \frac{F(v_{m+1}^n) - a_{m+1/2}(1 + a_{m+3/2}\tau/h)s_{m+1/2}^n/2}{1 + (a_{m+1/2} - a_{m-1/2})\tau/h}, \\ \text{если } a_{m+1/2} < 0. \end{cases} \quad (6.44)$$

II.

Коэффициент s_m^n вычисляется по формуле (6.43), а величина потока на границе вычисляется по формуле

$$f_{m+1/2} = \begin{cases} F \left(v_m^n + \frac{1 - (a_{m+1/2} + a_{m+3/2})\tau/(2h) s_m^n}{1 + (a_{m+1/2} - a_{m-1/2})\tau/(2h) 2} \right), \\ \text{если } a_{m+1/2} > 0, \\ F \left(v_{m+1}^n + \frac{1 - (a_{m+1/2} + a_{m+3/2})\tau/(2h) s_{m+1}^n}{1 + (a_{m+3/2} - a_{m+1/2})\tau/(2h) 2} \right), \\ \text{если } a_{m+1/2} \leq 0. \end{cases} \quad (6.45)$$

PPM-схема

По схеме PPM (piecewise-parabolic method - кусочно-параболический метод) ищется кусочно-непрерывная функция v , которая на каждом отрезке $[x_{m-1/2}; x_{m+1/2}]$ является многочленом второй степени, записанным в форме

$$v(x) = v_{m-1/2,R} + \xi [\Delta v_m + v_{6,m}(1 - \xi)], \quad (6.46)$$

где

$$\xi = \frac{x - x_m}{x_{m+1/2} - x_{m-1/2}},$$

$$\Delta v_m = v_{m+1/2,L} - v_{m-1/2,R},$$

$$v_{6,m} = 6[v_m - (v_{m+1/2,L} + v_{m-1/2,R})/2].$$

Для определения значений $v_{m+1/2,L}$ и $v_{m-1/2,R}$ вычислим значения $v_{m+1/2}$ и $v_{m-1/2}$ по формуле

$$v_{m+1/2} = (v_{m+1} + v_m)/2 + (\delta_l v_m - \delta_l v_{m+1})/6, \quad (6.47)$$

где

$$\delta_l v_m = \begin{cases} \min(|\delta v_m|, 2\Delta_{m+1/2}, 2\Delta_{m-1/2})\text{sign}(\delta v_m), \\ \text{если } \Delta_{m+1/2} \cdot \Delta_{m-1/2} > 0, \\ 0, \quad \text{иначе,} \end{cases}$$

6. Удароуправляющие разностные схемы

и

$$\delta v_m = (v_{m+1} - v_{m-1})/2.$$

Замечание 6.1 Если $\delta_1 v_m = \delta v_m$, то величина $v_{m+1/2}$ вычисляется по формуле

$$v_{m+1/2} = \frac{7}{12}(v_{m+1} + v_m) - \frac{1}{12}(v_{m+2} + v_{m+1}).$$

Величины $v_{m+1/2}$ и $v_{m-1/2}$ определяют значения $v_{m+1/2,L}$ и $v_{m-1/2,R}$:

$$v_{m+1/2,L} = v_{m+1/2} \quad \text{и} \quad v_{m-1/2,R} = v_{m-1/2}, \quad (6.48)$$

если функция $v(x)$, задаваемая формулой (6.46), принимает на отрезке $[x_{m-1/2}; x_{m+1/2}]$ значения только между $v_{m+1/2,L}$ и $v_{m-1/2,R}$. Другими словами $v(x)$ должна быть монотонна на отрезке $[x_{m-1/2}; x_{m+1/2}]$. Это свойство будет выполняться в области гладкости искомой функции и, в результате, функция $v(x)$ будет непрерывна в точках $x_{m+1/2}$.

В противном случае значения $v_{m+1/2,L}$ и $v_{m-1/2,R}$ изменяются так, чтобы $v(x)$ стала монотонной функцией на каждом отрезке $[x_{m-1/2}; x_{m+1/2}]$ по следующему правилу.

Обозначим

$$d_1 = v_{m+1/2,L} - v_m \quad \text{и} \quad d_2 = v_{m-1/2,R} - v_m.$$

Тогда изменим значения $v_{m+1/2,L}$ и $v_{m-1/2,R}$, определенные по правилу (6.48), следующим образом:

$$v_{m+1/2,L} = v_m \quad \text{и} \quad v_{m-1/2,R} = v_m, \quad \text{если} \quad -d_1 \cdot d_2 \leq 0,$$

$$v_{m-1/2,R} = 3v_m - 2v_{m+1/2,L}, \quad \text{если} \quad -(d_1^2 - d_2^2) > (d_1 - d_2)^2/3, \quad (6.49)$$

$$v_{m+1/2,L} = 3v_m - 2v_{m-1/2,R}, \quad \text{если} \quad (d_1^2 - d_2^2) > (d_1 - d_2)^2/3. \quad (6.50)$$

7. Теоретическое исследование разностной схемы

Окончательно, поток на границе ячейки вычисляется так:

$$f_{m+1/2} = \begin{cases} F(\tilde{v}_{m+1/2,L}(a_{m+1/2}\tau)), & \text{если } a_{m+1/2} \geq 0, \\ F(\tilde{v}_{m+1/2,R}(-a_{m+1/2}\tau)), & \text{если } a_{m+1/2} < 0, \end{cases} \quad (6.51)$$

где

$$\tilde{v}_{m+1/2,L}(x) = v_{m+1/2,L} - \frac{\xi}{2} \left[\Delta v_m - \left(1 - \frac{2}{3}\xi \right) v_{6,m} \right],$$

при

$$\xi = \frac{x - x_m}{x_{m+1/2} - x_{m-1/2}},$$

и

$$\tilde{v}_{m+1/2,R}(x) = v_{m+1/2,R} + \frac{\xi}{2} \left[\Delta v_{m+1} + \left(1 - \frac{2}{3}\xi \right) v_{6,m+1} \right],$$

при

$$\xi = \frac{x - x_{m+1}}{x_{m+3/2} - x_{m+1/2}}.$$

7 Теоретическое исследование разностной схемы

Прежде чем проводить численные расчеты задачи необходимо провести как можно более полное теоретическое исследование разностного метода. Результаты такого исследования помогут сделать априорные оценки точности, границ применимости данного метода и выбрать наиболее оптимальные параметры для численного эксперимента.

Проведем такое исследование на примере разностной схемы

$$v_t + (v^2)_{\bar{x}} = 0, \quad (7.1)$$

предназначенной для приближенного решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} = 0. \quad (7.2)$$

7. Теоретическое исследование разностной схемы

Решение уравнения (7.2) требуется найти в области

$$P_T = \{(t, x) \mid 0 < t < 1, -\infty < x < +\infty\},$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x < 0, \\ 1 - x & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{при } x > 1. \end{cases} \quad (7.3)$$

7.1 Аппроксимация

Изучим вопрос о порядке аппроксимации разностной схемы (7.1) уравнения (7.2) на гладких решениях этого уравнения. Для этого предположим, что функция $u = u(t, x)$ удовлетворяет уравнению (7.2) и дважды дифференцируема по обоим переменным при $t \geq 0$. Подставим проекцию на сетку этой функции в разностное уравнение (7.1). В результате получим некоторую сеточную функцию, которую обозначим ϕ :

$$\phi_m^n \equiv u_t + (u^2)_{\bar{x}} \equiv \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{(u_m^n)^2 - (u_{m-1}^n)^2}{h}. \quad (7.4)$$

Функция ϕ в общем случае отлична от нуля и решение поставленного вопроса сводится к установлению порядка значений функции ϕ в зависимости от шагов сетки τ и h для гладких функций u .

Введем новую функцию

$$g(t, x) = u^2(t, x). \quad (7.5)$$

Поскольку функция g является композицией двух гладких функций, то она дважды дифференцируема по переменной x при $t \geq 0$. Представим значения функций u в узле $(n+1, m)$ и g в узле $(n, m-1)$ в виде разложения в ряд Тейлора в узле (n, m)

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \tau \dot{u}_m^n + \underline{O}(\tau^2),$$

7.2. Дифференциальное приближение

$$g_{m-1}^n = g_m^n - h (g')_m^n + \underline{\underline{O}}(h^2).$$

Здесь и ниже для сокращения записи выкладок мы будем использовать следующие обозначения для частных производных функции $f = f(t, x)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \dot{f}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = f'$$

и естественные их комбинации

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} = \dot{f}'$$

и т.д.

Подставляя полученные выражения в (7.4), получим

$$\begin{aligned} \phi_m^n &= \dot{u}_m^n + \underline{\underline{O}}(\tau) + (g')_m^n + \underline{\underline{O}}(h) = \\ &= \frac{\partial u(n\tau, mh)}{\partial t} + \frac{\partial u^2(n\tau, mh)}{\partial x} + \underline{\underline{O}}(\tau + h). \end{aligned}$$

Первые два слагаемых в сумме дают ноль, поскольку функция u является точным решением уравнения (7.2). Следовательно, функция ϕ имеет порядок $\underline{\underline{O}}(\tau + h)$, или, по другому говоря, разностная схема (7.1) аппроксимирует уравнение (7.2) с первым порядком аппроксимации.

7.2 Дифференциальное приближение

Пусть разностное решение v^h является проекцией на сетку гладкой функции v . Функция v в общем случае не удовлетворяет дифференциальному уравнению, которое аппроксимирует разностная схема.

Определение. Дифференциальное уравнение, решением которого является функция v , называют дифференциальным приближением разностной схемы.

7. Теоретическое исследование разностной схемы

Как правило, дифференциальное приближение содержит бесконечное число членов, в каждый из которых входит производная функции v с коэффициентом, зависящим от шагов сетки. Чем выше порядок производной, тем выше порядок малости по τ и h этого члена. На практике дифференциальное приближение обычно выписывают до членов порядка $\underline{\underline{O}}(\tau^n + h^m)$, потому что, как будет видно из дальнейшего, именно члены с наименьшим порядком по τ и h вносят наибольшее возмущение в функцию v , по сравнению с точным решением дифференциальной задачи. Более того, дифференциальное приближение стараются выписывать в таком виде, чтобы в дополнительные по сравнению с исходным дифференциальным уравнением члены не входили частные производные по временной переменной, что более удобно для анализа характера вносимых возмущений.

Выведем для примера дифференциальное приближение линеаризованной разностной схемы (7.1)

$$v_t + av_{\bar{x}} = 0 \quad (7.6)$$

с точностью до членов порядка $\underline{\underline{O}}(\tau^3 + h^3)$.

Поскольку функция v по предположению является гладкой, то подставим в (7.6) вместо v_m^{n+1} и v_{m-1}^n их выражения в виде рядов Тейлора, с центром разложения в узле (n, m) , с точностью разложения до $\underline{\underline{O}}(\tau^4)$ и $\underline{\underline{O}}(h^4)$ соответственно. В результате получим

$$\frac{1}{\tau} \left(\left[v + \tau \dot{v} + \frac{\tau^2}{2} \ddot{v} + \frac{\tau^3}{6} \dddot{v} + \underline{\underline{O}}(\tau^4) \right] - v \right) + \frac{a}{h} \left(v - \left[v - hv' + \frac{h^2}{2} v'' - \frac{h^3}{6} v''' + \underline{\underline{O}}(h^4) \right] \right) = 0. \quad (7.7)$$

После несложных преобразований уравнение (7.7) приводится к виду

$$\dot{v} + av' = -\frac{\tau}{2} \ddot{v} + \frac{ah}{2} v'' - \frac{\tau^2}{6} \ddot{v} - \frac{ah^2}{6} v''' + \underline{\underline{O}}(\tau^3 + h^3). \quad (7.8)$$

7.2. Дифференциальное приближение

В левой части последнего равенства записано исходное волновое уравнение, которое аппроксимирует разностная схема (7.6), а в правой — погрешность аппроксимации, которая в общем случае отлична от нуля. Далее производные по времени, входящие в погрешность аппроксимации, заменяются производными по пространственной переменной с требуемой точностью. Для этого выразим производную \ddot{v} через производную по x . Дифференцируя (7.8) по времени, получаем

$$\ddot{v} + a\dot{v}' = -\frac{\tau}{2}\ddot{v} + \frac{ah}{2}\dot{v}'' - \frac{\tau^2}{6}\ddot{v}' - \frac{ah^2}{6}\dot{v}''' + \underline{\underline{O(\tau^3 + h^3)}}, \quad (7.9)$$

а дифференцируя (7.8) по x и умножая на $-a$, находим

$$-a\dot{v}' - a^2v'' = \frac{a\tau}{2}\ddot{v}' - \frac{a^2h}{2}v''' + \frac{a\tau^2}{6}\ddot{v}'' + \frac{a^2h^2}{6}v'''' + \underline{\underline{O(\tau^3 + h^3)}}. \quad (7.10)$$

Складывая (7.9) и (7.10), получаем

$$\ddot{v} = a^2v'' + \tau \left(\frac{-\ddot{v}}{2} + \frac{a}{2}\ddot{v}' + \underline{\underline{O(\tau)}} \right) + h \left(\frac{a}{2}\dot{v}'' - \frac{a^2}{2}v''' + \underline{\underline{O(h)}} \right). \quad (7.11)$$

Аналогично можно получить следующие выражения для производных \ddot{v} , \ddot{v}' , \dot{v}'' :

$$\begin{aligned} \ddot{v} &= -a^3v''' + \underline{\underline{O(\tau + h)}}, \\ \ddot{v}' &= a^2v''' + \underline{\underline{O(\tau + h)}}, \\ \dot{v}'' &= -av''' + \underline{\underline{O(\tau + h)}}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Заменяя в правой части уравнения (7.8) производные по временной переменной на производные по пространственной переменной по формулам (7.11) и (7.12), получаем

$$\dot{v} + av' = \frac{ah}{2}(1 - \nu)v'' - \frac{ah^2}{6}(2\nu^2 - 3\nu + 1)v''' + \underline{\underline{O(\tau^3 + h^3)}}, \quad (7.13)$$

где $\nu = a\tau/h$. Уравнение (7.13) и называют дифференциальным приближением разностной схемы (7.6) с точностью до членов порядка $\underline{\underline{O(\tau^3 + h^3)}}$.

7. Теоретическое исследование разностной схемы

Подчеркнем, что для исключения производных по времени высших порядков необходимо использовать именно уравнение, получающееся после подстановки разложения в ряд Тейлора в разностное уравнение, (в нашем примере это уравнение (7.8)), а не исходное уравнение в частных производных, для решения которого предназначена разностная схема (для данного примера — волнового уравнения). Это связано с тем, что решение исходного уравнения в общем случае не является решением разностного уравнения, а дифференциальное приближение следует из разностного уравнения. Поэтому исходное уравнение в частных производных не должно использоваться для исключения производных по времени.

7.3 Диссипативные и дисперсионные свойства

При использовании метода конечных разностей решается на самом деле уравнение, являющееся дифференциальным приближением разностной схемы, а не исходное уравнение в частных производных. Следовательно, проанализировав дифференциальное приближение разностной схемы, можно определить основные качественные свойства разностного решения. Коротко опишем основную идею такого анализа.

Решением простейшего волнового уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (7.14)$$

с начальным условием

$$u(0, x) = e^{ikx} \quad (7.15)$$

является волна

$$u(t, x) = e^{i(\omega t + kx)}, \quad (7.16)$$

где $\omega = -ak$.

Линейное уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (7.17)$$

7.3. Диссипативные и дисперсионные свойства

с начальным условием (7.15) имеет решение в виде волны (7.16), где

$$\omega = -ak + i\mu k^2$$

. Следовательно, частота колебаний по времени решения уравнения (7.17) осталась такой же, как и у решения уравнения (7.14), а амплитуда волны стала зависеть от числа μ : при $\mu > 0$ амплитуда волны с увеличением времени затухает, а при $\mu < 0$ — возрастает. Более того, при $\mu < 0$ задача Коши в полуплоскости $t > 0$ для уравнения (7.17) с начальным условием (7.15) является некорректной.

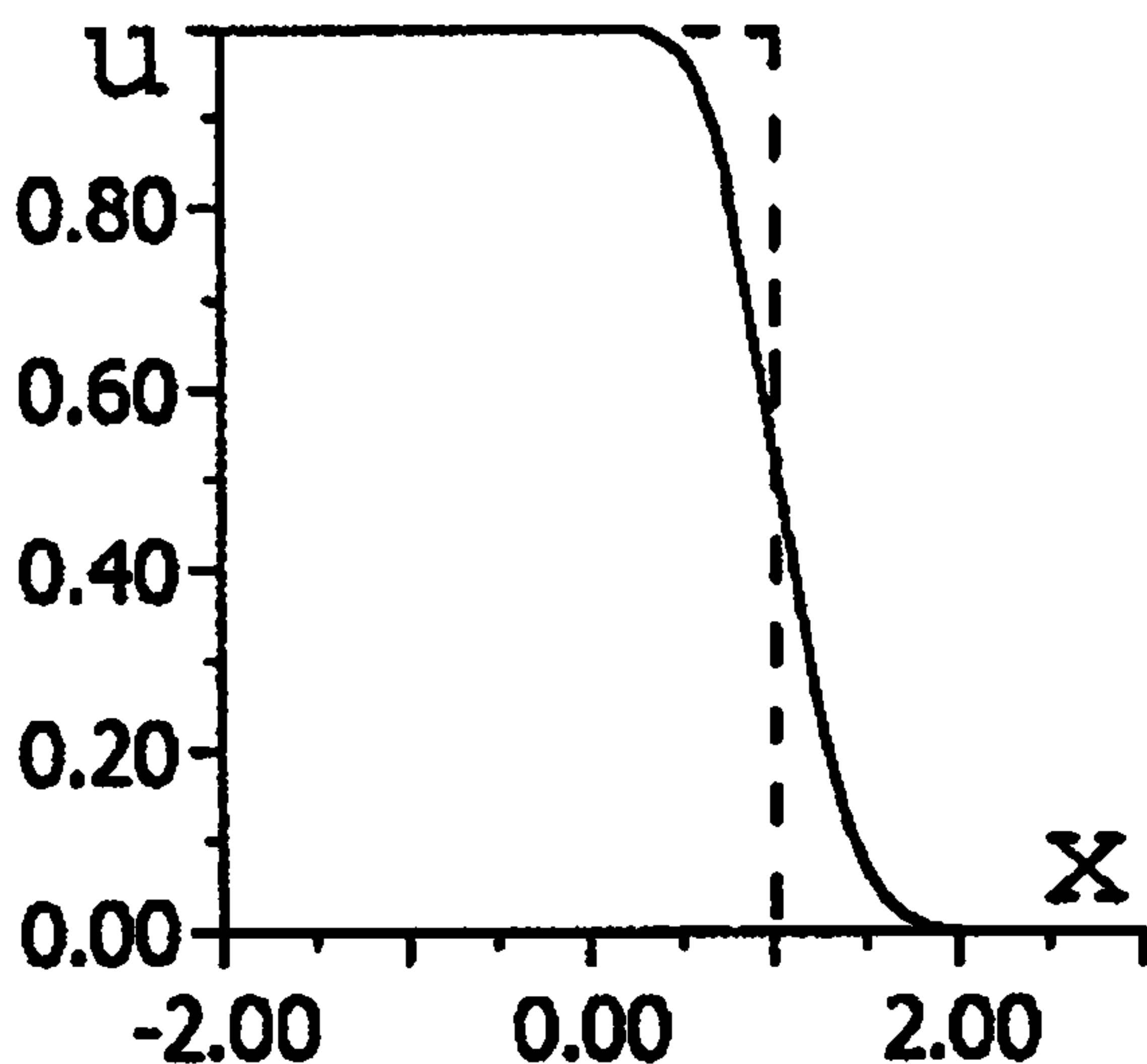


Рис. 1.

Обратимся теперь к рассмотрению линейного уравнения Кортвега-де-Фриза

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \xi \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}. \quad (7.18)$$

Его решением с начальным условием (7.15) является волна (7.16), у которой

$$\omega = -ak - \xi k^3$$

. Такая волна не меняет своей амплитуды с течением времени, но частота колебаний по времени зависит по другому закону, чем у решения уравнения (7.14).

7. Теоретическое исследование разностной схемы

Аналогичные выводы можно сделать и для уравнений, содержащих производные по пространственной переменной более высокого порядка: производные четного порядка определяют изменение амплитуды волны, а нечетного порядка частоту колебаний по времени.

Таким образом, неявная замена при использовании метода конечных разностей решаемого уравнения уравнением, содержащим старшие производные по пространственным переменным, приводит к качественным изменениям у получаемых решений по сравнению с решениями исходной задачи. Безусловно, наибольший вклад в изменение решения вносит тот член дифференциального приближения, не входящий в исходное уравнение, который имеет наименьший порядок малости в зависимости от шагов разностной сетки.

Проиллюстрируем сказанное выше на примере разностной схемы (7.6). Пусть с ее помощью рассчитывается задача о распространении волны, описываемой уравнением (7.14) при $a = 1$ и начальным условием

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x > 0. \end{cases} \quad (7.19)$$

Точное решение этой задачи задается формулой

$$u(t, x) = u_0(x - t); \quad (7.20)$$

иными словами, профиль точного решения не будет меняться с ростом t , а будет лишь сдвигаться вправо со скоростью $a = 1$.

Решение же разностной схемы (7.6) при $\tau/h < 1$ будет тоже иметь профиль, сдвигающийся вправо со скоростью $a = 1$, но который будет постепенно сглаживаться (рис. 1). Это объясняется наличием в дифференциальном приближении этой схемы члена со второй производной по пространственной переменной, который играет роль гасителя амплитуд волн вида (7.16), из которых состоит решение (7.20), поскольку

$$\mu = \frac{ah}{2}(1 - \tau/h) > 0.$$

7.3. Диссипативные и дисперсионные свойства

Следовательно, схема (7.6) при $\nu \neq 1$ неявно вводит в уравнение искусственную вязкость, которую часто называют неявной (схемной) искусственной вязкостью в отличие от явной искусственной вязкости, которая преднамеренно вводится в некоторых схемах в разностное уравнение. Искусственная вязкость сглаживает решение уравнения, уменьшая градиенты всех параметров независимо от причины возникновения этих градиентов, физической или вычислительной. Такое свойство разностной схемы, обусловленное наличием в выражении для погрешности аппроксимации производных четного порядка, называют диссипацией на разностной сетке. Воздействие диссипации приводит к растяжению крутых линий раздела, которые могут появляться в расчетной области.

Дифференциальное приближение разностной схемы (7.6) содержит также член с третьей производной по пространственной переменной, но он более высокого порядка малости по шагам разностной сетки, поэтому его роль практически не видна. Проиллюстрировать вклад члена с нечетной производной по пространственной переменной можно на примере следующей схемы

$$v_t + av_x = \frac{\tau a}{2} v_{x\bar{x}}. \quad (7.21)$$

Ее дифференциальное приближение имеет вид

$$\dot{v} + av' = -\frac{ah^2}{6}(1 - \nu^2)v''' - \frac{ah^3\nu}{8}(1 - \nu^2)v'''' + \dots \quad (7.22)$$

При расчете задачи (7.14), (7.19) по схеме (7.21) (естественно при выполнении условия устойчивости $\tau/h < 1$) получается разностное решение, имеющее характерные осцилляции на фоне точного решения (7.20) (рис. 2). Это объясняется тем, что главным членом, вносящим погрешность в численное решение, является первое слагаемое из правой части (7.22). Этот член является третьей производной по пространственной переменной, т.е. не влияет на величину амплитуды волн, из которых состоит разностное

7. Теоретическое исследование разностной схемы

решение, зато частота колебаний по времени у них оказывается разной и происходит явление, аналогичное явлению дифракции. Такое явление, связанное с производными нечетного порядка в дифференциальном приближении, называют дисперсией. Дисперсия приводит к искажению соотношения фаз различных волн.

Обычно, если главный член в выражении для погрешности аппроксимации содержит производную четного порядка, то схема обладает в основном диссипативными свойствами, а если производную нечетного порядка — то дисперсионными.

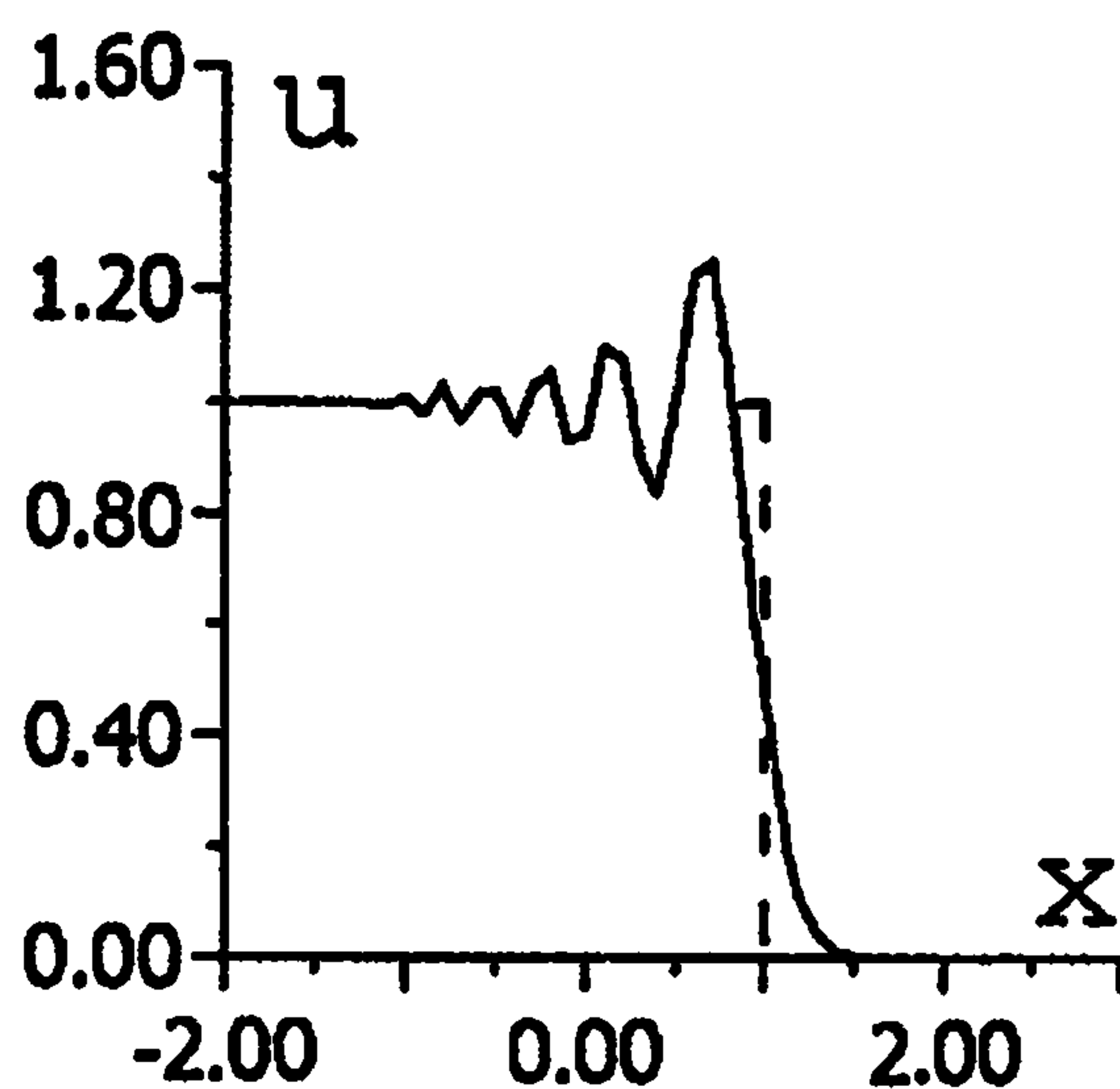


Рис. 2.

Оценим ширину размазывания разностной схемы (7.6) следуя [9]. Возьмем начальные данные вида

$$v_m^0 = \begin{cases} 1 & \text{при } m = 0, \\ 0 & \text{при } m \neq 0 \end{cases} \quad (7.23)$$

и посмотрим, как их преобразует схема (7.6).

Непосредственной проверкой можно убедиться, что интересующее нас решение имеет вид

$$v_m^n = \begin{cases} C_n^{n-m} \nu^m (1 - \nu)^{n-m} & \text{при } 0 \leq m < n, \\ 0 & \text{при остальных } m. \end{cases} \quad (7.24)$$

7. Теоретическое исследование разностной схемы

(рис. 4). С течением времени t область размазывания расширяется пропорционально \sqrt{t} . Решение разностных уравнений с начальными данными в виде "ступеньки" (7.19) можно получить суммированием специальных решений такого вида, как мы только что изучили.

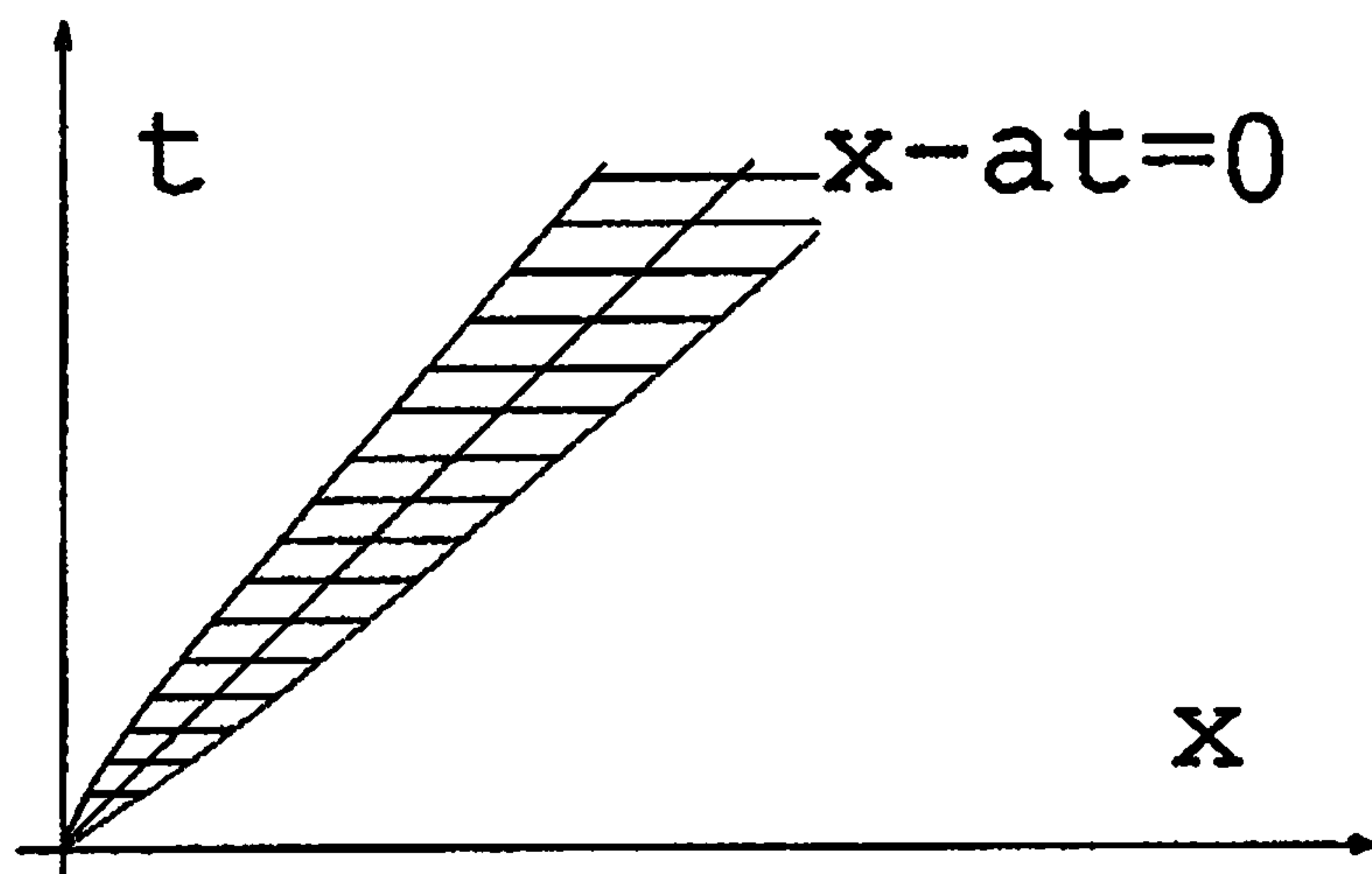


Рис. 4.

На рисунке 5 сравниваются результаты расчета задачи (7.14), (7.19) с шагом $h = 0.1$ и $h = 0.025$ при $\nu = 0.1$ в один и тот же момент времени $t = 1$. Как видно из рисунка 5, геометрическая протяженность зоны "размазывания" уменьшилась с уменьшением шага h в 4 раза примерно вдвое.

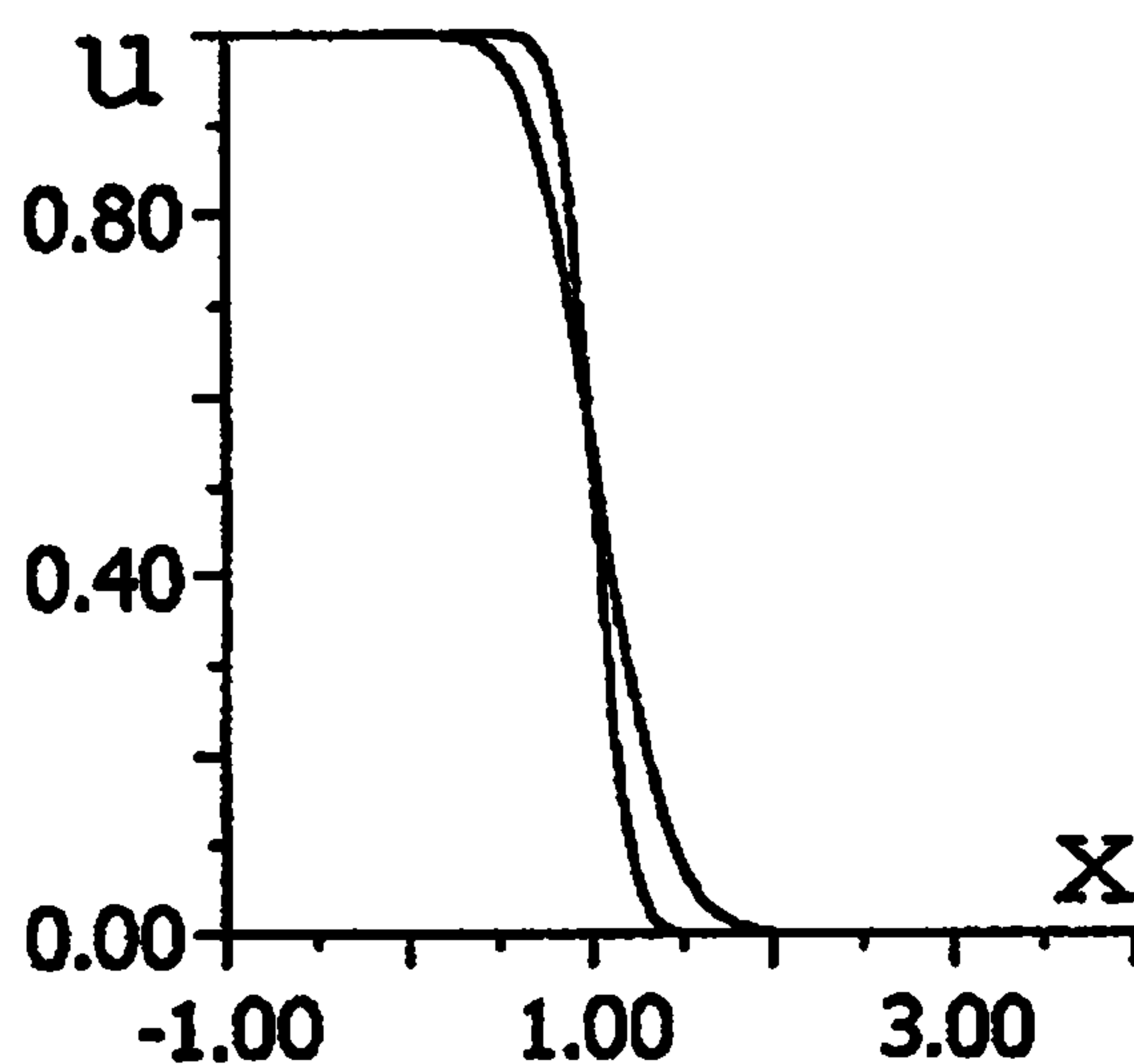


Рис. 5.

Заметим также, что при величине числа Куранта $\nu = 1$ формула (7.26) дает для ширины зоны размазывания значение $H = 0$, что подтверждается численным экспериментом, в котором схема воспроизводит точное решение.

7.4 Устойчивость

Используем для анализа устойчивости по начальным данным исследуемой разностной схемы спектральный признак устойчивости и принцип замороженных коэффициентов [4, 10].

Напомним формулировку спектрального признака устойчивости. Пусть на сетке с узлами (n, m) — точками $(t_n, x_m) = (n\tau, mh)$ — построена некоторая аппроксимация, например вида

$$L_{\tau, h} v |_{n, m} = \sum_{l, k} a_l^k v_{m+l}^{n+k} = 0;$$

выпишем все частные решения уравнения $L_{\tau, h} v_h = 0$, имеющие вид

$$v_m^n = (\lambda(\varphi))^n e^{im\varphi}. \quad (7.27)$$

Спектральный признак устойчивости (СПУ).

Если при заданном законе стремления шагов τ и h к нулю существует $C < \infty$, не зависящее от шагов сетки, такое, что

$$|\lambda(\varphi)| \leq e^{C\tau} \quad \text{для любых } \varphi, \quad (7.28)$$

то разностная схема может быть применена для численного решения соответствующей задачи Коши.

В противном случае от применения разностной схемы следует воздержаться.

Применим этот признак для исследования устойчивости линеаризации разностной схемы (7.1)

$$v_t + av_{\bar{x}} = 0 \quad (7.29)$$

7. Теоретическое исследование разностной схемы

по начальным данным, где a — некоторая константа.

Определим зависимость $\lambda = \lambda(\varphi)$, при которой функция (7.27) является решением разностной схемы (7.29). Для этого подставим в это уравнение $v_m^n = (\lambda(\varphi))^n e^{im\varphi}$:

$$\frac{\lambda^{n+1}(\varphi)e^{im\varphi} - \lambda^n(\varphi)e^{im\varphi}}{\tau} + a \frac{\lambda^n(\varphi)e^{im\varphi} - \lambda^n(\varphi)e^{i(m-1)\varphi}}{h} = 0.$$

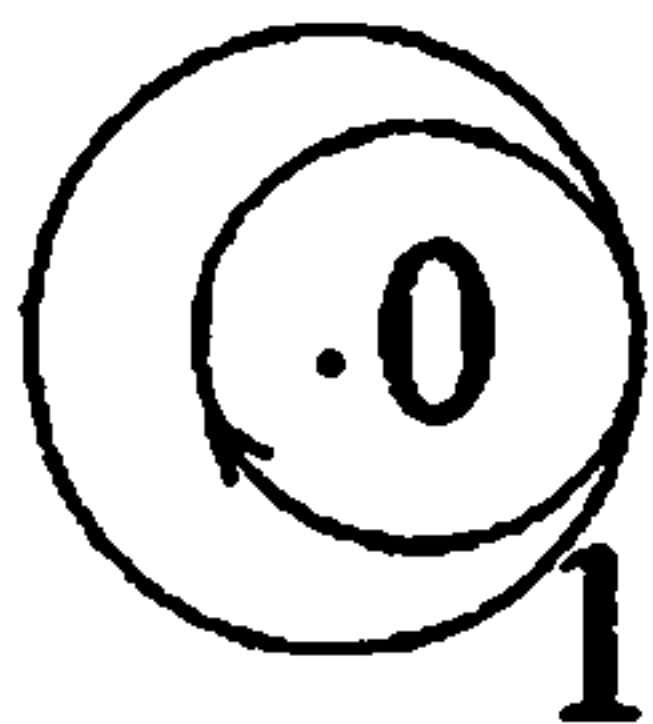
После сокращения на $\lambda^n(\varphi)e^{im\varphi}$ получим

$$\frac{\lambda(\varphi) - 1}{\tau} + a \frac{1 - e^{-i\varphi}}{h} = 0.$$

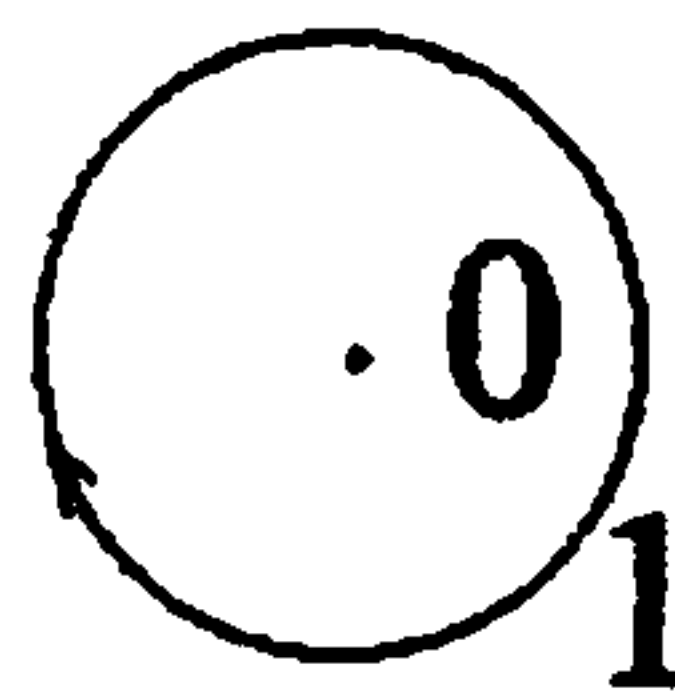
Откуда заключаем, что

$$\lambda(\varphi) = 1 - \frac{\tau a}{h}(1 - e^{-i\varphi}).$$

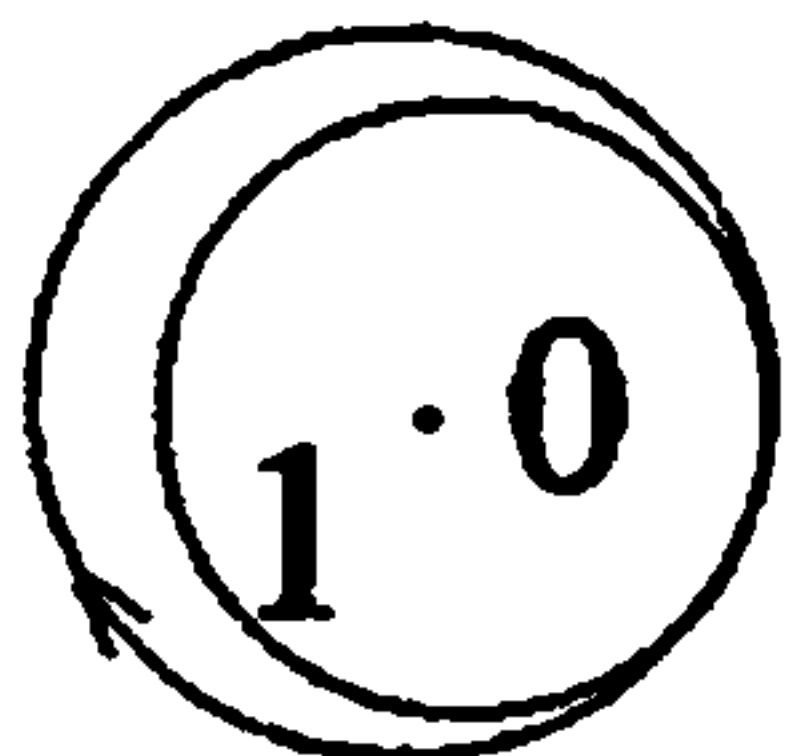
$$0 < a\tau/h < 1$$



$$a\tau/h = 1$$



$$a\tau/h > 1$$



$$a\tau/h < 0$$

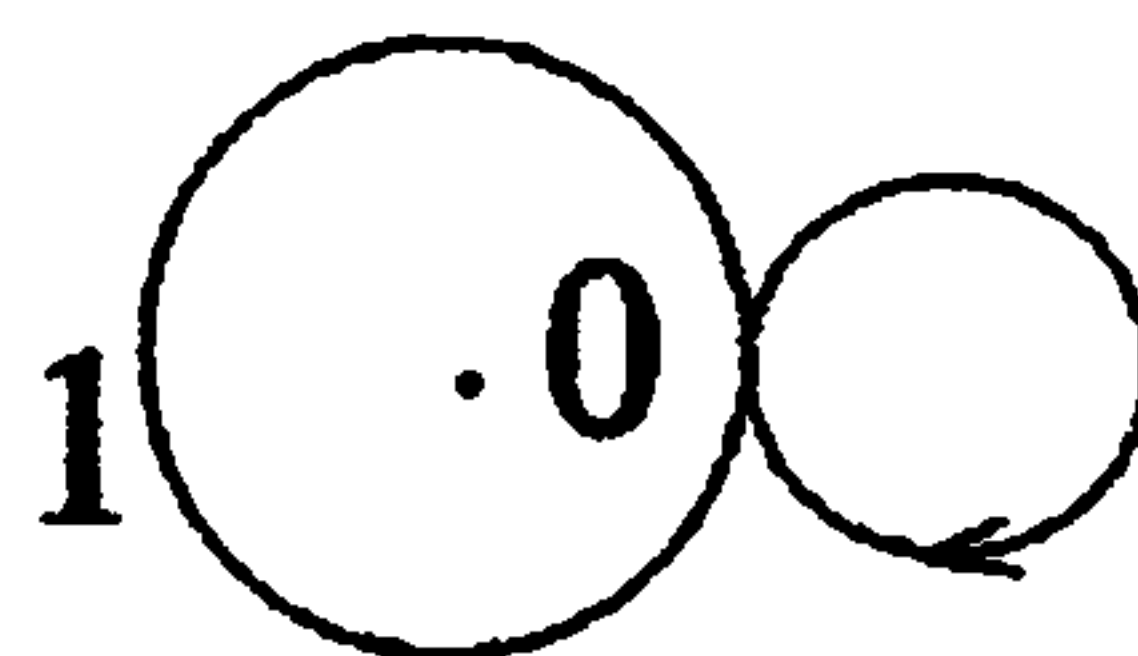


Рис. 6.

Уравнение для λ в зависимости от угла φ описывает на комплексной плоскости окружность с центром в точке $(1 - \frac{\tau a}{h}, 0)$ и радиусом $\frac{\tau|a|}{h}$ (рис. 6). Необходимое условие устойчивости (7.28) будет выполнено, если эта окружность целиком лежит внутри единичной окружности с центром в начале координат. Это условие

7.4. Устойчивость

накладывает следующие ограничения на шаги сетки и параметр a

$$0 \leq \frac{\tau a}{h} \leq 1. \quad (7.30)$$

Напомним, что условия, получаемые по спектральному признаку, являются лишь необходимыми условиями устойчивости разностной схемы. Однако в рассматриваемом случае можно доказать, что условия (7.30) являются также достаточными условиями устойчивости.

Для анализа устойчивости разностной схемы (7.1) в исходной нелинейной постановке используем принцип замороженных коэффициентов (ПЗК) [4]. Он состоит в следующем.

1. Для разностной схемы выписывается уравнение в вариациях (т.е. уравнение, которому удовлетворяет разность двух бесконечно близких решений). Это уравнение является линейным и в случае линейных задач совпадает с исходным уравнением.

2. Фиксируется некоторая точка P в области G , в которой ищется решение, замораживаются коэффициенты этого уравнения, т.е. все значения коэффициентов уравнения в вариациях берутся равными их значениям в этой точке. Если задача нелинейная, то коэффициенты уравнения в вариациях зависят от неизвестной функции и все значения сеточного решения, входящие в это уравнение, берутся равными их значениям в этой же точке P .

3. Получившаяся сеточная задача $L_h^P(\delta v) = 0$ исследуется на устойчивость методами, которые применяются для исследования устойчивости сеточных задач с постоянными коэффициентами.

Предположим, что сеточная задача устойчива при выполнении условия

$$\varphi(h, P) \geq 0 \quad (7.31)$$

на шаги сетки; это условие, естественно может зависеть от выбора точки P .

4. За условие устойчивости принимают некоторое условие $\varphi \geq 0$, из выполнения которого следует выполнение условия $\varphi(h, P) \geq 0$ для всех точек $P \in G$. Часто, особенно в случае нелинейных

7. Теоретическое исследование разностной схемы

задач, условие устойчивости $\varphi(h) \geq 0$ выбирается с некоторым "запасом устойчивости".

Применим этот принцип для изучения устойчивости разностной схемы (7.1). Перепишем уравнение (7.1) в виде

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + \frac{(v_m^n)^2 - (v_{m-1}^n)^2}{h} = 0. \quad (7.32)$$

Пусть $w_m^n = v_m^n + \delta_m^n$ — другое решение сеточной задачи (7.32), т.е. δ_m^n — разность между двумя решениями задачи (7.32). Имеем равенство (получаемое при подстановке w_m^n в (7.32)):

$$\frac{(v_m^{n+1} + \delta_m^{n+1}) - (v_m^n + \delta_m^n)}{\tau} + \frac{(v_m^n + \delta_m^n)^2 - (v_{m-1}^n + \delta_{m-1}^n)^2}{h} = 0.$$

Вычитая из этого равенства соотношение (7.32), получим

$$\frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^n}{\tau} + \frac{(v_m^n + \delta_m^n)^2 - (v_m^n)^2}{h} - \frac{(v_{m-1}^n + \delta_{m-1}^n)^2 - (v_{m-1}^n)^2}{h} = 0. \quad (7.33)$$

С точностью до членов второго порядка малости по величинам δ_m^n и δ_{m-1}^n выполнены приближенные равенства

$$(v_m^n + \delta_m^n)^2 - (v_m^n)^2 \approx 2v_m^n \delta_m^n,$$

$$(v_{m-1}^n + \delta_{m-1}^n)^2 - (v_{m-1}^n)^2 \approx 2v_{m-1}^n \delta_{m-1}^n.$$

Таким образом, с точностью до величин $O((\delta_m^n)^2/h)$ бесконечно малое приращение решения δ_m^n , его так называемая вариация, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^n}{\tau} + \frac{2v_m^n \delta_m^n - 2v_{m-1}^n \delta_{m-1}^n}{h} = 0,$$

которое называют уравнением в вариациях для (7.33).

7.5. Условие монотонности

Заморозим коэффициенты $2v_m^n$ и $2v_{m-1}^n$, взяв их значениями в некоторой точке. В результате получим

$$\frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^n}{\tau} + a \frac{\delta_m^n - \delta_{m-1}^n}{h} = 0, \quad (7.34)$$

где $a = 2v_m^n$ и номер узла m может быть любым.

Применяя для исследования устойчивости уравнения (7.34) спектральный признак устойчивости, получаем, что задача устойчива по начальным данным, если коэффициент a и шаги сетки удовлетворяют условию (7.30). В соответствии с ПЗК заключаем, что исходная разностная схема (7.1) должна быть устойчива при условии

$$0 \leq 2v_m^n \frac{\tau}{h} \leq 1. \quad (7.35)$$

7.5 Условие монотонности

Обратим внимание на плавную форму размазанных разрывов при расчете по разностной схеме (7.6). Это объясняется тем, что данная разностная схема удовлетворяет условию монотонности.

Определение 7.1 *Разностная схема называется монотонной, если она переводит все монотонные функции в монотонные с тем же направлением роста.*

В работе [8] доказан критерий монотонности для простейших разностных схем.

Теорема 7.1 *Для того чтобы разностная схема вида*

$$\hat{v}_m = \sum_k a_{k-m} v_m \quad (7.36)$$

была монотонной, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты a_{k-m} были неотрицательны.

7. Теоретическое исследование разностной схемы

Доказательство. Пусть $a_k \geq 0$ и $\{v_m\}$ монотонна. Для определенности допустим, что $\{v_m\}$ возрастает, т.е. что все $v_m - v_{m-1}$ неотрицательны. Тогда

$$\begin{aligned}\hat{v}_m - \hat{v}_{m-1} &= \sum_k a_{k-m} v_m - \sum_k a_{k-m+1} v_m = \\ &= \sum_k a_{k-m} v_m - \sum_k a_{k-m} v_{m-1} = \sum_k a_{k-m} (v_m - v_{m-1}),\end{aligned}$$

т.е.

$$\hat{v}_m - \hat{v}_{m-1} \geq 0.$$

Таким образом, достаточность условия доказана.

Докажем необходимость. Пусть, например, $a_{k_0} < 0$. Положим

$$v_m^n = \begin{cases} 1 & \text{при } m \geq k_0, \\ 0 & \text{при } m < k_0. \end{cases}$$

Тогда

$$\hat{v}_0 - \hat{v}_{-1} = a_{k_0} < 0,$$

что невозможно, если предполагать, что схема является монотонной.

Для монотонных схем легко обосновывается устойчивость. В самом деле, если все ее коэффициенты $a_k \geq 0$ и, кроме того,

$$\sum_k a_k = 1, \quad (7.37)$$

то

$$\max_m |\hat{v}_m| < \sum_k |a_{k-m}| \cdot \max_m |v_m|. \quad (7.38)$$

При наших предположениях о монотонности схем вида (7.36) и справедливости условия (7.37), из неравенства (7.38) получаем неравенство

$$\max_m |\hat{v}_m| < \max_m |v_m|,$$

7.5. Условие монотонности

которое и означает устойчивость. Условие (7.37) является довольно естественным для схем, аппроксимирующих многие дифференциальные уравнения, и означает, что решение уравнений $u = \text{const}$ является также решением и разностных уравнений (7.36).

В работе [8] доказано, что среди линейных разностных схем второго порядка точности для уравнения (7.14) нет схемы, удовлетворяющей условию монотонности. Поэтому при проведении расчета по схеме второго порядка могут получаться графики решения примерно такого вида, как на рис. 2. На нем изображен результат, полученный при расчете задачи (7.14), (7.19) по разностной схеме "тренога", аппроксимирующей его со вторым порядком точности. График соответствует времени $t = 1$ и получен при $h = 0.1$, $a = 1$ и $\nu = 0.1$. Приведенный график показывает, что при применении таких схем в случаях, когда число ν мало (в квазилинейных задачах, как правило, дело обстоит именно так), необходимы специальные меры по подавлению возникающих осцилляций (явления Гиббса). Заметим, что кривая, изображенная на рис. 1, является графиком сеточной функции при $t = 1$, полученной по схеме (7.29) при тех же параметрах $h = 0.1$, $a = 1$ и $\nu = 0.1$.

Способами борьбы с явлением Гиббса являются введение в разностные уравнения дополнительных членов, называемых искусственной вязкостью, или принудительное сглаживание результатов. К последним можно отнести и построение симметричных чебышевских фильтров [17]. В этой работе приведены результаты успешного подавления высокочастотных членов разложения сеточного решения в гармонический ряд Фурье для разрывного решения этим способом. Другой подход к этой проблеме состоит в построении нелинейных разностных методов для расчета разрывных решений. Примеры таких схем описаны в разделе 6.

7.6 Выводы

Разностная схема (7.1) может быть использована для нахождения приближенного решения уравнения (7.2) при условии, что шаги сетки удовлетворяют условию устойчивости (7.35). При этом при вычислениях гладких решений на основании теоремы Филиппова [4] о связи аппроксимации, устойчивости и сходимости будет выполнена оценка между точным и приближенным решениями порядка $\underline{O}(\tau + h)$, что должно подтверждаться расчетами тестовых примеров. При расчетах разрывных решений изученная разностная схема будет иметь диссипативный характер.

8 Оценки точности разностных решений

Для сравнения двух сеточных функций требуется задать способ оценки их разности, иными словами определить норму сеточной функции. Это можно сделать многими способами. Приведем несколько из них, являющихся наиболее распространенными:

$$\|v\|_{C_h} = \max_{x_i \in \omega_h} |v_i|; \quad \|v\|_{L_{1,h}} = h \sum_{x_i \in \omega_h} |v_i|;$$

$$\|v\|_{L_{2,h}} = \sqrt{h \sum_{x_i \in \omega_h} v_i^2}; \quad \|v\|_{W_{2,h}^1} = \sqrt{\|v\|_{L_{2,h}}^2 + \|v_x\|_{L_{2,h}}^2}.$$

Заметим, что при определении последней нормы используется разностная производная функции v , определенная не во всех узлах сетки ω_h . Поэтому норма $\|v_x\|_{L_{2,h}}$ вычисляется только по тем узлам, где может быть определена функция v_x .

В вычислительной практике получили широкое распространение нормы, которые порождаются самосопряженными положительными операторами, действующими в пространстве сеточных функций, заданных на сетке ω_h . Обозначим такой оператор A и

8. Оценки точности разностных решений

введем скалярное произведение сеточных функций

$$(v, u) = \sum_{x_i \in \omega_h} h v_i u_i.$$

Тогда норма функции, задаваемая оператором A , может быть введена следующим образом

$$\|v\|_A = \sqrt{(Av, v)}.$$

Очевидно, что норма $\|v\|_{L_{2,h}}$ является нормой единичного оператора в вышеуказанном смысле. Более содержательным примером нормы $\|v\|_A$ является норма, порожденная оператором Лапласа с однородным граничным условием первого рода. Для простоты опишем одномерный случай. В этом случае сетка

$$\omega_h = \{mh \mid m = M_{\min}, \dots, M_{\max}\},$$

а оператор L действует по правилу

$$Lv = \begin{cases} 0, & m = M_{\min}; \\ v_{x\bar{x},m}, & M_{\min} < m < M_{\max}; \\ 0, & m = M_{\max}. \end{cases}$$

При этом рассматриваются функции, равные нулю на границе сетки. Можно показать [4, 21], что в этом случае

$$\|v\|_L = \|v_x\|_{L_{2,h}}.$$

Другим важным примером нормы, связанной с введенным оператором L , является норма

$$\|v\|_{L^{-1}} = \sqrt{(L^{-1}v, v)}.$$

Можно показать [21], что в одномерном случае

$$\|v\|_{L^{-1}} = \left(\sum_{m=M_{\min}}^{M_{\max}} h \left(\sum_{i=M_{\min}}^m h v_i \right)^2 \right)^{1/2}.$$

8. Оценки точности разностных решений

Часто эту норму обозначают просто $\|v\|_{-1}$.

Такое разнообразие норм объясняется сложностью и многообразием решаемых задач. В зависимости от качественных свойств задачи следует выбирать нормы, в которых будет производиться оценка точности решения. Вопрос этот не простой и решается для каждой задачи отдельно. Изучение этого вопроса можно начать по учебникам [4, 10, 21]. Для рассматриваемой в практикуме задачи для квазилинейного уравнения первого порядка наиболее подходящими нормами являются нормы $\|v\|_{C_h}$ и $\|v\|_{L_{1,h}}$.

Обратим внимание еще на один вопрос, связанный с выбором норм. Хорошо известно утверждение, что в конечномерном пространстве, а пространство сеточных функций как раз конечномерное, все нормы эквивалентны, т. е. для любых двух норм $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$ существуют такие константы γ_1 и γ_2 , что для любой функции v верно неравенство

$$\gamma_1 \|v\|_\alpha \leq \|v\|_\beta \leq \gamma_2 \|v\|_\alpha.$$

Но дело в том, что в общем случае константы эквивалентности γ_1 и γ_2 могут зависеть от размерности пространства, или другими словами от шагов сетки. Поэтому разностное решение может сходиться к точному в одной норме и не сходиться в другой.

Будем говорить, что $\|\cdot\|_\alpha$ сильнее $\|\cdot\|_\beta$, если $\|\cdot\|_\beta \leq \gamma \|\cdot\|_\alpha$, где константа γ не зависит от размерности пространства. Таким образом, если $\|\cdot\|_\alpha$ сильнее $\|\cdot\|_\beta$ и сходимость наблюдается в норме $\|\cdot\|_\alpha$, то она должна быть и в норме $\|\cdot\|_\beta$. Простейшие теоремы о подобных связях между нормами в одномерном случае содержатся в [21]. Наиболее известные из них следующие.

Теорема.1. Для любой сеточной функции v , обращающейся в ноль в граничных узлах, справедливы неравенства

$$\|v\|_{C_h} \leq \frac{\sqrt{X}}{2} \|v_x\|_{L_{2,h}},$$

$$\|v\|_{L_{2,h}}^2 \leq \frac{X^2}{8} \|v_x\|_{L_{2,h}}^2.$$

8. Оценки точности разностных решений

Теорема.2. Для любой сеточной функции v верно

$$\|v\|_{C_h} \leq \frac{1}{\sqrt{h}} \|v\|_{L_{2,h}}.$$

При выполнении практикума требуется оценить абсолютную и относительную погрешность получаемого решения.

Определение. Величина

$$\Delta(v)_\alpha = \|v - u\|_\alpha \quad (8.1)$$

называется абсолютной погрешностью, а величина

$$\delta(v)_\alpha = \frac{\|v - u\|_\alpha}{\|v\|_\alpha} \quad (8.2)$$

относительной погрешностью разностного решения v , вычисленными в $\|\cdot\|_\alpha$. Через функцию u обозначена проекция на сетку точного решения.

Точные величины погрешностей можно вычислить, если известно точное решение дифференциальной задачи. На практике точных решений задач не известно. Поэтому часто для приближенной оценки точности используют расчеты на различных сетках. В результате можно вычислить следующие величины

$$\Delta(v^1, v^2)_\alpha = \|v^1 - v^2\|_\alpha \quad \text{и} \quad \delta(v^1, v^2)_\alpha = \frac{\|v^1 - v^2\|_\alpha}{\|v^1\|_\alpha}, \quad (8.3)$$

где v^k – разностное решение, вычисленное на сетке $Q_{\tau_k h_k}^k$ с шагами τ_k и h_k . Обычно шаги сеток $Q_{\tau h}^1$ и $Q_{\tau h}^2$ относятся, как степень числа 2, и решение, определенное на сетке с более мелким шагом, в формуле (8.2) понимается в виде проекции на более редкую сетку.

При выполнении практикума нужно оценить точность таких приближенных оценок, в зависимости от соотношения шагов сетки, путем сравнения с точными оценками, полученными по формулам (8.1).

9 Численные эксперименты

9.1 Постановка разностной задачи

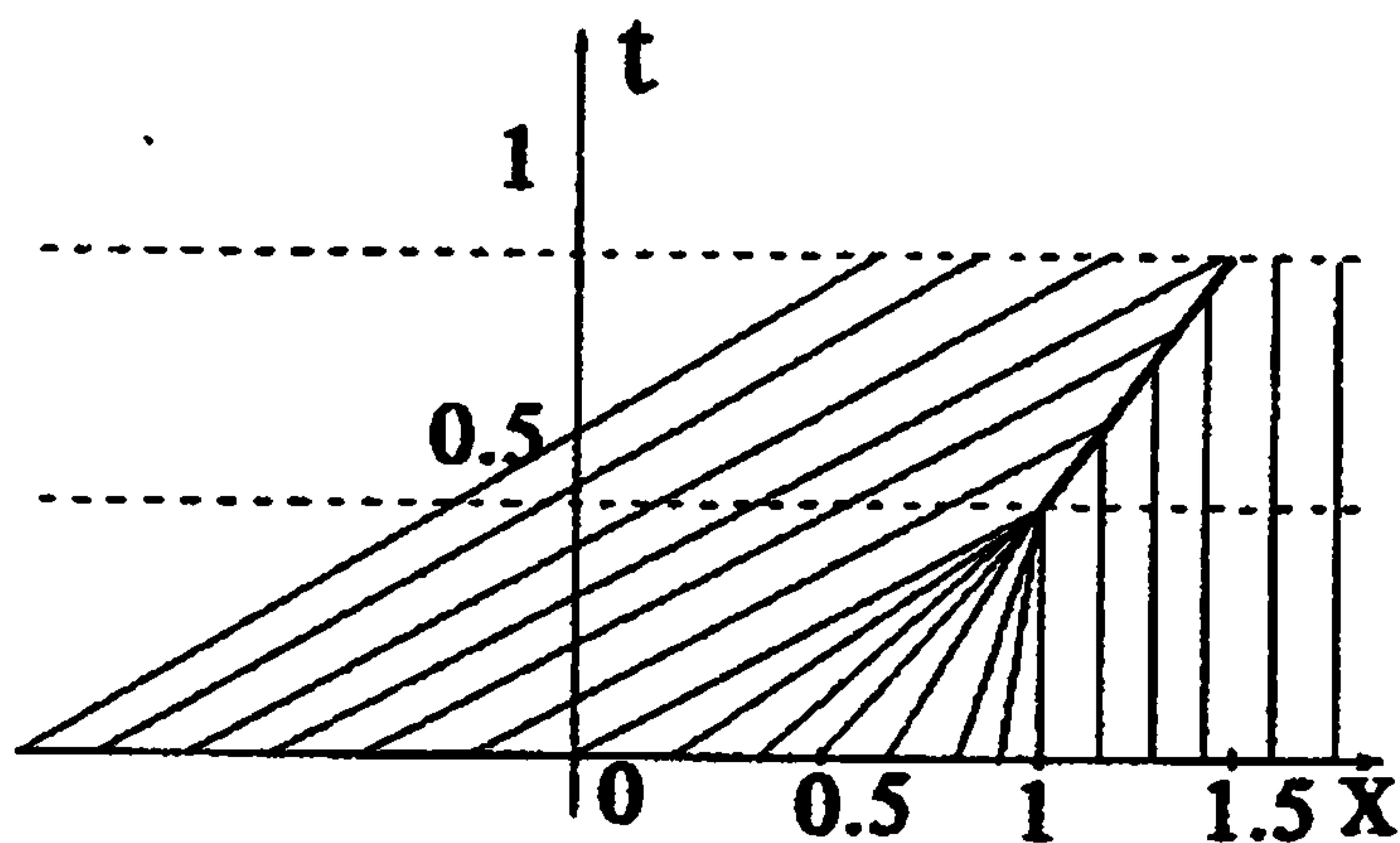


Рис. 7.

Первое, что требуется сделать для численного эксперимента по решению задачи (7.2), (7.3) по схеме (7.1), это ограничить расчетную область по пространственной переменной. Для этого заметим, что характеристики дифференциальной задачи (7.2), (7.3) имеют тангенс угла наклона к оси x в пределах от $0,5$ до $+\infty$ (см рис. 7). Из этого следует, что решение при $x < 0$ будет равно 1 при любом времени t , поэтому можно ограничить расчетную область слева прямой $x = 0$, поставив при этом на ней граничное условие $u = 1$. Нас интересует решение при времени $t = 1$. Любая характеристика задачи (7.2), (7.3), выходящая из точки с координатами $(0, x_0)$, где $x_0 \leq 1$, при $t = 1$ проходит через точку с координатами $(1, x)$, где $x \leq 2$. Следовательно, во всех точках (t, x) таких, что $t \leq 1$ и $x > 2$, решение равно 0 . Поэтому справа расчетную область для схемы (7.1) можно ограничить прямой $x = 2$.

Замечание. Такое ограничение является корректным, поскольку для реализации схемы (7.1) на правой границе области задавать граничные условия не требуется, но, если бы это было необходимо, можно было бы считать, что функция u равна нулю в точках прямой $x = 2 + \zeta$, где $\zeta \geq h$ (h - шаг сетки по пространственной переменной).

9.1. Постановка разностной задачи

Итак, для определения решения задачи (7.2), (7.3) при $t = 1$, достаточно решить уравнение (7.2) в области

$$Q_T = \{(t, x) \mid 0 < t \leq 1, 0 < x \leq 2\} \quad (9.1)$$

с начальным условием

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{при } 1 < x \leq 2, \end{cases} \quad (9.2)$$

и граничным условием

$$u(t, 0) = 1 \quad \text{при } 0 \leq t \leq 1. \quad (9.3)$$

Решив задачу (7.2), (9.2), (9.3), мы получим решение задачи (7.2), (7.3) при $t = 1$ для x из отрезка $[0; 2]$. При $x < 0$, как было показано выше, функция $u(1, x) = 1$, а при $x > 2$ равна 0.

Для задачи (7.2) - (7.3) можно выписать точное решение, воспользовавшись теорией, изложенной в параграфе 11. Заметим, что характеристики, выпущенные из точек прямой $t = 0$, не пересекаются при $t < 0,5$. Следовательно, при $t < 0,5$ решение этой задачи будет непрерывной функцией, задаваемой при каждом $t \in (0; 0,5)$ формулой

$$u(t, x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x < 2t, \\ (1 - x)/(1 - 2t) & \text{при } 2t \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

При этих t функцию u можно понимать, как решение задачи (7.2) - (7.3) в широком смысле. При $t = 0,5$ решение становится разрывным

$$u(1/2, x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \leq 1, \\ 0 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

9. Численные эксперименты

Разрыв у функции u будет сохраняться при $t > 0,5$, что следует из условия "неубывания энтропии". Скорость движения разрыва находится из условия Рэнкина-Гюгонио. В нашем случае она равна 1. Следовательно, при $t \in [0,5; 1]$ решение задачи (7.2) - (7.3) задается формулой

$$u(t, x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \leq t + 0,5; \\ 0 & \text{при } x > t + 0,5. \end{cases} \quad (9.4)$$

Заметим, что функцию (9.4) можно рассматривать как решение задачи (7.2) - (7.3) только в обобщенном смысле.

9.2 Тестирование на задаче с известным гладким решением

Начнем тестирование схемы

$$v_t + (v^2)_x = 0, \quad (9.5)$$

с постановки и расчета задачи, обладающей известным гладким решением. В общем случае этот подход описан в заключении к книге [4]. Применим его к исследуемой задаче. Для этого возьмем гладкую функцию. Например,

$$u(t, x) = e^t \cdot \cos(x) \quad (9.6)$$

и выберем правую часть уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f \quad (9.7)$$

такой, чтобы эта функция являлась точным решением этого уравнения. Если a положить равным 1, то f будет равна

$$f(t, x) = e^t (\cos(x) - \sin(x)).$$

Задав начальные и граничные условия в области

$$Q_T = \{(t, x) \mid 0 < t \leq 1, 0 < x \leq 2\} \quad (9.8)$$

9.2. Тестирование на задаче с известным гладким решением

τ	h	$\Delta(v)_{C_h}$	$\Delta(v)_{L_{1,h}}$	$\delta(v)_{C_h}$	$\delta(v)_{L_{1,h}}$
.100	.100	.130D+00	.155D+00	.486D-01	.561D-01
.010	.100	.684D-01	.868D-01	.254D-01	.308D-01
.001	.100	.628D-01	.802D-01	.233D-01	.284D-01
.100	.010	.232D+09	.865D+07	.100D+01	.100D+01
.010	.010	.137D-01	.164D-01	.504D-02	.557D-02
.001	.010	.742D-02	.904D-02	.273D-02	.307D-02
.100	.001	.347D+18	.127D+16	.100D+01	.100D+01
.010	.001	.831+121	.103+120	.100D+01	.100D+01
.001	.001	.138D-02	.165D-02	.507D-03	.557D-03

Таблица 2: Нормы погрешности расчетов задачи с гладким решением

в виде значений функции (9.6) в граничных точках

$$u_0(x) = \cos(x), \quad \text{при } 0 \leq x \leq 2, \quad (9.9)$$

$$u(t, 0) = e^t, \quad \text{при } 0 \leq t \leq 1, \quad (9.10)$$

применим схему (9.5) для расчета поставленной задачи.

Полученное разностное решение сравним с точным решением дифференциальной задачи (9.6). Значения различных норм абсолютной и относительной погрешностей разностного решения приведены в таблице 2:

Результаты расчетов, приведенные в таблице 2, подтверждают выводы, сделанные на основе теоретического исследования разностной схемы (9.5), об устойчивости и оценке сходимости разностного решения к точному с первым порядком по шагам сетки τ и h , разумеется при наличии гладкости последнего.

Рассмотрим вопрос о точности приближенных оценок погрешности $\Delta(v, v^k)_\alpha$ и $\delta(v, v^k)_\alpha$ разностного решения v , полученных на основании сравнения с разностным решением v^k . Решения v^k $k = 1, 2, 3, 4$ вычисляются на сетках с шагами

$$\tau_k = \tau/2^k, \quad h_k = h/2^k,$$

9.3. Расчет линейной задачи

задачи, описываемой уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 0.5 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (9.12)$$

с начальным и граничным условиями

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{при } 1 < x \leq 2, \end{cases} \quad (9.13)$$

$$u(t, 0) = 1 \quad \text{при } 0 \leq t \leq 1 \quad (9.14)$$

в области

$$Q_T = \{(t, x) \mid 0 < t \leq 1, 0 \leq x \leq 2\}.$$

Решением в широком смысле этой дифференциальной задачи является функция, задаваемая формулой

$$u(t, x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x < t/2, \\ 1 + t/2 - x & \text{при } t/2 \leq x \leq t/2 + 1, \\ 0 & \text{при } x > t/2 + 1. \end{cases}$$

Эта функция не является дифференцируемой в области Q_T , поэтому классические оценки погрешности численного интегрирования, верные для гладких решений, в данном случае неверны. Доказательство оценок точности разностных решений для негладких решений гораздо более сложное. Оказывается [2, 3, 14], что при решении задачи (9.12) - (9.14) по схеме (9.11) с соблюдением условия устойчивости $\tau \leq 2h$, получается разностное решение с оценкой погрешности в нормах пространств C_h и $L_{1,h}$ порядка \sqrt{h} .

Результаты численного эксперимента по расчету задачи (9.12) - (9.14) по схеме (9.11) приведены в таблице 5. В этой таблице содержатся величины различных норм абсолютной и относительной погрешности численного интегрирования на различных сетках при $t = 1$.

9. Численные эксперименты

τ	h	$\Delta(v)_{C_h}$	$\Delta(v)_{L_{1,h}}$	$\delta(v)_{C_h}$	$\delta(v)_{L_{1,h}}$
.100	.100	.615D-01	.250D-01	.615D-01	.263D-01
.010	.100	.855D-01	.472D-01	.856D-01	.497D-01
.001	.100	.875D-01	.494D-01	.876D-01	.520D-01
.100	.010	.233D+07	.174D+06	.100D+01	.100D+01
.010	.010	.199D-01	.250D-02	.199D-01	.251D-02
.001	.010	.274D-01	.475D-02	.274D-01	.477D-02
.100	.001	.618D+16	.452D+14	.100D+01	.100D+01
.010	.001	.536D+91	.133D+90	.100D+01	.100D+01
.001	.001	.631D-02	.250D-03	.631D-02	.250D-03

Таблица 5: Нормы погрешности расчетов линейной задачи

В частности, из данной таблицы видно, что теоретические оценки подтверждаются проведенными расчетами, т. к., например, величины $A_{\tau,h} = \delta(v)_{C_h} / \sqrt{h}$ при различных шагах сетки получаются примерно одинаковыми

$$A_{0,10,1} = 0,195; \quad A_{0,010,01} = 0,199; \quad A_{0,0010,001} = 0,199.$$

Обратим внимание на точность расчетов при фиксированном шаге h в зависимости от величины шага τ . При расчете тестового примера (см. таблицу 2) были получены величины погрешности численного интегрирования, которые убывали при уменьшении τ . Такой характер зависимости ошибки от шага τ был доказан при теоретическом исследовании разностной схемы, т. к. для гладких решений при выполнении условия устойчивости из теоремы Филиппова следует оценка величины

$$\delta(v)_{C_h} \leq C_1 \tau + C_2 h.$$

В случае негладкого решения дифференциальной задачи оценку (9.3) доказать уже нельзя. Больше того, результаты расчетов показывают, что величины $\delta(v)$ даже немного увеличиваются при

9.3. Расчет линейной задачи

одном и том же h при уменьшении τ . Это объясняется тем, что реально решается не уравнение (9.12), а уравнение (7.13), являющееся дифференциальным приближением используемой разностной схемы. В правую часть уравнения (7.13) по сравнению с уравнением (9.12) добавлены еще слагаемые, зависящие от производных большего порядка неизвестной функции, с коэффициентами, зависящими от шагов сетки. Естественно предположить, что наибольший вклад в отличие решения уравнения (7.13) от решения уравнения (9.12) при прочих равных условиях вносит то слагаемое, перед которым стоит коэффициент, имеющий наименьший порядок малости от шагов τ и h . Этим слагаемым является

$$\frac{ah}{2}(1-\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Поскольку величина $\nu = a\frac{\tau}{h}$ из условия устойчивости разностной схемы меньше или равна 1 и $a = 0,5$, следовательно, коэффициент при второй производной функции u неотрицателен. Поэтому задача Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{ah}{2}(1-\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (9.15)$$

при $t > 0$ корректна. В параграфе "Дифференциальное приближение" объяснено, что правая часть такого вида вносит сглаживающий (диссипативный) эффект в характер решения. Сглаживание происходит тем сильнее, чем больший коэффициент стоит при второй производной по пространственной переменной. Если шаг h не менять, то с уменьшением τ коэффициент $\frac{ah}{2}(1-\nu)$ увеличивается, поэтому диссипативный эффект будет расти. Естественно, что при уменьшении h при условии $\nu \leq 1$ вклад этого слагаемого в решение будет уменьшаться. Как раз это и наблюдается при анализе данных таблицы 5. Из результатов счета видно, что схема (9.11) обладает довольно сильными диссипативными свойствами. Часто коэффициент $\frac{ah}{2}(1-\nu)$ называют схемной вязкостью,

9. Численные эксперименты

	$\tau = 0.1$ $h = 0.1$	$\tau = 0.01$ $h = 0.1$	$\tau = 0.01$ $h = 0.01$
v^1	.175D-01	.245D-01	.581D-02
v^2	.302D-01	.422D-01	.993D-02
v^3	.393D-01	.548D-01	.128D-01
v^4	.458D-01	.638D-01	.149D-01
u	.615D-01	.855D-01	.199D-01

Таблица 6: Оценки погрешности расчета линейной задачи на сетке с $\tau = 0.1$, $h = 0.1$

	$\tau = 0.1$ $h = 0.1$	$\tau = 0.01$ $h = 0.1$	$\tau = 0.01$ $h = 0.01$
v^1	.112D-01	.222D-01	.124D-02
v^2	.172D-01	.338D-01	.186D-02
v^3	.202D-01	.396D-01	.217D-02
v^4	.218D-01	.426D-01	.233D-02
u	.250D-01	.472D-01	.250D-02

Таблица 7: Оценки погрешности расчета линейной задачи на сетке с $\tau = 0.01$, $h = 0.01$

интерпретируя явление сглаживания решения механической аналогией.

В таблицах 6 и 7 приведены величины $\Delta(v, v^k)_{C_h}$ и $\Delta(v, v^k)_{L_{1,h}}$ соответственно при $t = 1$, где функция v – разностное решение на сетке с τ и h , указанными в верхних строках таблиц, а функция v^k – разностное решение на сетке с $\tau/2^k$ и $h/2^k$. Из этих таблиц видно, что по величинам $\Delta(v, v^k)_\alpha$ можно оценить порядок абсолютной погрешности разностного решения.

В заключении приведем графики разностного решения на фоне точного дифференциального решения (рис. 8) и график

9.4. Расчет нелинейной задачи

ошибки численного интегрирования (рис. 9) при $t = 1$. Используемые для построения графиков данные были получены при расчетах на сетке $\tau = 0,1$ и $h = 0,1$. Из этих графиков хорошо виден диссипативный характер решения разностной схемы (9.11).

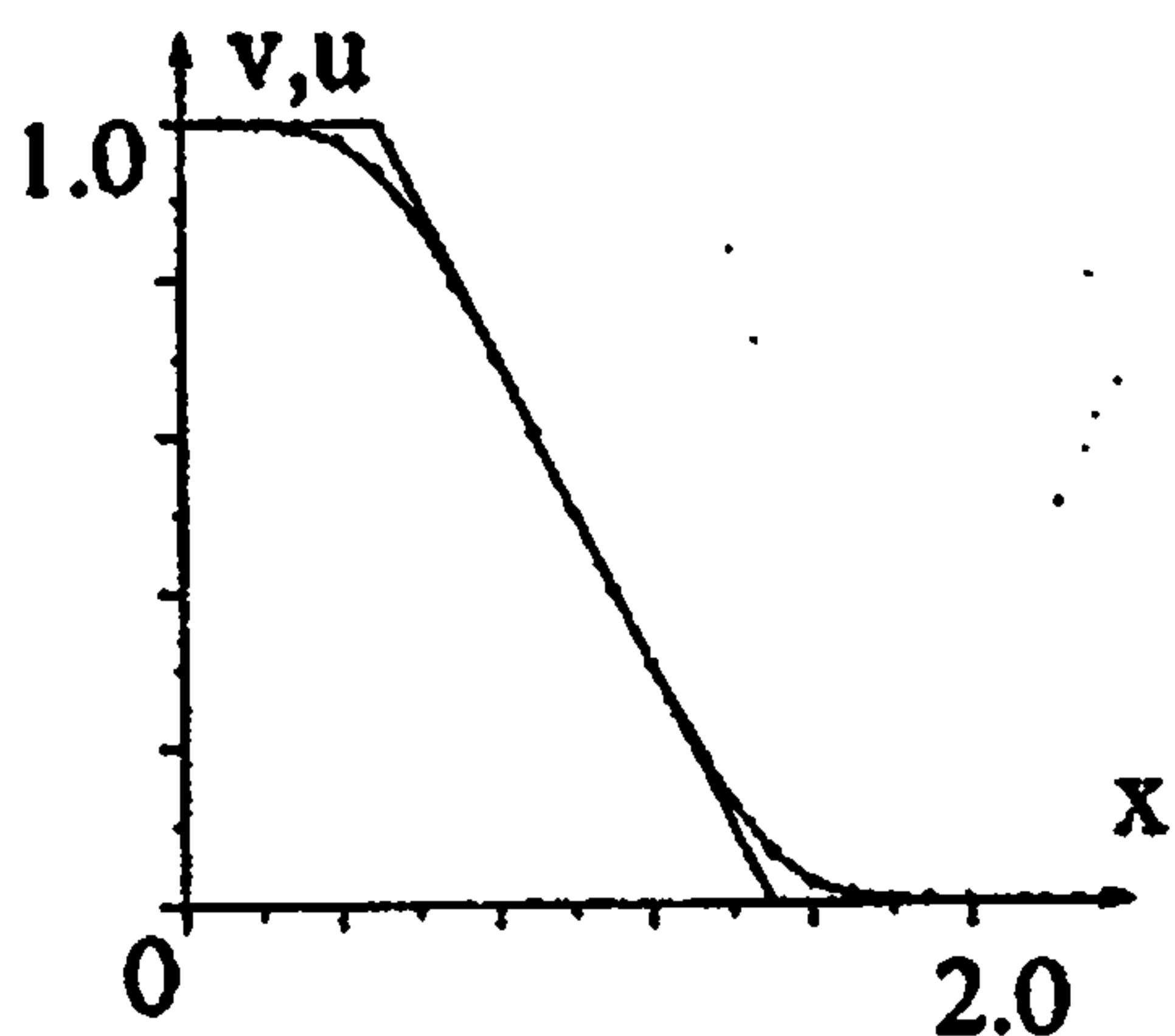


Рис. 8.

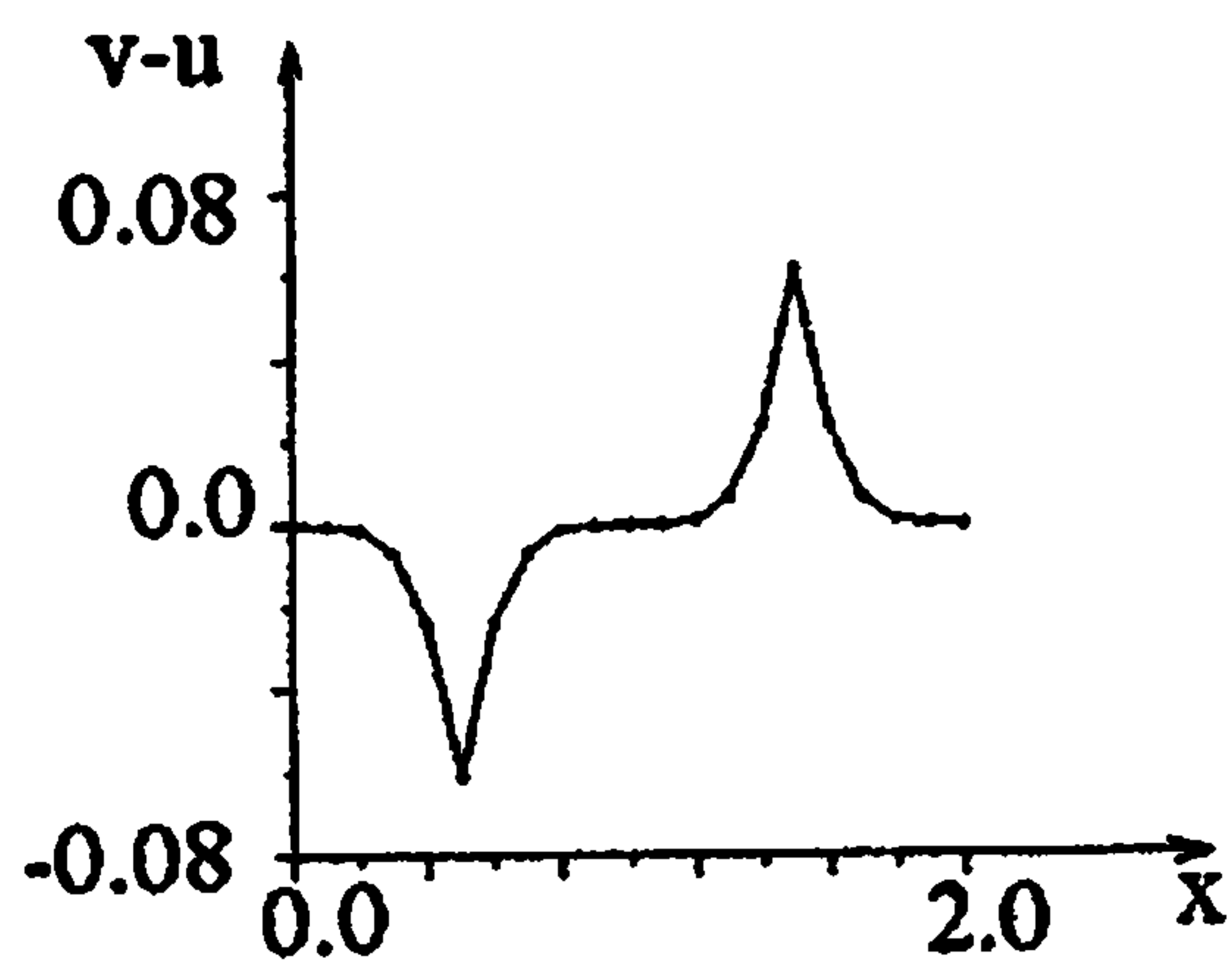


Рис. 9.

9.4 Расчет нелинейной задачи

Нормы погрешности приближенного решения задачи (7.2), (9.2), (9.3), найденного по схеме (7.1) на различных сетках, при $t = 1$ приведены в таблице 8: Из этой таблицы видно, что сеточное решение не сходится к обобщенному решению (9.4) решаемой дифференциальной задачи в пространстве C_h . Величины $\Delta(v)_{L_{1,h}}$ имеют порядок \sqrt{h} , что подтверждает результаты теоретического исследования, проведенного в работах [2, 14]. Также как и в линейном случае при фиксированном h наблюдается небольшой рост величин $\Delta(v)_{L_{1,h}}$ при уменьшении шага по времени. Это можно объяснить наличием у схемы (7.1) схемной вязкости, величина которой растет с уменьшением τ при неизменном h .

Величины $\Delta(v, v^k)_{C_h}$ и $\Delta(v, v^k)_{L_{1,h}}$ приведены при $t = 1$ в таблицах 9 и 10 соответственно, где функция v – разностное решение на сетке с τ и h , указанными в первых строках таблиц, а функция v^k – разностное решение на сетке с $\tau/2^k$ и $h/2^k$.

Из таблиц 9 и 10 видно, что по величинам $\Delta(v, v^k)_\alpha$ можно

9. Численные эксперименты

τ	h	$\Delta(v)_{C_h}$	$\Delta(v)_{L_{1,h}}$	$\delta(v)_{C_h}$	$\delta(v)_{L_{1,h}}$
.05000	.100	.500D+00	.518D-01	.500D+00	.357D-01
.00500	.100	.552D+00	.829D-01	.552D+00	.572D-01
.00050	.100	.555D+00	.864D-01	.555D+00	.596D-01
.00005	.100	.556D+00	.867D-01	.556D+00	.598D-01
.00500	.010	.500D+00	.518D-02	.500D+00	.347D-02
.00050	.010	.543D+00	.795D-02	.543D+00	.532D-02
.00005	.010	.546D+00	.825D-02	.546D+00	.552D-02
.00050	.001	.500D+00	.518D-03	.500D+00	.345D-03
.00005	.001	.543D+00	.795D-03	.543D+00	.530D-03

Таблица 8: Нормы погрешности расчетов нелинейной задачи

	$\tau = 0.05$ $h = 0.1$	$\tau = 0.005$ $h = 0.1$	$\tau = 0.0005$ $h = 0.01$
v^1	.902D-02	.109D+00	.101D+00
v^2	.902D-02	.122D+00	.118D+00
v^3	.902D-02	.123D+00	.119D+00
v^4	.902D-02	.123D+00	.119D+00
u	.500D+00	.552D+00	.543D+00

Таблица 9: Оценки погрешности расчета нелинейной задачи на сетке с $\tau = 0.1$, $h = 0.1$

10. Методы нахождения решений разностных схем

	$\tau = 0.05$ $h = 0.1$	$\tau = 0.005$ $h = 0.1$	$\tau = 0.0005$ $h = 0.01$
v^1	.180D-02	.253D-01	.226D-02
v^2	.180D-02	.284D-01	.251D-02
v^3	.180D-02	.285D-01	.252D-02
v^4	.180D-02	.285D-01	.252D-02
u	.518D-01	.829D-01	.795D-02

Таблица 10: Оценки погрешности расчета нелинейной задачи на сетке с $\tau = 0.01$, $h = 0.01$

приблизительно оценить порядок абсолютной погрешности разностного решения в норме пространства $L_{1,h}$, а в норме пространства C_h эта методика приведет к неверным выводам.

10 Методы нахождения решений разностных схем

Самыми простыми для реализации, безусловно, являются явные разностные схемы, в которых часть дифференциального оператора, в которую входят производные по пространственным переменным, аппроксимируется на уже вычисленных временных слоях. В таких схемах значение решения в любой точке $(n+1)$ -временного слоя выражается через значения решения на слоях с номерами меньшими или равными n . Часть из приведенных выше неявных или с весами разностных схем использует на верхнем временном слое значения решения всего в двух узлах. Нахождение решения на верхнем слое в этом случае сводится к последовательному решению серии нелинейных скалярных уравнений. Принципиально более сложным случаем являются те схемы, в которых используются не менее трех узлов с верхнего слоя. В этом случае нахождение разностного решения требует решения системы нелинейных

уравнений. Ниже будут обсуждаться два подхода в практической реализации этих схем.

10.1 Линеаризованные неявные разностные схемы

Опишем этот подход на примере центрированной по времени неявной разностной схемы. Идея этого метода состоит в представлении уравнения (1.1) в виде приближенного равенства

$$u(t + \tau, x) \approx u(t, x) - \frac{\tau}{2} \left[\frac{\partial F}{\partial x}(u(t, x)) + \frac{\partial F}{\partial x}(u(t + \tau, x)) \right]$$

с последующей заменой выражения $F(u(t + \tau, x))$ с помощью приближенного соотношения

$$F(u(t + \tau, x)) \approx F(u(t, x)) + \left(\frac{\partial F}{\partial u}(u(t, x)) \right) (u(t + \tau, x) - u(t, x)).$$

Тогда

$$u(t + \tau, x) \approx u(t, x) - \frac{\tau}{2} \left[2 \frac{\partial F}{\partial x}(u(t, x)) + \frac{\partial}{\partial x} (A(u(t + \tau, x) - u(t, x))) \right].$$

где $A = \frac{\partial F}{\partial u}(u(t, x))$.

Используя центральные разности для аппроксимации производных по x со вторым порядком точности, получаем

$$\begin{aligned} & -\frac{\tau A_{m-1}^n}{4h} v_{m-1}^{n+1} + v_m^{n+1} + \frac{\tau A_{m+1}^n}{4h} v_{m+1}^{n+1} = \\ & = -\frac{\tau}{h} \frac{F_{m+1}^n - F_{m-1}^n}{2} - \frac{\tau A_{m-1}^n}{4h} v_{m-1}^n + v_m^n + \frac{\tau A_{m+1}^n}{4h} v_{m+1}^n. \end{aligned} \quad (10.1)$$

В (10.1) через A_m^n обозначено значение $\frac{\partial F}{\partial v}(v_m^n)$, а через F_m^n значение $F(v_m^n)$.

10.1. Линеаризованные неявные разностные схемы

Метод (10.1) приводит к системе линейных уравнений с трехдиагональной матрицей, которую необходимо решить для нахождения значений решения на верхнем временном слое. Для решения таких систем применяется метод "прогонки"[4], который позволяет решать их за число арифметических операций, пропорциональное числу неизвестных.

Более простой вид неявных линеаризованных разностных схем получается, если их записать в так называемой дельта-форме, т.е. в тех случаях, когда разностные уравнения составляются для приращений величин и для потоков, входящих в законы сохранения. Перепишем схему (10.1), используя дельта-форму записи разностных уравнений. Пусть $\Delta v = \hat{v} - v$. Тогда уравнение (10.1) запишется в виде

$$-\frac{\tau A_{m-1}^n}{4h} \Delta v_{m-1}^n + \Delta v_m^n + \frac{\tau A_{m+1}^n}{4h} \Delta v_{m+1}^n = -\frac{\tau}{2h} (F_{m+1}^n - F_{m-1}^n). \quad (10.2)$$

Система линейных алгебраических уравнений осталась трехдиагональной, но число членов в правой части уменьшилось. Связанное с этим сокращение объема вычислений может оказаться особенно существенным при адаптации этого метода для решения систем уравнений, когда объем вычислений очень большой.

Схема (10.1) безусловно устойчива, но дифференциальное приближение этой схемы содержит только производные нечетного порядка. Вследствие этого для качественного улучшения численного решения в уравнение (10.1) приходится вводить искусственную диссипацию. Можно, например, в правую часть этого уравнения добавить член, пропорциональный разностной производной четвертого порядка

$$-\frac{\omega}{8} (v_{m+2}^n - 4v_{m+1}^n + 6v_m^n - 4v_{m-1}^n + v_{m-2}^n),$$

не изменив формально порядка аппроксимации разностной схемы. Можно показать, что неявная разностная схема (10.1) с явным демпфирующим членом устойчива при

$$0 < \omega \leq 1.$$

Искусственную вязкость можно вводить, добавляя в правую часть уравнения (10.1) член, пропорциональный второй разностной производной. Коэффициент при этом нужно выбирать так, чтобы он, по возможности, не сильно искажал разностное решение и в то же время сглаживал осцилляции, свойственные решению уравнения (10.1). Универсального рецепта такого выбора предложить нельзя. Добавлять вязкий член, пропорциональный второй разностной производной, имеет смысл с верхнего слоя, т.к. это изменение сохраняет свойство безусловной устойчивости схемы и в то же время оставляет матрицу получающейся системы линейных уравнений трехдиагональной.

10.2 Метод Ньютона для неявных разностных схем

Применение описанного выше метода линеаризации неявных разностных схем далеко не всегда сохраняет свойство безусловной устойчивости схемы, поэтому часто решают нелинейные системы алгебраических уравнений, к которым сводится поиск решения неявной схемы на каждом временном слое. Для того, чтобы сохранить безусловную устойчивость, используют для решения этих систем метод Ньютона [4].

Применение метода Ньютона разберем на примере неявной разностной схемы с центральной разностью

$$v_t + (F(\hat{v}))_x = 0. \quad (10.3)$$

Будем считать, что решение разностной схемы (10.3) известно на слое n , а на $(n+1)$ -слое заданы граничные условия $v_0^{n+1} = u_0$ и $v_M^{n+1} = u_M$. Таким образом, требуется найти значения v_m^{n+1} для $m = 1, \dots, M-1$, для чего имеем систему нелинейных уравнений,

10.2. Метод Ньютона для неявных разностных схем

являющейся записью схемы (10.3) на слое n :

$$\begin{cases} G_1(\hat{v}) \equiv \hat{v}_1 + \frac{\tau}{2h} F(\hat{v}_2) - v_1 - \frac{\tau}{2h} F(u_0) = 0, \\ G_m(\hat{v}) \equiv -\frac{\tau}{2h} F(\hat{v}_{m-1}) + \hat{v}_m + \frac{\tau}{2h} F(\hat{v}_{m+1}) - v_m = 0, \\ \quad \quad \quad m = 2, \dots, M-2, \\ G_{M-1}(\hat{v}) \equiv -\frac{\tau}{2h} F(\hat{v}_{M-2}) + \hat{v}_{M-1} - v_{M-1} + \frac{\tau}{2h} F(u_M) = 0. \end{cases} \quad (10.4)$$

Используя введенную вектор-функцию \mathbf{G} , данную систему запишем в виде $\mathbf{G}(\hat{v}) = 0$. Рекуррентные соотношения метода Ньютона для решения этой системы имеют вид

$$\mathbf{G}(\hat{v}^k) + J(\hat{v}^k)(\hat{v}^{k+1} - \hat{v}^k) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (10.5)$$

где через матрицу J обозначена матрица Якоби вектор-функции \mathbf{G} . В рассматриваемом случае матрица J выглядит следующим образом

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{\tau}{2h} F'(\hat{v}_2^k) & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{\tau}{2h} F'(\hat{v}_{m-1}^k) & 1 & \frac{\tau}{2h} F'(\hat{v}_{m+1}^k) & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -\frac{\tau}{2h} F'(\hat{v}_{M-2}^k) & 1 & \dots \end{pmatrix}.$$

Задача (10.5) образует систему линейных алгебраических уравнений для нахождения следующего приближения \hat{v}^{k+1} для неизвестной функции \hat{v} на верхнем временном слое по известному приближению \hat{v}^k . Матрица системы является трехдиагональной, что дает возможность формально использовать метод прогонки для решения этой системы. Другой вопрос — это условия устойчивости этого алгоритма. Результаты исследования устойчивости метода прогонки можно найти в [4, 21, 10]. Заметим, что матрица остается трехдиагональной для любой разностной схемы, использующей три соседних узла на верхнем временном слое. Применение метода прогонки позволяет найти неизвестный вектор за

11. Точные решения квазилинейного уравнения

$8M$ арифметических операций, где M – размерность искомого вектора.

В качестве начального приближения \hat{v}^0 обычно берут известный вектор v , описывающий искомую функцию на нижнем временном слое. Такое задание \hat{v}^0 обеспечивает неплохую точность, поэтому, как правило, требуется всего несколько итераций для достижения требуемой точности нахождения вектора \hat{v} . В программе обычно задают цикл с достаточно большим числом итераций, но на каждом шаге проверяют достигнутую точность и при достижении требуемой точности совершается выход из цикла.

Разумеется при решении реальных задач точное решение неизвестно, поэтому о точности нахождения очередного приближения \hat{v}^{k+1} можно судить лишь по его изменению по сравнению с предыдущим приближением \hat{v}^k . Более того, часто ищут не следующее приближение \hat{v}^{k+1} , а разность между \hat{v}^{k+1} и \hat{v}^k , которую обозначим r^k . Используя вектор r^k можно легко найти вектор \hat{v}^{k+1} , а величина нормы r^k позволяет судить о достигнутой точности.

11 Точные решения квазилинейного уравнения первого порядка

Напомним основные результаты нелокальной теории разрешимости задачи (1.1) - (1.2)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0,$$

$$u|_{t=0} = u_0(x),$$

знание которых необходимо при выполнении вариантов задания практикума. Подробно с ними можно ознакомиться по [11, 19].

11.1 Метод характеристик

Согласно общей теории [19] интегрирование уравнения (1.1) сводится к решению системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= F'_u(U), \\ \frac{dU}{dt} &= 0, \end{aligned} \quad (11.1)$$

которую называют характеристической системой уравнения (1.1). Каждое ее решение $x = X(t)$, $u = U(t)$ задает характеристику в пространстве переменных t , x и u .

Предположим, что функция F'_u непрерывно дифференцируема. Тогда через любую точку (t, x, u) проходит одна и только одна характеристика. Задача Коши (1.1) - (1.2) геометрически интерпретируется как задача построения интегральной поверхности уравнения (1.1) в пространстве переменных t , x , и u , проходящей через заданную начальную кривую: $t = 0$, $u = u_0(x)$. Так как при этом мы хотим получить однозначную дифференцируемую функцию $u(t, x)$, переменных t , x , эта поверхность, очевидно, должна однозначно проектироваться на плоскость $u = 0$ переменных t и x . Поскольку решение u однозначно определяется вдоль каждой характеристики, проходящей через точку (t, x, u) , эта задача состоит в построении поверхности, состоящей из характеристик, проведенных через данную начальную кривую, и однозначно проектирующуюся на плоскость $u = 0$.

Обозначим через $x = X(t, x_0, u_0)$, $u = U(t, x_0, u_0)$ решение характеристической системы (11.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$X(0, x_0, u_0) = x_0, \quad U(0, x_0, u_0) = u_0. \quad (11.2)$$

В рассматриваемом случае функции $x = X(t, x_0, u_0)$ и $u = U(t, x_0, u_0)$ имеют простой вид

$$x = F'_u(u_0)t + x_0, \quad u = u_0, \quad (11.3)$$

11. Точные решения квазилинейного уравнения

т.е. все характеристики уравнения (1.1) являются прямыми и значение u остается неизменным вдоль любой характеристики. Решение u задачи Коши (1.1) - (1.2) в точках (t, x) характеристики (11.3) задается формулой

$$u(t, x) = u(t, F'_u(u_0)t + x_0) = u_0. \quad (11.4)$$

Формула (11.4) неявным образом определяет функцию $u(t, x)$, которая в случае $u_0(x) \in C_1$ непрерывно дифференцируема во всех точках t, x , в которых однозначно разрешается относительно параметра x_0 уравнение

$$x = F'_u(u_0(x_0))t + x_0. \quad (11.5)$$

Пусть в этих точках

$$x_0 = X^{-1}(t, x) = x_0(t, x)$$

есть результат разрешения уравнения (11.5) относительно x_0 . Тогда из формулы (11.4) получаем явную формулу для решения $u(t, x)$ задачи (1.1) - (1.2):

$$u(t, x) = u_0(x_0(t, x)). \quad (11.6)$$

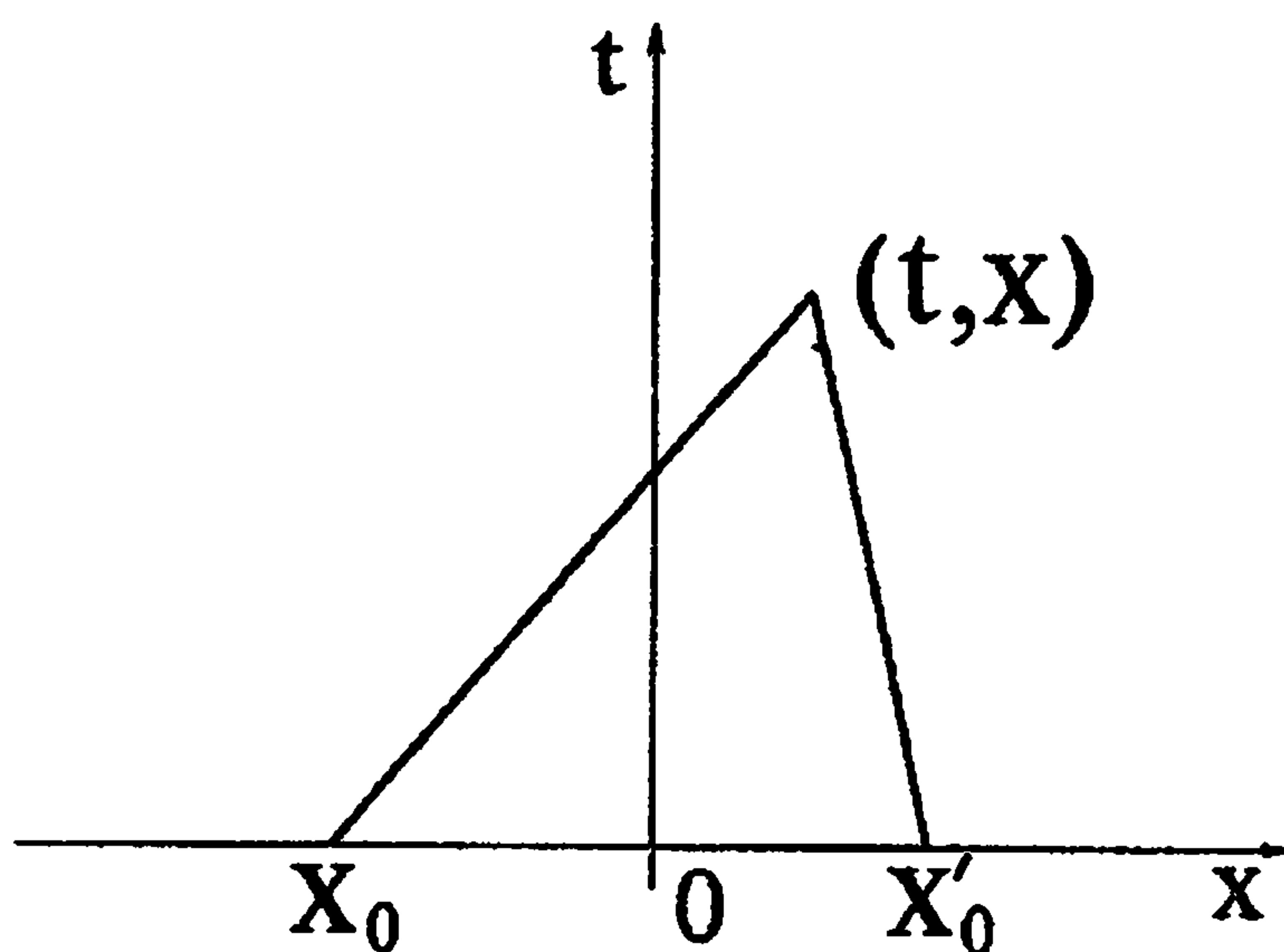


Рис. 10.

11.1. Метод характеристик

Поясним графически построение решения задачи Коши (1.1) - (1.2). Через любую точку x_0 проведем проекцию характеристики (11.3) на плоскость $u = 0$. Эту проекцию также часто называют характеристикой. Этой прямой соответствует значение $u_0(x_0)$, которое и задает решение $u(t, x)$ на линии $x = F'_u(u_0)t + x_0$. Может случиться, что в некоторых точках (t, x) при $t > 0$ могут пересечься две или более линий $x = F'_u(u_0)t + x_0$, отвечающих различным значениям параметра x_0 (рис. 10). В этих точках уравнение (11.5) относительно x_0 имеет более одного решения и формулы (11.4), (11.6) определяют некоторую многозначную функцию переменных (t, x) . В этом случае не существует непрерывного решения $u(t, x)$ задачи (1.1) - (1.2).

Поясним сказанное на примере простейшего квазилинейного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (11.7)$$

для которого поставим начальное условие

$$u(0, x) = u_0(x) = \begin{cases} u^- = \alpha a + \beta & \text{при } x \leq a, \\ \alpha x + \beta & \text{при } a \leq x \leq b, \\ u^+ = \alpha b + \beta & \text{при } x \geq b. \end{cases} \quad (11.8)$$

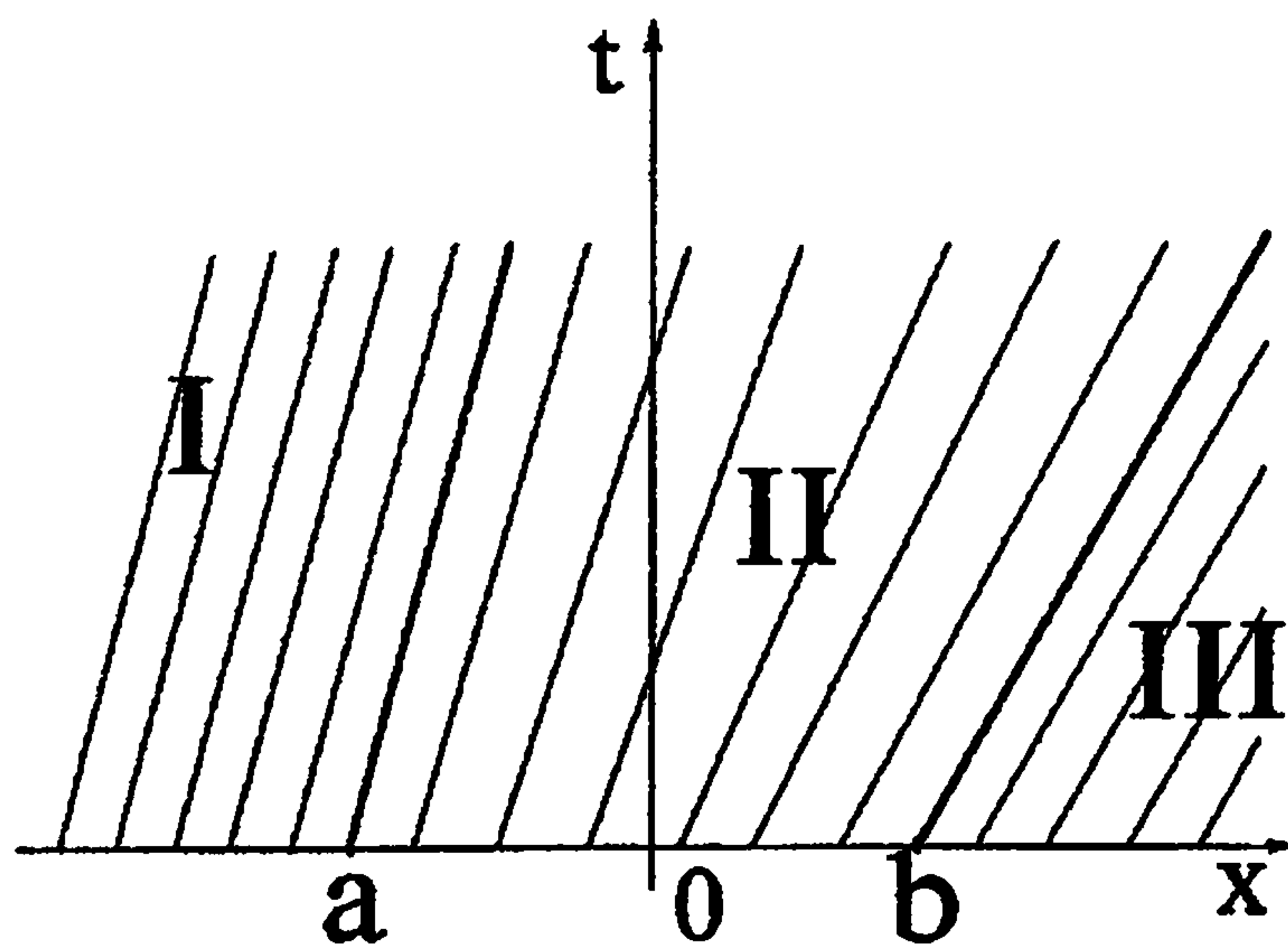


Рис. 11.

11. Точные решения квазилинейного уравнения

Характеристическая система (11.1) уравнения (11.7) имеет решение

$$X(t, x_0, u_0) = x_0 + u_0 t, \quad U(t, x_0, u_0) = u_0, \quad (11.9)$$

которое остается ограниченным при любых значениях t, x_0, u_0 . Пусть $\alpha \geq 0$. Проекция характеристик (11.9) на плоскость $u = 0$ имеют вид, изображенный на рис. 11. В этом случае через каждую точку (t, x) полуплоскости $t \geq 0$ проходит единственная характеристика $x = X(t, x_0, u_0(x_0))$, т.е. уравнение (11.5) имеет единственное решение относительно x_0 . Функция $u(t, x)$ постоянна вдоль характеристик (11.5), поэтому в зоне I, т.е. при $x \leq a + u^- t$,

$$u(t, x) = u^- = \alpha a + \beta,$$

а в зоне III, при $x \geq b + u^+ t$,

$$u(t, x) = u^+ = \alpha b + \beta.$$

В зоне II, при $a + u^- t \leq x \leq b + u^+ t$, уравнение (11.5) разрешается относительно x_0 :

$$x_0 = \frac{x - \beta t}{1 + \alpha t}.$$

По формуле (11.6) определяем решение $u(t, x)$ в зоне II:

$$u(t, x) = u_0(x_0(t, x)) = \alpha \cdot \frac{x - \beta t}{1 + \alpha t} + \beta = \frac{\alpha x + \beta}{1 + \alpha t}.$$

Итак, функция $u(t, x)$ при $\alpha \geq 0$ задается формулой

$$u(t, x) = \begin{cases} u^- = \alpha a + \beta & \text{при } x \leq a + u^- t, \\ \frac{\alpha x + \beta}{1 + \alpha t} & \text{при } a + u^- t \leq x \leq b + u^+ t, \\ u^+ = \alpha b + \beta & \text{при } x \geq b + u^+ t. \end{cases} \quad (11.10)$$

11. Точные решения квазилинейного уравнения

$x^* = -\beta/\alpha$. В зоне I $u(t, x) = u^-$, в зоне III $u(t, x) = u^+$. В зоне II

$$u(t, x) = \frac{\alpha x + \beta}{1 + \alpha t}.$$

Наконец, в зоне IV, функция

$$U(t, x_0(t, x), u_0(x_0(t, x)))$$

трехзначна и принимает три значения:

$$u_1(t, x) = u^-, \quad u_2(t, x) = \frac{\alpha x + \beta}{1 + \alpha t}, \quad u_3(t, x) = u^+.$$

В точке (t^*, x^*) функция U принимает все значения из отрезка $[u^+, u^-]$.

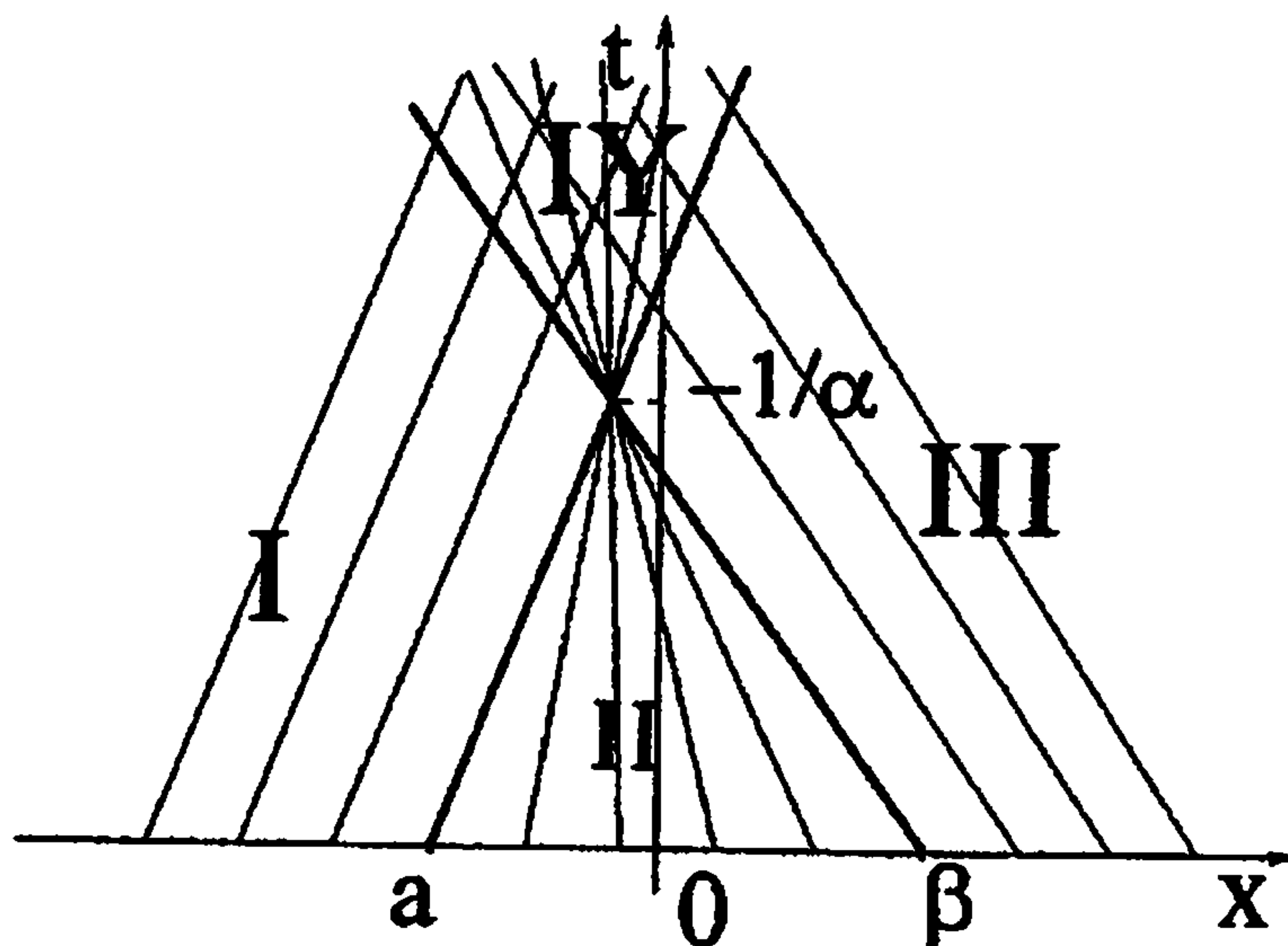


Рис. 13.

Итак, в случае $\alpha < 0$ непрерывное решение $u(t, x)$ задачи Коши (11.7) - (11.8) в широком смысле существует лишь при $t < -1/\alpha$, а интегральная поверхность S определена при всех $t \geq 0$ (рис. 14). Однако при $t \geq -1/\alpha$ она не проектируется однозначно на плоскость $u = 0$.

11.2 Обобщенные решения

Если предположить, что функция $u(t, x)$ описывает какую-либо физическую величину в пространстве переменных t, x , то естественно, что эта величина должна быть однозначной функцией

11.2. Обобщенные решения

t, x . Поэтому задачи физики, приводящиеся к задаче Коши (1.1) - (1.2), требуют определения однозначной функции $u = u(t, x)$. Как мы видели, задача Коши разрешима в широком смысле (т.е. в классе непрерывных функций) далеко не всегда. Следовательно, требуется определить в каком смысле разрывную функцию можно считать решением задачи (1.1) - (1.2). Для этого вводится понятие обобщенного решения.

Определение. Обобщенным решением задачи (1.1) - (1.2) в пространстве кусочно-гладких функций называют функцию $u(t, x)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{\Pi_T} [u\varphi_t + F(u)\varphi_x] dxdt = 0, \quad (11.11)$$

при любой "пробной" функции $\varphi(t, x) \in C_0^\infty(\Pi_T)$, а начальное условие (1.2) выполняется для почти всех $x \in \mathbb{R}$.

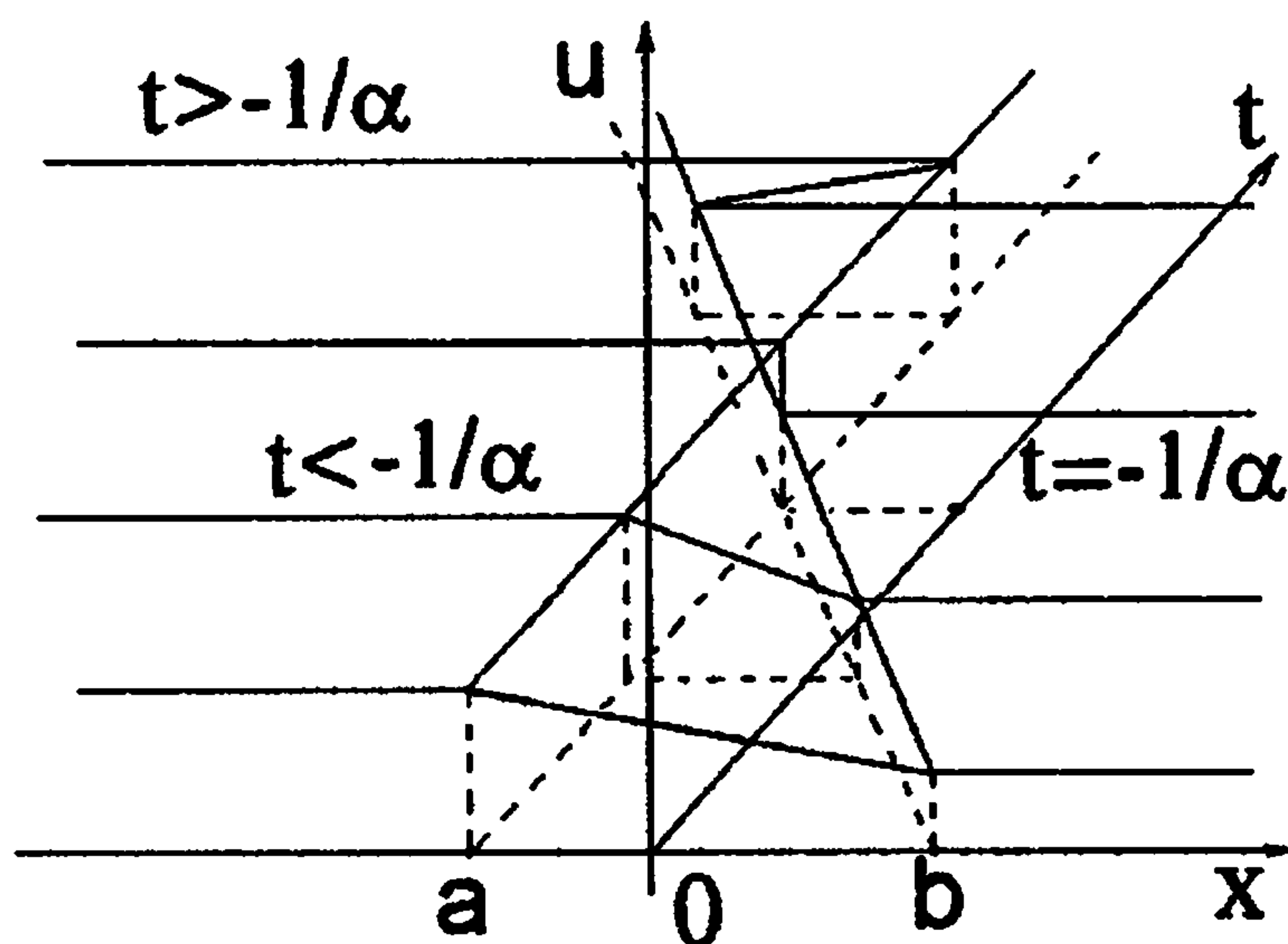


Рис. 14.

Можно показать, что любое обобщенное решение уравнения (1.1) удовлетворяет этому уравнению в точках гладкости. Следовательно, поток векторного поля $(u, F(u))$ через любую гладкую кривую на плоскости (t, x) , ограничивающую область гладкости функции $u(t, x)$, равен нулю. Ясно, что если эта кривая ограничивает область с линиями разрыва $u(t, x)$, то такой закон сохранения

11. Точные решения квазилинейного уравнения

выполняться, вообще говоря, уже не будет. Однако, для любого кусочно непрерывного и кусочно гладкого обобщенного решения уравнения (1.1) в смысле интегрального тождества (11.11) этот важный физический закон, суть которого и выражается уравнением (1.1), выполняется. Дело в том, что на любой линии разрыва обобщенное решение в смысле (11.11) удовлетворяет условию Рэнкина-Гюгонио, которое необходимо и достаточно для того, чтобы любое кусочно-гладкое решение уравнения (1.1) являлось обобщенным решением в смысле интегрального тождества (11.11). Сформулируем теперь это условие.

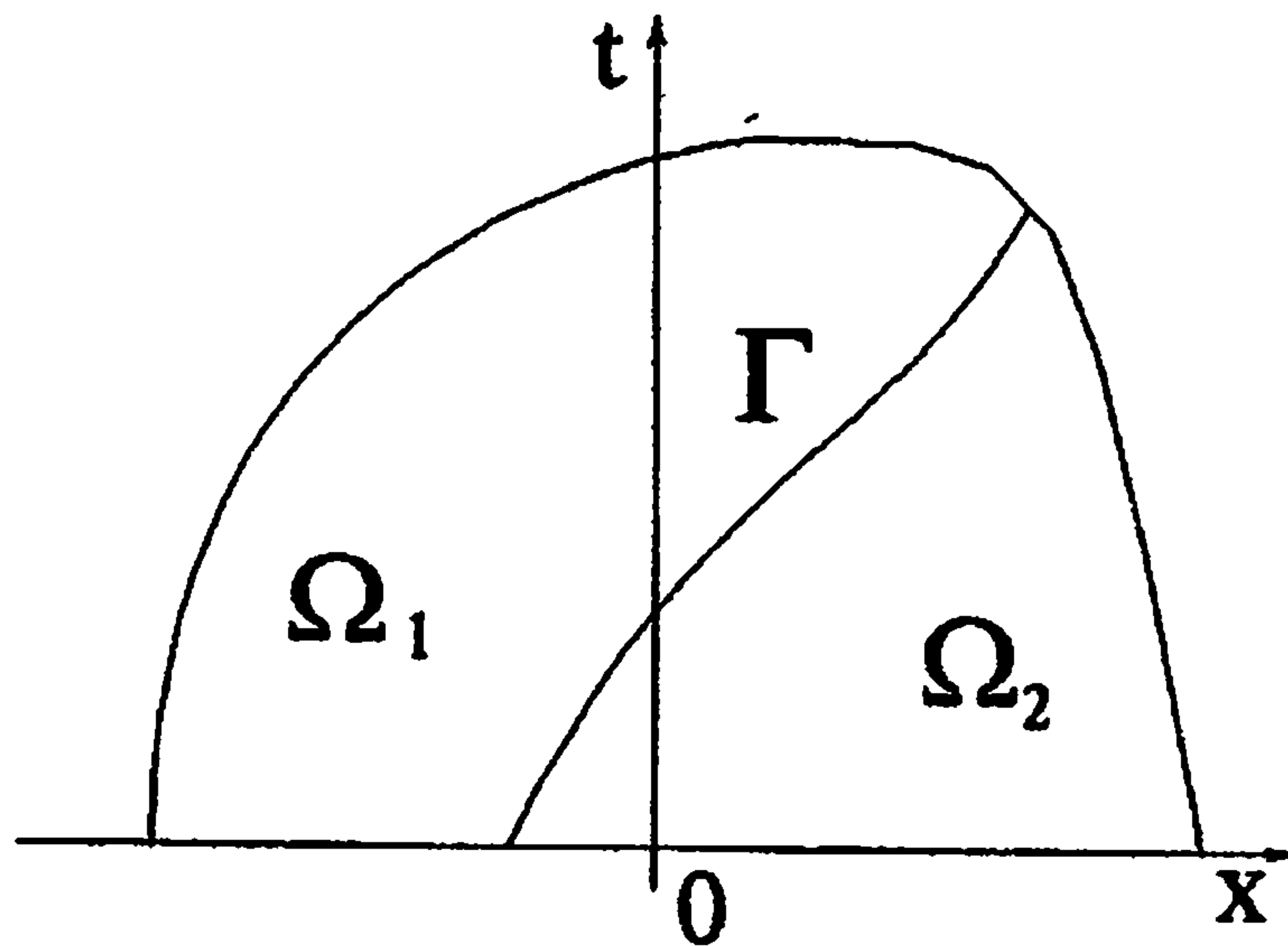


Рис. 15.

Пусть $u(t, x)$ – кусочно гладкое обобщенное решение в смысле интегрального тождества (11.11) уравнения (1.1) в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Точнее пусть Ω делится линией Γ на две части (см. рис. 15) Ω_- и Ω_+ , в каждой из которых функция $u(t, x)$ является гладкой, т.е.

$$u(t, x) \in C^1(\Omega_-) \cap C^1(\Omega_+),$$

и существуют пределы слева (u^-) и справа (u^+) функции u при подходе к Γ .

Таким образом, на кривой Γ в каждой точке $(t_0, x_0) \in \Gamma$ опре-

11.2. Обобщенные решения

делены

$$u^-(t_0, x_0) = \lim_{\substack{(t,x) \rightarrow (t_0, x_0) \\ (t,x) \in \Omega_-}} u(t, x),$$

и

$$u^+(t_0, x_0) = \lim_{\substack{(t,x) \rightarrow (t_0, x_0) \\ (t,x) \in \Omega_+}} u(t, x).$$

Такие разрывы называют разрывами первого рода.

Пусть кривая Γ в области Ω есть график гладкой функции $x = x(t)$. Тогда кусочно-гладкое обобщенное решение $u(t, x)$ уравнения (1.1) удовлетворяет на линии разрыва Γ следующему условию Рэнкина-Гюгонио:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{[F(u)]}{[u]} = \frac{F(u^+) - F(u^-)}{u^+ - u^-}, \quad (11.12)$$

где $[u] = u^+ - u^-$ — скачок функции $u(t, x)$ на линии разрыва Γ , $[F(u)] = F(u^+) - F(u^-)$ — скачок $F(u)$.

Учитывая, что $\frac{dx}{dt} = -\frac{\cos(\nu, t)}{\cos(\nu, x)}$, ($\cos(\nu, x)$ и $\cos(\nu, t)$ — координаты единичной нормали ν к кривой Γ , направленной из Ω_- в Ω_+ , $\cos(\nu, x) \neq 0$), перепишем равенство (11.12) в эквивалентном виде

$$[u]\cos(\nu, t) + [F(u)]\cos(\nu, x) = 0. \quad (11.13)$$

Определение. Ударными волнами называются разрывные решения уравнения (1.1).

Таким образом, условие Рэнкина-Гюгонио (11.12) связывает скорость \dot{x} распространения ударных волн с предельными значениями u^+ и u^- через функцию состояния $F(u)$. Если функция $u(t, x)$ терпит слабый разрыв на линии Γ , т.е. является на ней непрерывной и имеет на Γ лишь разрывы производных $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial x}$, то условие Рэнкина-Гюгонио (11.13), очевидно, выполнено (т.к. $[u] = 0$, и, следовательно, также $[F(u)] = 0$.) Таким образом, кусочно-гладкая непрерывная в области Ω функция $u(t, x)$,

11. Точные решения квазилинейного уравнения

которая в окрестности каждой точки гладкости является классическим решением, будет во всей области Ω обобщенным решением (функция $u(t, x)$ классическим решением в Ω , безусловно, не является, т.к. она не дифференцируема при $(t, x) \in \Gamma \subset \Omega$.)

Однако при таком понимании обобщенного решения оно оказывается неединственным (пример можно найти в [11]). Эффект неединственности связан с наличием разрывов у решения. Следовательно, не любые разрывы допустимы. Естественным требованием к разрывному решению является условие того, что оно должно являться пределом классических решений данного квазилинейного уравнения. Сформулируем условие проверки допустимости разрыва у решения квазилинейного уравнения.

У решения уравнения (1.1) возможен скачок от u^- к u^+ (в направлении возрастания x) при выполнении следующего условия допустимости разрыва:

- в случае $u^- < u^+$ график функции $F(u)$ на отрезке $[u^-, u^+]$ должен быть расположен не ниже хорды с концами $(u^-, F(u^-))$ и $(u^+, F(u^+))$;
- в случае $u^- > u^+$ график функции $F(u)$ на отрезке $[u^+, u^-]$ должен быть расположен не выше хорды с концами $(u^-, F(u^-))$ и $(u^+, F(u^+))$.

В литературе сформулированное выше условие допустимости разрыва называется условием "неубывания энтропии". Дело в том, что нелинейные физические процессы, моделируемые рассматриваемыми уравнениями, — необратимы во времени, а функция, при помощи которой характеризуется необратимость, называется "энтропией".

Вывод условий Рэнкина-Гюгонио и неубывания энтропии можно прочитать в [11].

11.3 Задача Римана для уравнения Хопфа

В качестве примера использования условий Рэнкина-Гюгонио и неубывания энтропии рассмотрим задачу Римана о распаде раз-

11.3. Задача Римана для уравнения Хопфа

рыва для уравнения Хопфа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x) &= \begin{cases} u^- & \text{при } x < 0, \\ u^+ & \text{при } x > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (11.14)$$

Исходное уравнение не меняется при замене $x \rightarrow kx$, $t \rightarrow kt$, начальное условие переходит в себя при преобразовании $x \rightarrow kx$, $k > 0$. Значит, в силу теоремы существования и единственности [12], при указанной замене с положительным k функция $u(t, x)$ переходит в себя:

$$u(kt, kx) = u(t, x) \quad \forall k > 0.$$

Это в точности означает, что $u(t, x)$ остается постоянной на всех лучах $x = \xi t$, $t > 0$, выходящих из начала координат, т.е. является функцией от $\xi = x/t$:

$$u(t, x) = u(x/t), \quad t > 0. \quad (11.15)$$

Решения, зависящие от x/t называются автомодельными. У автомодельных решений, в частности, линии разрыва могут быть только лучами, выходящими из начала координат.

Подставляя (11.15) в уравнение Хопфа, получим

$$-\frac{x}{t^2} u' \left(\frac{x}{t} \right) + \frac{1}{t} u \left(\frac{x}{t} \right) u' \left(\frac{x}{t} \right) = \frac{1}{t} u' \left(\frac{x}{t} \right) \left(u \left(\frac{x}{t} \right) - \frac{x}{t} \right) = 0,$$

т.е. либо $u' = 0$, либо $u = x/t$. Таким образом, все гладкие автомодельные решения уравнения Хопфа являются либо константами, либо функцией x/t .

Наша дальнейшая задача — соединить правильным образом (т.е. с выполнением на лучах разрыва условий Рэнкина-Гюгонио и неубывания энтропии) построенные гладкие автомодельные решения так, чтобы удовлетворить начальному условию $u_0(x)$. Прежде всего выясним, по каким лучам можно "стыковать" различные константы, а также константу и функцию x/t .

11. Точные решения квазилинейного уравнения

Две постоянные функции $u(t, x) \equiv u_1$ и $u(t, x) \equiv u_2$, $u_i = \text{Const}$, как следует из условия Рэнкина-Гюгонио, стыкуются по прямой

$$x = \frac{F(u_2) - F(u_1)}{u_2 - u_1} t = \frac{1}{2} \frac{u_2^2 - u_1^2}{u_2 - u_1} t = \frac{u_2 + u_1}{2} t,$$

причем скачок, из условия допустимости разрыва, возможен только в сторону уменьшения u (при росте x). Таким образом, если для определенности $u_2 > u_1$, то

$$\begin{aligned} u(t, x) &= u_2 && \text{при } x < \frac{u_2 + u_1}{2} t, \\ u(t, x) &= u_1 && \text{при } x > \frac{u_2 + u_1}{2} t. \end{aligned}$$

Что касается стыковки константы $u(t, x) \equiv u_3 = \text{Const}$ и функции $u(t, x) = x/t$, то если они стыкуются по лучу $x = \xi t$, тогда предел функции x/t при подходе к этому лучу равен ξ , и из условия Рэнкина-Гюгонио следует

$$\xi = \frac{dx}{dt} = \frac{F(u_3) - F(\xi)}{u_3 - \xi} = \frac{1}{2} \frac{u_3^2 - \xi^2}{u_3 - \xi} = \frac{u_3 + \xi}{2},$$

т.е. $\xi = u_3$. Последнее означает, что полученная функция непрерывна на луче стыковки $x = \xi t = u_3 t$, $t > 0$.

Теперь мы можем полностью решить задачу Римана о распаде разрыва для уравнения Хопфа. Здесь возможны две принципиально различные ситуации.

1) Если $u^- > u^+$, то решение строится в виде ударной волны — двух констант u^- и u^+ , соединенных по лучу $x = \frac{u^- + u^+}{2} t$ в соответствии с условием Рэнкина-Гюгонио

$$u(t, x) = \begin{cases} u^- & \text{при } x < \frac{u^- + u^+}{2} t, \\ u^+ & \text{при } x > \frac{u^- + u^+}{2} t. \end{cases}$$

11.4. Задача Римана для выпуклой функции состояния

Полученный разрыв, как уже отмечалось, является допустимым в смысле условия неубывания энтропии.

2) Если $u^- < u^+$, то решение строить в виде ударной волны нельзя, т.к. получаемый в этом случае разрыв не удовлетворяет условию неубывания энтропии. Здесь на помощь приходит функция x/t , которая по непрерывности соединяется с u^- и u^+

$$u(t, x) = \begin{cases} u^- & \text{при } x \leq u^-t, \\ x/t & \text{при } u^-t < x < u^+t, \\ u^+ & \text{при } x \geq u^+t. \end{cases}$$

Полученное решение непрерывно во всей полуплоскости $t > 0$. Угол $u^-t < x < u^+t$, $t > 0$, в котором происходит сглаживание разрывных начальных условий, называют областью разрежения, а само решение – центрированной волной разрежения.

11.4 Задача Римана для выпуклой функции состояния

Для уравнения (1.1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0$$

рассмотрим задачу Римана о распаде разрыва с начальной функцией

$$u_0(x) = \begin{cases} u^-, & x < 0, \\ u^+, & x > 0, \end{cases} \quad (11.16)$$

где u^- и u^+ произвольные константы.

В этом разделе мы будем предполагать, что функция состояния $F = F(u)$ является выпуклой. Для определенности будем считать ее выпуклой вниз. В [11] показано, что решение этой задачи сводится к следующим действиям.

11. Точные решения квазилинейного уравнения

I. Если $u^- > u^+$, то решение строится в виде ударной волны, стыкуя две константы u^- и u^+ в соответствии с условием Ранкина-Гюгонио по лучу $\frac{x}{t} = \frac{F(u^+) - F(u^-)}{u^+ - u^-}t, t > 0$:

$$u_0(t, x) = \begin{cases} u^-, & x < \frac{F(u^+) - F(u^-)}{u^+ - u^-}t, \\ u^+, & x > \frac{F(u^+) - F(u^-)}{u^+ - u^-}t. \end{cases} \quad (11.17)$$

II. Если $u^- < u^+$, то решение вида (11.17) не удовлетворяет условию возрастания энтропии. В этом случае решение строится аналогично волне разряжения в случае уравнения Хопфа. Сначала показывается, что функция $\psi(x/t) = (F'(x/t))$ является решением уравнения (1.1) при $t > 0$ (оно также называется волной разряжения), а затем с его помощью склеиваются константы u^- и u^+ из условий непрерывности решения в целом при $t > 0$:

$$u_0(t, x) = \begin{cases} u^-, & x \leq F(u^-)t, \\ \psi(x/t), & F(u^-)t < x < F(u^+)t, \\ u^+, & x \geq F(u^+)t. \end{cases} \quad (11.18)$$

Что касается случая выпуклой вверх функции F , то решение в случае $u^- < u^+$ является ударной волной, описываемой формулой (11.17), а в случае $u^- > u^+$ решением служит волна разряжения, задаваемая формулой (11.18).

Замечание 11.1 Выпуклость функции F нужна лишь на отрезке $[u^-, u^+]$ (или $[u^+, u^-]$).

Пример 11.1 Рассмотрим пример выпуклой вниз функции $F = e^u$. В случае, когда $u^- > u^+$, решением задачи Римана служит функция

$$u(t, x) = \begin{cases} u^-, & x < \frac{e^{u^+} - e^{u^-}}{u^+ - u^-}t, \\ u^+, & x > \frac{e^{u^+} - e^{u^-}}{u^+ - u^-}t, \end{cases} \quad (11.19)$$

11.5. Задача Римана для невыпуклой функции состояния

а если $u^- < u^+$, то функция

$$u(t, x) = \begin{cases} u^-, & x \leq e^{u^-} t, \\ \ln(x/t), & e^{u^-} t < x < e^{u^+} t, \\ u^+, & x \geq e^{u^+} t. \end{cases} \quad (11.20)$$

Пример 11.2 Рассмотрим пример выпуклой вверх на отрезке $[0, \pi]$ функции $F = \sin u$. В случае, когда $0 \leq u^- < u^+ \leq \pi$, решением задачи Римана служит функция

$$u(t, x) = \begin{cases} u^-, & x < \frac{\cos u^+ - \cos u^-}{u^+ - u^-} t, \\ u^+, & x > \frac{\cos u^+ - \cos u^-}{u^+ - u^-} t, \end{cases} \quad (11.21)$$

а если $\pi \geq u^- > u^+ \geq 0$, то функция

$$u(t, x) = \begin{cases} u^-, & x \leq \cos u^- t, \\ \arccos(x/t), & \cos u^- t < x < \cos u^+ t, \\ u^+, & x \geq \cos u^+ t. \end{cases} \quad (11.22)$$

11.5 Задача Римана для невыпуклой функции состояния

Опишем теперь, следуя [11], построение точного решения задачи Римана в случае невыпуклой функции состояния F .

Определение 11.1 Выпуклой вверх оболочкой функции $F(u)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ называют функцию

$$\tilde{F}(u) = \inf_{\tilde{F}(u) \in \Phi} \tilde{F}(u), \quad u \in [\alpha, \beta],$$

где Φ совокупность всех выпуклых вверх функций $\tilde{F}(u)$ таких, что $\tilde{F}(u) \geq F(u)$ при всех $u \in [\alpha, \beta]$.

11. Точные решения квазилинейного уравнения

Определение 11.2 Выпуклой вниз оболочкой функции $F(u)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ называют функцию

$$\tilde{F}(u) = \sup_{\tilde{F}(u) \in \Phi} \tilde{F}(u), \quad u \in [\alpha, \beta],$$

где Φ совокупность всех выпуклых вниз функций $\tilde{F}(u)$ таких, что $\tilde{F}(u) \leq F(u)$ при всех $u \in [\alpha, \beta]$.

Если $F(u)$ – выпуклая вверх (вниз) функция на отрезке $[\alpha, \beta]$, то ее выпуклой вверх (вниз) оболочкой на этом отрезке является она сама, а график ее выпуклой вниз (вверх) оболочки – отрезок, соединяющий точки $\alpha, F(\alpha)$ и $\beta, F(\beta)$. В общем же случае график оболочки состоит из выпуклых (в соответствующую сторону) кусков графика функции $F(u)$ и отрезков, соединяющих эти куски. Каждый такой отрезок будет соответствовать лучу разрыва (ударной волне) построенного решения между двумя гладкими автомодельными решениями вида $u(t, x) = \psi(t, x)$, где $\psi(\xi)$ – функция, обратная к $\xi = F'(u)$.

Пример 11.3 Функция состояния $F(u) = u^3$. Пусть величины $u^- > 0$, а $u^+ < 0$. Решением этой задачи служит функция

$$u(t, x) = \begin{cases} u^-, & x \leq \frac{3}{4}(u^-)^2 t, \\ -\sqrt{\frac{x}{3t}}, & \frac{3}{4}(u^-)^2 t < x < 3(u^+)^2 t, \\ u^+, & x \geq 3(u^+)^2 t. \end{cases} \quad (11.23)$$

В работе [11] задача с функцией состояния $F(u) = u^3$ решена для случая $u^- = 1$ и $u^+ = -1$. Это решение без особых усложнений переносится на более общий случай начальной функции примера 11.5.

Аналогично решается задача, приведенная в следующем примере.

11.6. Закон сохранения

Пример 11.4 Функция состояния $F(u) = u^3$. Пусть величины $u^- < 0$, а $u^+ > 0$. Решением этой задачи служит функция

$$u(t, x) = \begin{cases} u^-, & x \leq \frac{3}{4}(u^-)^2 t, \\ \sqrt{\frac{x}{3t}}, & \frac{3}{4}(u^-)^2 t < x < 3(u^+)^2 t, \\ u^+, & x \geq 3(u^+)^2 t. \end{cases} \quad (11.24)$$

В работе [11] также разобраны следующие примеры решения задач Римана.

Пример 11.5 Функция состояния $F(u) = \sin(u)$. Величины $u^- = 3\pi$, а $u^+ = 0$. Решением этой задачи служит функция

$$u(t, x) = \begin{cases} 3\pi, & x \leq -t, \\ \arccos x/t + 2\pi, & -t < x < 0, \\ \arccos x/t, & 0 < x < t, \\ 0, & x \geq t. \end{cases} \quad (11.25)$$

Пример 11.6 Функция состояния $F(u) = \sin(u)$. Величины $u^- = 0$, а $u^+ = 3\pi$. Решением этой задачи служит функция

$$u(t, x) = \begin{cases} 0, & x \leq -kt, \\ 2\pi - \arccos x/t, & -kt < x < kt, \\ 3\pi, & x \geq kt, \end{cases} \quad (11.26)$$

где величина $k = -\cos u^*$, а величина u^* является наименьшим положительным корнем уравнения

$$\operatorname{tgu}^* = u^*.$$

11.6 Закон сохранения

Условия Рэнкина-Гюгонио можно получить, используя несколько другие соображения, чем было сделано выше. Рассмотрим вывод этих условий, изложенный в книге [7]. Заметим, что решение задачи (1.1) - (1.2)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0,$$

11. Точные решения квазилинейного уравнения

$$u|_{t=0} = u_0(x),$$

имеет неявный вид

$$u = u_0(x - F'_u(u)t), \quad (11.27)$$

построение которого было проведено выше с использованием характеристической системы. Это решение справедливо до такого времени t , пока $u(t, x)$ является однозначной функцией переменной x . При образовании неоднозначности закон распространения волны изменяется, т.к. вместо перехлеста в профиле волны возникает разрыв. Для описания закона распространения волны, содержащей разрыв, получим уравнения, которые связывают между собой начальный профиль волны, координату разрыва и значение решения справа и слева на разрыве.

Предположим, что начальное возмущение является локальным, т.е. удовлетворяет условию

$$u_0(x) = 0 \text{ при } |x| > X \text{ (} X \text{ — некоторое число)}. \quad (11.28)$$

Тогда значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x) dx, \quad (11.29)$$

где $u(t, x)$ является решением задачи (1.1) - (1.2), не будет зависеть от времени.

Для доказательства этого факта вспомним, что скорость возмущения решения уравнения (1.1) конечна, и следовательно, условие локальности 11.28 будет выполнено для функции $u(t, x)$ не только при $t = 0$, но и для любого времени t . После чего проинтегрируем уравнение (1.1) в полосе $[0, T] \times \mathbb{R}$

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} dx dt + \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial F(u(t, x))}{\partial x} dx dt = 0 \quad (11.30)$$

11.6. Закон сохранения

и заметим, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial F(u(t, x))}{\partial x} dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(u(t, x)) - \lim_{x \rightarrow -\infty} F(u(t, x)) = 0 \quad (11.31)$$

в силу локальности возмущения.

Учитывая 11.31 в равенстве 11.30, получаем, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(T, x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u(0, x) dx,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Очевидно, что для равенства нулю второго слагаемого в 11.30 достаточно потребовать, чтобы

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(u(t, x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(u(t, x)),$$

т. е. условие локальности 11.28 можно заменить на равенство функции u вне ограниченной области пространственной переменной некоторой величине или даже разным величинам $u_{-\infty}$ и $u_{+\infty}$, но при условии выполнения равенства

$$F(u_{-\infty}) = F(u_{+\infty}).$$

Независимость интеграла 11.29 от времени t означает сохранение количества движения, объемная плотность которого равна u . Этот результат вполне очевиден и объясняется тем, что рассматриваемый объем среды представляет собой замкнутую систему, на которую не действуют внешние силы. Но система остается замкнутой и после образования разрыва. Следовательно, импульс и в этом случае должен сохраняться.

11. Точные решения квазилинейного уравнения

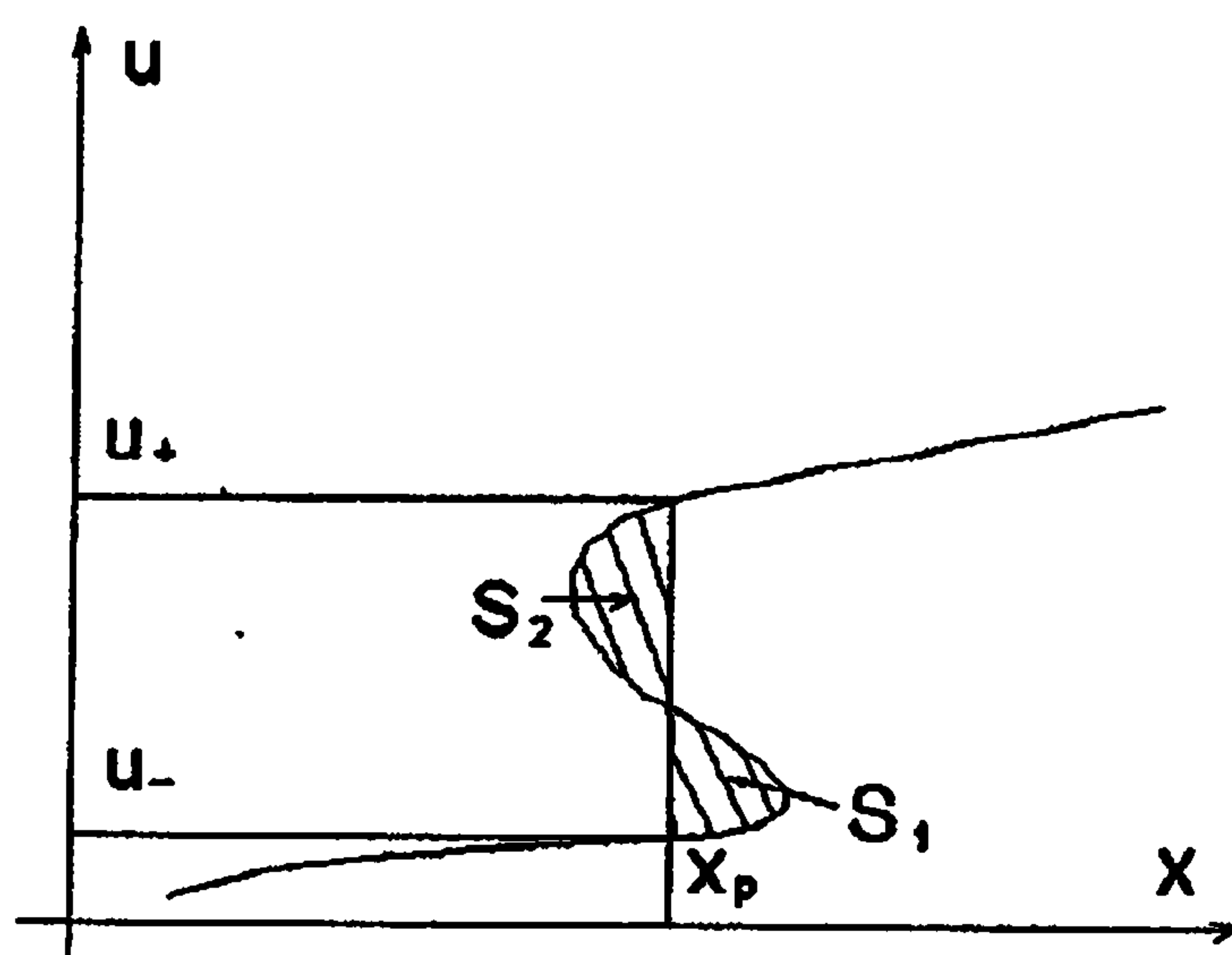


Рис. 16.

Схема построения фронта в неоднозначном профиле волны представлена на рис. 16. Для того чтобы количество движения не изменилось и после образования разрыва, фронт нужно проводить таким образом, чтобы отсекаемые от обеих частей перехлеста площади S_1 и S_2 (заштрихованные на рисунке) были равны.

Определим координату разрыва x_p аналитически. Исходя из рис. 16, правило "равенства площадей" можно записать так:

$$\frac{d}{dt} \int_{u^-}^{u^+} [x(u) - x_p] du = 0$$

или

$$\int_{u^-}^{u^+} \frac{dx(u)}{dt} du = (u^+ - u^-) \frac{dx_p}{dt}.$$

Поскольку неоднозначный профиль искажен в соответствии с решением характеристической системы (11.1),

$$\frac{dx(u)}{dt} = F'_u(u),$$

11.6. Закон сохранения

получаем

$$\int_{u^-}^{u^+} F'_u(u) du = (u^+ - u^-) \frac{dx_p}{dt}.$$

Откуда следует, что

$$F(u) \Big|_{u^-}^{u^+} = (u^+ - u^-) \frac{dx_p}{dt}. \quad (11.32)$$

Полученное равенство 11.32 является уже известным нам условием Рэнкина-Гюгонио (11.12). Эта формула представляет собой дифференциальное уравнение, позволяющее определить координату разрыва x_p по известным параметрам "скачка" $u^-(x)$ и $u^+(x)$.

Полная система уравнений, описывающих движение разрыва будет составлена, если добавить к 11.32 два уравнения для u^- и u^+ . Учитывая, что u^- и u^+ расположены на профиле волны 11.27, получаем

$$u^- = u_0^-(x_p - F'_u(u^-)t), \quad u^+ = u_0^+(x_p - F'_u(u^+)t).$$

Здесь u_0^- и u_0^+ — функции, описывающие форму волны на участках до и после разрыва, т.е. при $x < x_p$ и $x > x_p$. Таким образом, обозначив через f_1 и f_2 функции, обратные к u_0^- и u_0^+ , получаем

$$\begin{aligned} x_p &= f_1(u^-) + F'_u(u^-)t, \\ x_p &= f_2(u^+) + F'_u(u^+)t, \\ \frac{dx_p}{dt} &= \frac{F(u^+) - F(u^-)}{u^+ - u^-}. \end{aligned} \quad (11.33)$$

Это система из трех уравнений для трех неизвестных величин: координаты разрыва x_p и величин $u^-(x)$, $u^+(x)$, определяющих "амплитуду" скачка.

11.6. Закон сохранения

трех уравнений 11.33 нужно решать только два

$$\begin{aligned}x_p &= u^- - 1 + u^- t, \\ \frac{dx_p}{dt} &= u^- / 2.\end{aligned}\tag{11.35}$$

Решая систему 11.35 с учетом начального условия $x_p(0) = 0$, получаем

$$\begin{aligned}x_p &= \sqrt{1+t} - 1, \\ u^- &= 1/\sqrt{1+t}.\end{aligned}\tag{11.36}$$

Таким образом, решение уравнения Бюргерса 11.7 с начальным условием 11.34 равно нулю при $x \leq -1$ и $x \geq \sqrt{1+t} - 1$. Функцию $u(t, x)$ при $x \in [-1; \sqrt{1+t} - 1]$ найдем, решив характеристическую систему

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= u, \\ \frac{dU}{dt} &= 0,\end{aligned}$$

с начальным условием 11.34. В результате получим, что

$$u(t, x) = \frac{1+x}{1+t} \quad \text{при} \quad x \in [-1; \sqrt{1+t} - 1].$$

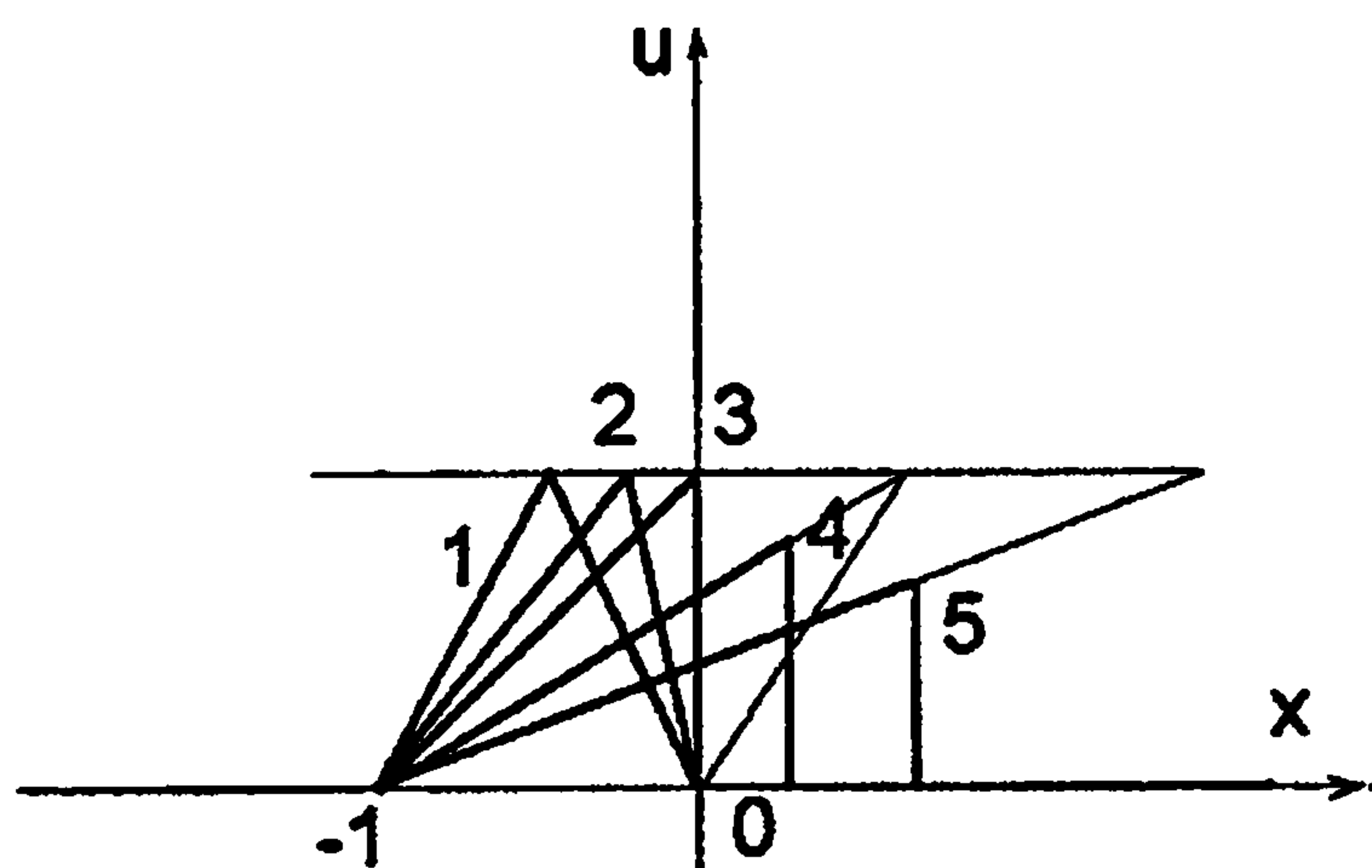


Рис. 18.

11. Точные решения квазилинейного уравнения

Аналогично решаются и другие, более сложные задачи. Например, рассмотрим процесс искажения формы симметричного треугольного импульса, являющегося начальным условием уравнения Бюргера 11.7 (кривая 1 на рис. 18). На первом этапе, до момента образования разрыва, форма возмущения трансформируется в соответствии с решением характеристической системы 11.1 (кривые 2,3). Как только передний фронт импульса примет вертикальное положение (кривая 3), искажение профиля (кривые 4,5) будет описываться найденным выше решением.

11.7 Распространение двуполярного импульса

Решим теперь уравнение Бюргера 11.7

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

с начальным условием в виде двуполярного импульса [16] (см. рис. 19). Пусть

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \quad x \geq b, \\ k_1 x + v_1, & a \leq x \leq 0, \\ k_2 x + v_2, & 0 \leq x \leq b. \end{cases} \quad (11.37)$$

Ниже будем считать, что параметры, задающие функцию u_0 , удовлетворяют неравенствам

$$k_1 \geq 0, \quad k_2 \geq 0, \quad v_1 \geq 0, \quad v_2 \leq 0.$$

При $k_2 = 0, v_2 = 0$ получаем частный случай — однополярный треугольный импульс. Система 11.33 в рассматриваемом случае принимает вид

$$\begin{aligned} x_p &= \frac{u^- - v_1}{k_1} + u^- t, \\ x_p &= \frac{u^+ - v_2}{k_2} + u^+ t, \\ \frac{dx_p}{dt} &= \frac{u^+ + u^-}{2}. \end{aligned}$$

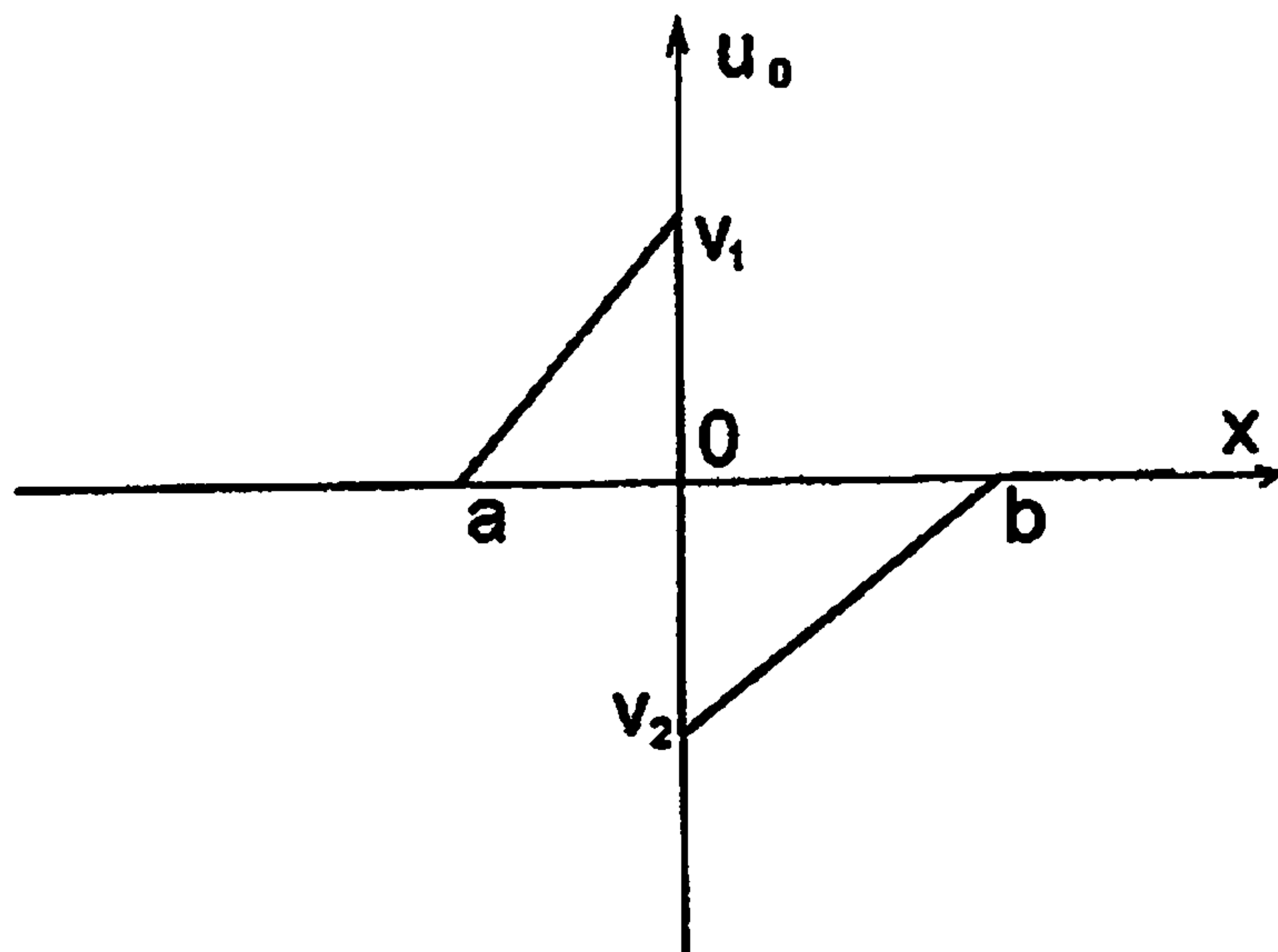


Рис. 19.

Данная система переписывается в следующем виде

$$\begin{aligned} u^- &= \frac{k_1 x_p(t) + v_1}{1 + k_1 t}, \\ u^+ &= \frac{k_2 x_p(t) + v_2}{1 + k_2 t}, \\ \frac{dx_p}{dt} &= \frac{u^+ + u^-}{2}. \end{aligned} \quad (11.38)$$

Подставляя выражения для u^- и u^+ в последнее уравнение системы, получаем

$$\begin{aligned} \frac{dx_p}{dt} &= \frac{1}{2} \left(\frac{k_1 x_p(t) + v_1}{1 + k_1 t} + \frac{k_2 x_p(t) + v_2}{1 + k_2 t} \right), \\ \frac{dx_p}{dt} - \frac{1}{2} \left(\frac{k_1}{1 + k_1 t} + \frac{k_2}{1 + k_2 t} \right) x_p &= \frac{1}{2} \left(\frac{v_1}{1 + k_1 t} + \frac{v_2}{1 + k_2 t} \right), \end{aligned}$$

с начальным условием $x_p(0) = 0$.

Решением при $k_1 \neq k_2$ получившейся дифференциальной задачи является функция

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \\ &= \frac{v_1(1 + k_2 t) - v_2(1 + k_1 t) + (v_2 - v_1)\sqrt{(1 + k_2 t)(1 + k_1 t)}}{k_2 - k_1} = \end{aligned}$$

11. Точные решения квазилинейного уравнения

$$= \frac{1}{k_2 - k_1} \left(v_1 \sqrt{1 + k_2 t} + v_2 \sqrt{1 + k_1 t} \right) \left(\sqrt{1 + k_2 t} - \sqrt{1 + k_1 t} \right).$$

В случае $k_1 = k_2 = k$ для x_p имеем уравнение

$$\frac{dx_p}{dt} - \frac{k}{1 + kt} x_p = \frac{1}{2} \frac{v_1 + v_2}{1 + kt}$$

с тем же начальным условием $x_p(0) = 0$. Решением этой задачи является функция

$$x_p(t) = \frac{1}{2} (v_1 + v_2) t. \quad (11.39)$$

При $k_1 \neq k_2$ приведем формулу для $x_p(t)$ к более удобному виду:

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \\ &= \frac{1}{k_2 - k_1} \left(v_1 \sqrt{1 + k_2 t} + v_2 \sqrt{1 + k_1 t} \right) \left(\sqrt{1 + k_2 t} - \sqrt{1 + k_1 t} \right) = \\ &= \frac{1}{k_2 - k_1} \frac{v_1 \sqrt{1 + k_2 t} + v_2 \sqrt{1 + k_1 t}}{\sqrt{1 + k_2 t} + \sqrt{1 + k_1 t}} \left((1 + k_2 t) - (1 + k_1 t) \right) = \\ &= \frac{v_1 \sqrt{1 + k_2 t} + v_2 \sqrt{1 + k_1 t}}{\sqrt{1 + k_2 t} + \sqrt{1 + k_1 t}} t. \end{aligned} \quad (11.40)$$

С помощью полученных соотношений для $x_p(t)$ найдем время t , при котором двуполярный треугольный импульс становится однополярным треугольным.

Обратимся к формуле 11.37. Пусть v_1 , v_2 , k_1 и k_2 не равны нулю и

$$v_1 = -\mu v_2, \quad \text{при } \mu > 0,$$

$$k_1 = \lambda k_2, \quad \text{при } \lambda > 0.$$

S_1 , S_2 – площади верхнего и нижнего треугольников соответственно при $t = 0$. Тогда

$$x_p(t) = \frac{v_2 t \left(\sqrt{1 + \lambda k_2 t} - \mu \sqrt{1 + k_2 t} \right)}{\sqrt{1 + k_2 t} + \sqrt{1 + \lambda k_2 t}},$$

11.7. Распространение двуполярного импульса

$$S_1 = -\frac{1}{2}v_1 a = \frac{v_1^2}{2k_1},$$

$$S_2 = -\frac{1}{2}v_2 b = \frac{v_2^2}{2k_2},$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 \frac{k_2}{k_1} = \frac{\mu^2}{\lambda}.$$

Решим уравнение $x_p(t_0) = b$, т.е. уравнение

$$\frac{v_2 t_0 \left(\sqrt{1 + \lambda k_2 t_0} - \mu \sqrt{1 + k_2 t_0} \right)}{\sqrt{1 + k_2 t_0} + \sqrt{1 + \lambda k_2 t_0}} = -\frac{v_2}{k_2}.$$

Если это уравнение имеет положительное решение t_0 , то при $t = t_0$ разрыв будет иметь координату b , т.е. импульс превратится в треугольный.

$$k_2 t_0 \left(\mu \sqrt{1 + k_2 t_0} - \sqrt{1 + \lambda k_2 t_0} \right) = \sqrt{1 + k_2 t_0} + \sqrt{1 + \lambda k_2 t_0},$$

$$\sqrt{1 + k_2 t_0} (\mu k_2 t_0 - 1) = \sqrt{1 + \lambda k_2 t_0} (t_0 k_2 + 1),$$

$$(\mu k_2 t_0 - 1) = \sqrt{(1 + \lambda k_2 t_0)(1 + t_0 k_2)},$$

$$(\mu k_2 t_0 - 1)^2 = (1 + \lambda k_2 t_0)(1 + t_0 k_2).$$

После того как получим решение последнего уравнения, необходимо проверить, что

$$\mu k_2 t_0 - 1 \geq 0. \quad (11.41)$$

Решим последнее уравнение

$$1 - 2\mu k_2 t_0 + \mu^2 k_2^2 t_0^2 = 1 + (1 + \lambda)k_2 t_0 + \lambda t_0^2 k_2^2,$$

$$k_2 t_0 (1 + 2\mu + \lambda) = t_0^2 k_2^2 (\mu^2 - \lambda).$$

Поскольку $t_0 k_2 \neq 0$, то

$$t_0 = \frac{1 + 2\mu + \lambda}{k_2 (\mu^2 - \lambda)}. \quad (11.42)$$

11. Точные решения квазилинейного уравнения

Поскольку в силу наших предположений величины λ , μ и k_2 положительны, то значение t_0 , полученное по формуле 11.42, положительно лишь при $\mu^2 - \lambda > 0$, т.е. при $S_1 > S_2$. Проверим, что при $\mu^2 - \lambda > 0$ выполняется условие 11.41. Действительно,

$$\mu \frac{1 + 2\mu + \lambda}{\lambda - \mu^2} - 1 = \frac{\lambda - \mu^2 + 2\mu^2 + \lambda\mu + \mu}{\mu^2 - \lambda} = \frac{\lambda + \mu^2 + \lambda\mu + \mu}{\mu^2 - \lambda} \geq 0.$$

Итак, мы получили, что уравнение $x_p(t) = b$ имеет положительное решение, определяемое формулой 11.42 лишь при $S_1 > S_2$.

Аналогично для уравнения $x_p(t) = a$, положительное решение существует лишь при $S_1 < S_2$, и оно определяется по формуле

$$t_0 = \frac{\mu(2\lambda + \mu + \mu\lambda)}{\lambda k_2(\lambda - \mu^2)}. \quad (11.43)$$

Как движется двуполярный импульс при возрастании t ?

Пусть $u(t=0, x) = u_0(x)$, где $u_0(x)$ задается формулой 11.37. Если $S_1 > S_2$, то на промежутке $t < t_0$, где t_0 определяется формулой 11.42, импульс остается двуполярным и в момент t описывается функцией

$$u(t, x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, x \geq b, \\ \frac{k_1 x + v_1}{1 + k_1 t}, & x \in [a, x_p], \\ \frac{k_2 x + v_2}{1 + k_2 t}, & x \in [x_p, b]. \end{cases} \quad (11.44)$$

Здесь $x_p(t)$ находится из формулы 11.40.

При $t = t_0$ сигнал превращается в треугольный:

$$u(t_0, x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, x > b, \\ \frac{k_1 x + v_1}{1 + k_1 t_0}, & x \in [a, b]. \end{cases}$$

Делая замену $\tilde{t} = t - t_0$, $\tilde{x} = x - b$ и применяя формулу 11.40 для случая

$$\tilde{v}_2 = \tilde{k}_2 = 0, \quad \tilde{k}_1 = \frac{k_1}{1 + k_1 t_0}, \quad \tilde{v}_1 = \frac{k_1 b + v_1}{1 + k_1 t_0},$$

11.7. Распространение двуполярного импульса

получаем, что при $t \geq t_0$, функции, описывающие форму сигнала, имеют вид

$$u(t, x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, x > x_p, \\ \frac{\tilde{k}_1 \tilde{x} + \tilde{v}_1}{1 + \tilde{k}_1 \tilde{t}_0}, & x \in [a, x_p], \end{cases}$$

где $x_p(t) = \tilde{x}_p(\tilde{t}) + b$,

$$\tilde{x}_p(\tilde{t}) = \frac{\tilde{v}_1}{\tilde{k}_1} \left(\sqrt{1 + \tilde{t} \tilde{k}_1} - 1 \right).$$

Если $S_1 < S_2$, то при $t \in [0, t_0)$, где t_0 определяется формулой 11.43, импульс описывается функцией 11.44 и является двуполярным. При $t = t_0$ импульс становится треугольным

$$u(t_0, x) = \begin{cases} 0, & x < a, x \geq b, \\ \frac{k_2 x + v_2}{1 + k_2 t_0}, & x \in [a, b]. \end{cases}$$

При $t \geq t_0$ для $u(t, x)$ имеем

$$u(t, x) = \begin{cases} 0, & x < x_p, x \geq b, \\ \frac{\tilde{k}_2 \tilde{x} + \tilde{v}_2}{1 + \tilde{k}_2 \tilde{t}_0}, & x \in [x_p, b], \end{cases}$$

где

$$\tilde{k}_2 = \frac{k_2}{1 + k_2 t_0}, \quad \tilde{v}_2 = \frac{k_2 a + v_2}{1 + k_2 t_0},$$

$$x_p(t) = \tilde{x}_p(\tilde{t}) + a, \quad \tilde{t} = t - t_0, \quad \tilde{x} = x - a,$$

$$\tilde{x}_p(\tilde{t}) = \frac{\tilde{v}_2}{\tilde{k}_2} \left(\sqrt{1 + \tilde{t} \tilde{k}_2} - 1 \right).$$

11.8 Примеры распространения двуполярного импульса

Рассмотрим несколько конкретных начальных двуполярных импульсов и на их примере разберем, описанный в разделе 11.7 общий случай их распространения.

Пример 11.7 Пусть

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, x \geq 1, \\ x + 1, & -1 \leq x \leq 0, \\ x - 1, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рисунке 20.

В этом случае

$$k_1 = 1, v_1 = 1, k_2 = 1, v_2 = -1$$

и система (11.38) принимает вид

$$u^- = \frac{x_p(t) + 1}{1 + t}, \quad u^+ = \frac{x_p(t) - 1}{1 + t},$$

$$\frac{dx_p}{dt} = \frac{u^+ + u^-}{2} = \frac{x_p(t)}{1 + t}.$$

Решая эту систему, получаем, что $x_p(t) = c(t + 1)$.

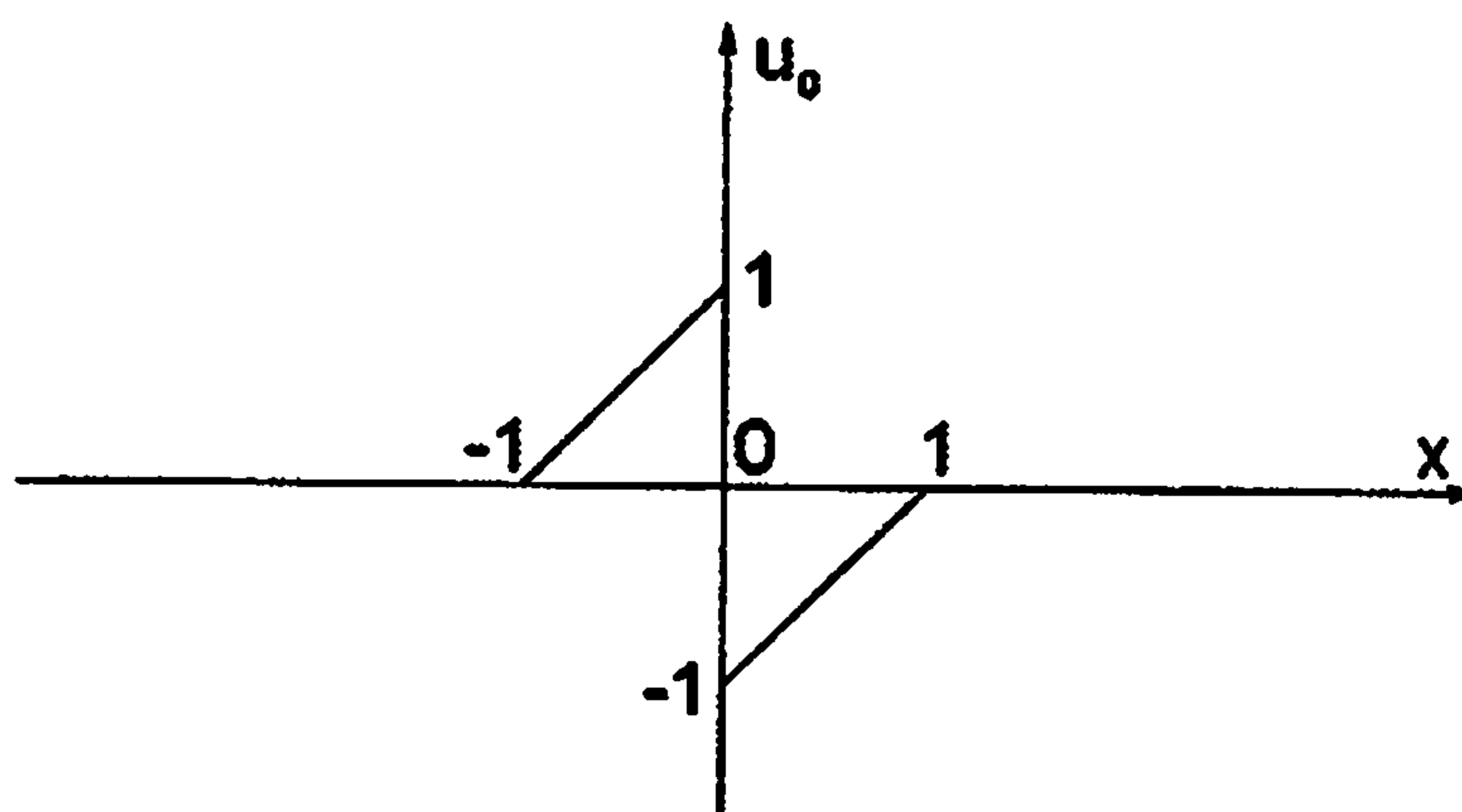


Рис. 20.

11.8. Примеры распространения двуполярного импульса

При $t = 0$ координата разрыва равна нулю: $x_p(0) = 0$. Следовательно, $c = 0$. Тогда $x_p(t) \equiv 0$, т.е. разрыв остается на месте. Такой же вывод можно было сделать на основании формулы (11.39). Значения решения в точке разрыва равны

$$u^- = \frac{1}{1+t}, \quad u^+ = -\frac{1}{1+t}.$$

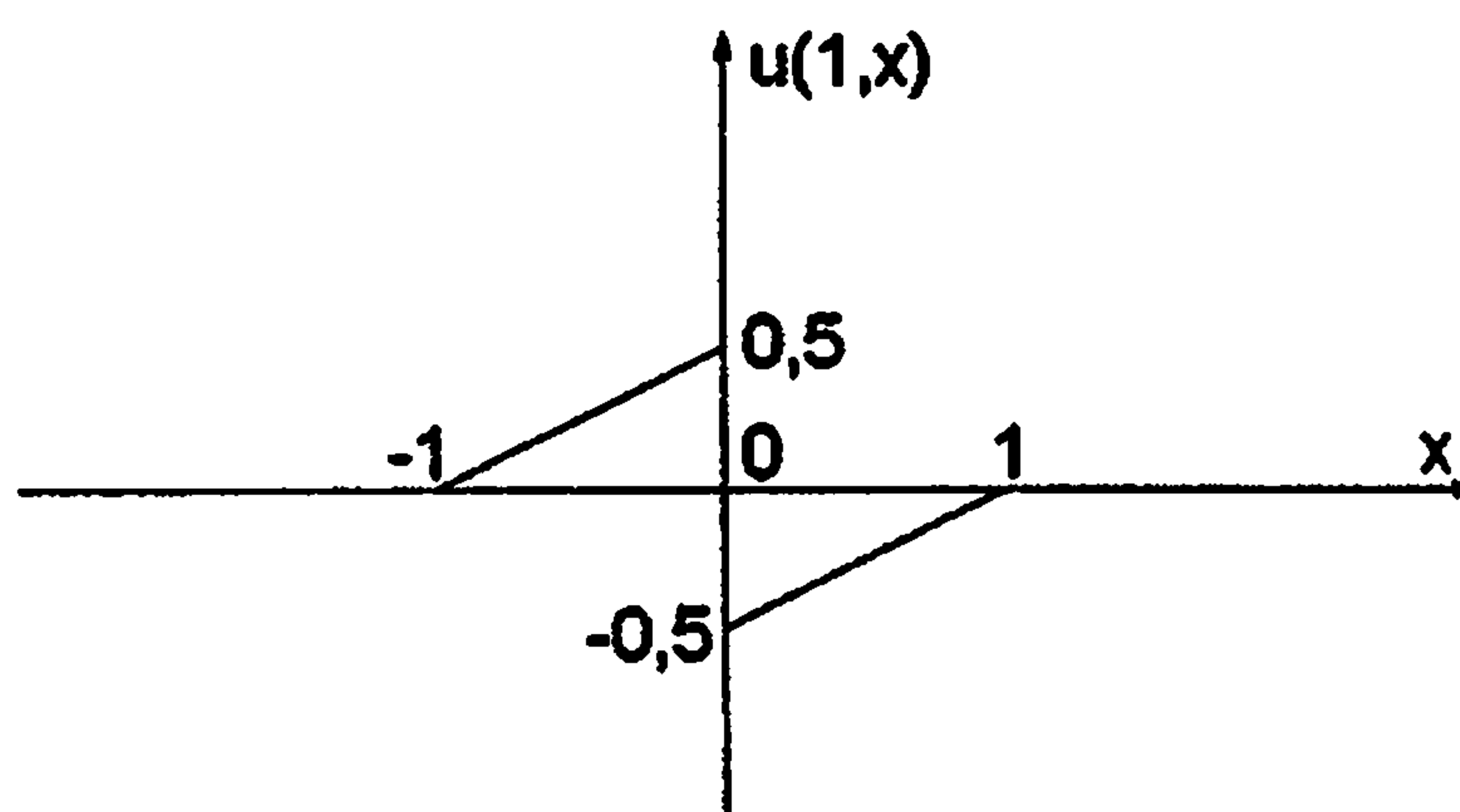


Рис. 21.

Этот результат согласуется с законом сохранения: суммарная площадь импульса остается равной нулю. Например, при $t = 1$ $u^- = \frac{1}{2}$, $u^+ = -\frac{1}{2}$ (см. рис. 21). При $t \rightarrow +\infty$ u^+ , $u^- \rightarrow 0$ импульсы постепенно "поглощают" друг друга.

Пример 11.8 Пусть

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -3, x \geq 1, \\ x + 3, & -3 \leq x \leq 0, \\ x - 1, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рисунке 22.

Здесь

$$k_1 = 1, v_1 = 3, k_2 = 1, v_2 = -1,$$

и система (11.38) принимает вид

11. Точные решения квазилинейного уравнения

$$u^- = \frac{x_p(t) + 3}{1+t}, \quad u^+ = \frac{x_p(t) - 1}{1+t},$$

$$\frac{dx_p}{dt} = \frac{x_p(t) + 1}{1+t}.$$

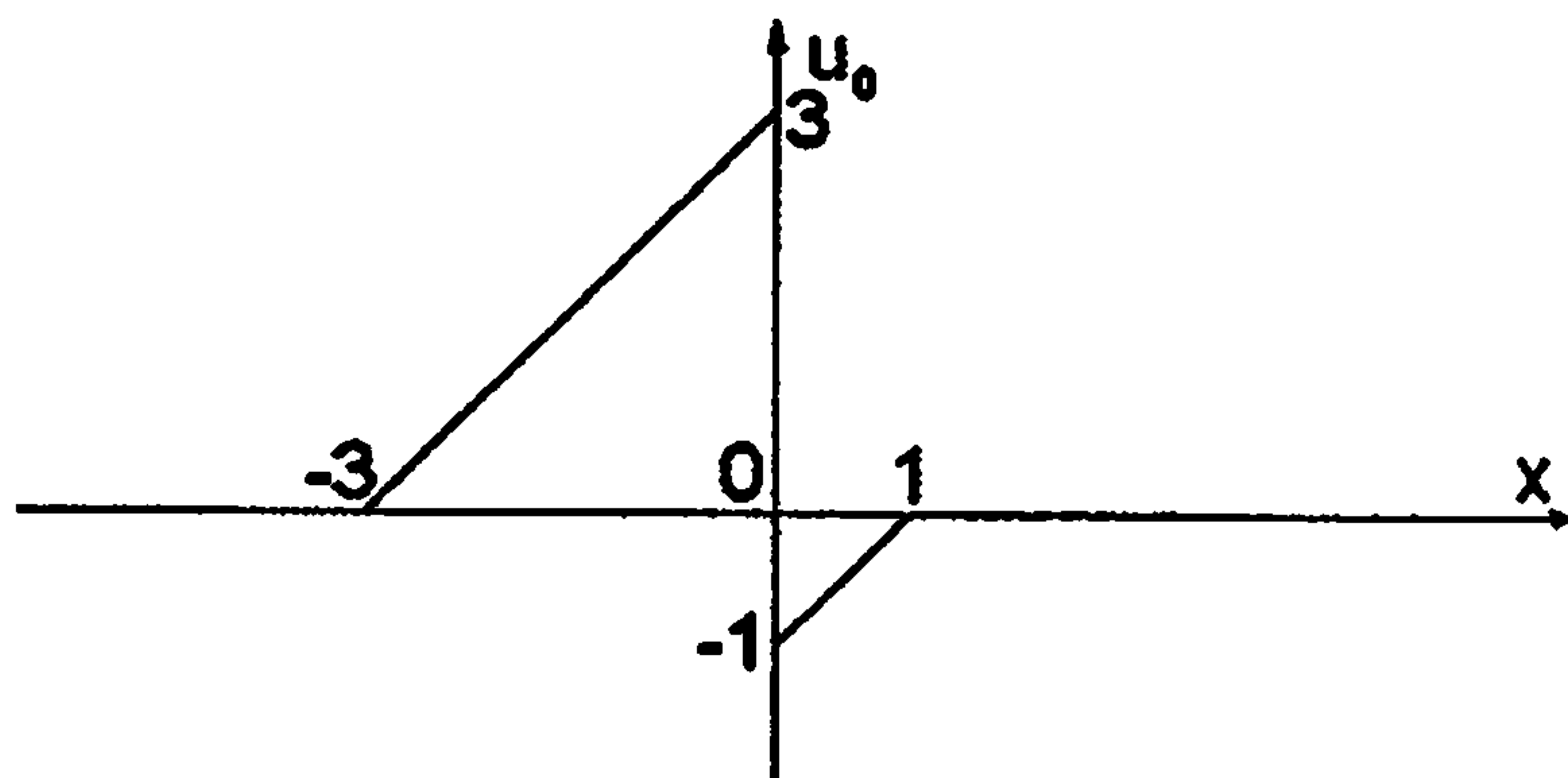


Рис. 22.

Откуда $x_p(t) + 1 = c(1+t)$, $x_p(t) = -1 + c(1+t)$. В начальный момент разрыв в нуле: $0 = -1 + c$. Значит, $x_p(t) = t$ - разрыв движется вправо с постоянной скоростью $\frac{dx_p}{dt} = 1$. Это также видно из формулы (11.39).

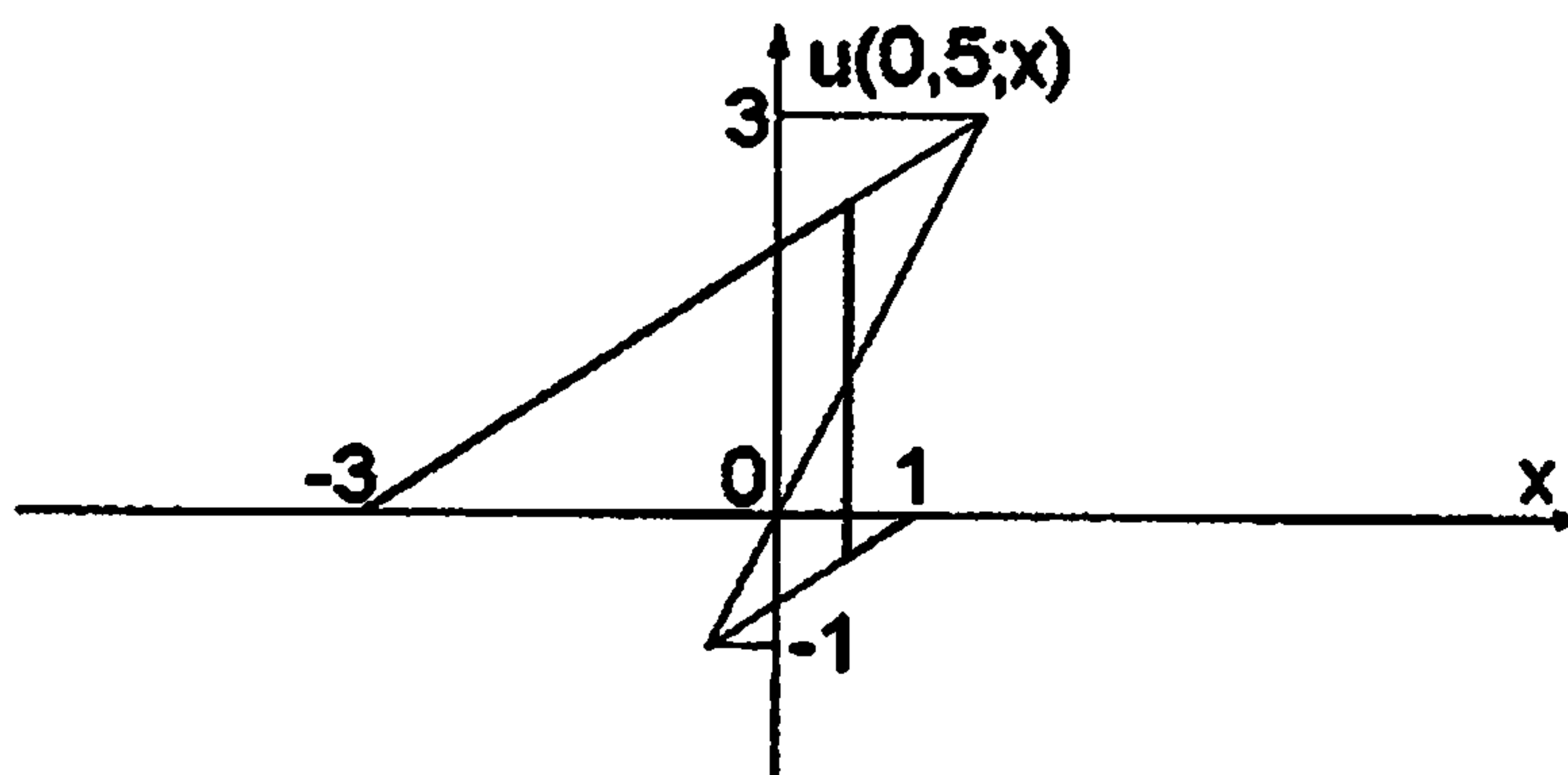


Рис. 23.

11.8. Примеры распространения двуполярного импульса

Импульс становится однополярным треугольным в момент времени $t = 1$, когда его координата становится равной $x_p = 1$.

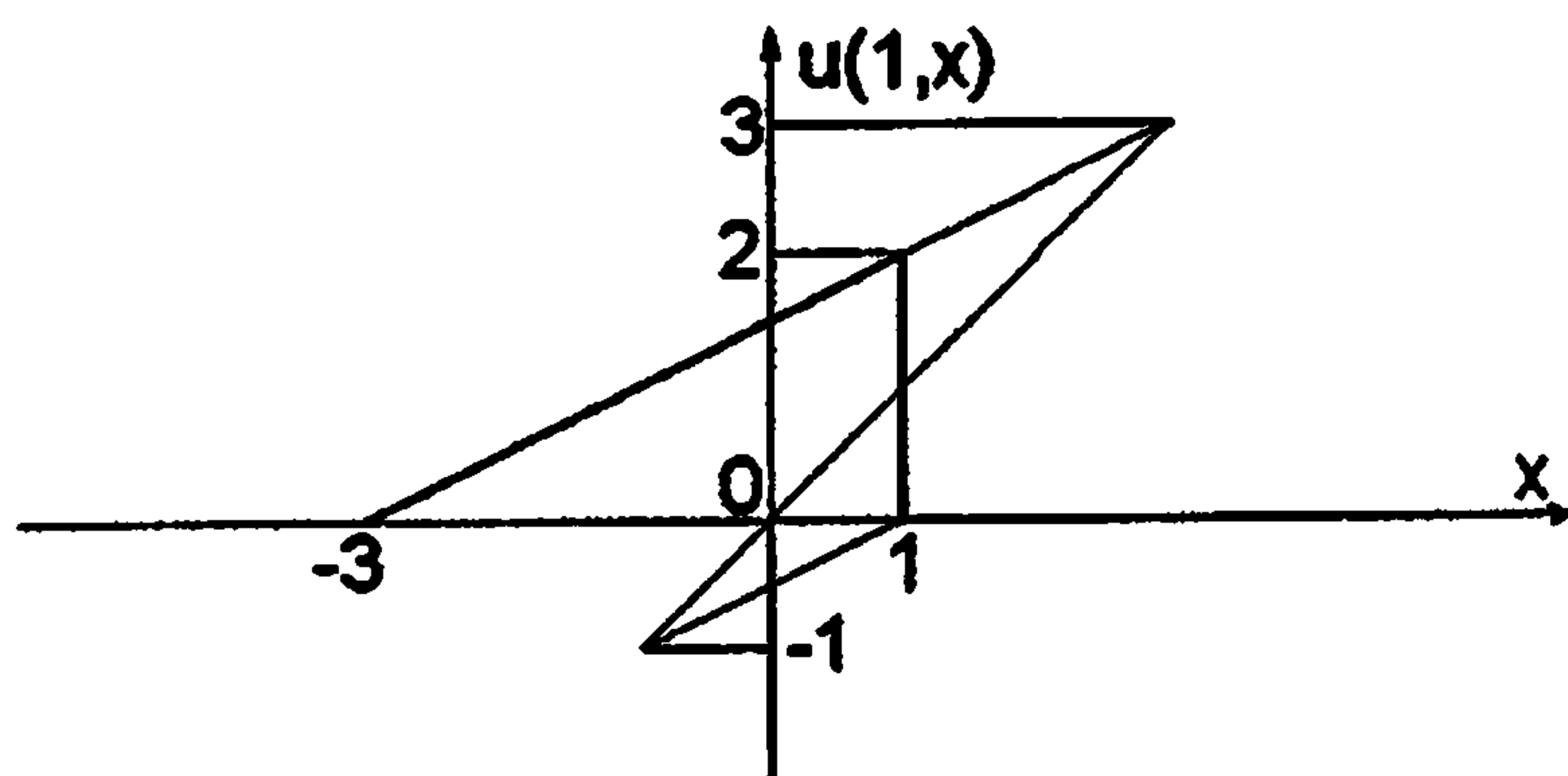


Рис. 24.

При $t \in [0, 1)$ $u^- = \frac{t+3}{1+t}$, $u^+ = \frac{t-1}{1+t}$. Например, при $t = \frac{1}{2}$ $x_p = \frac{1}{2}$, $u^- = \frac{7}{3}$, $u^+ = -\frac{1}{3}$ (см. рис. 23).

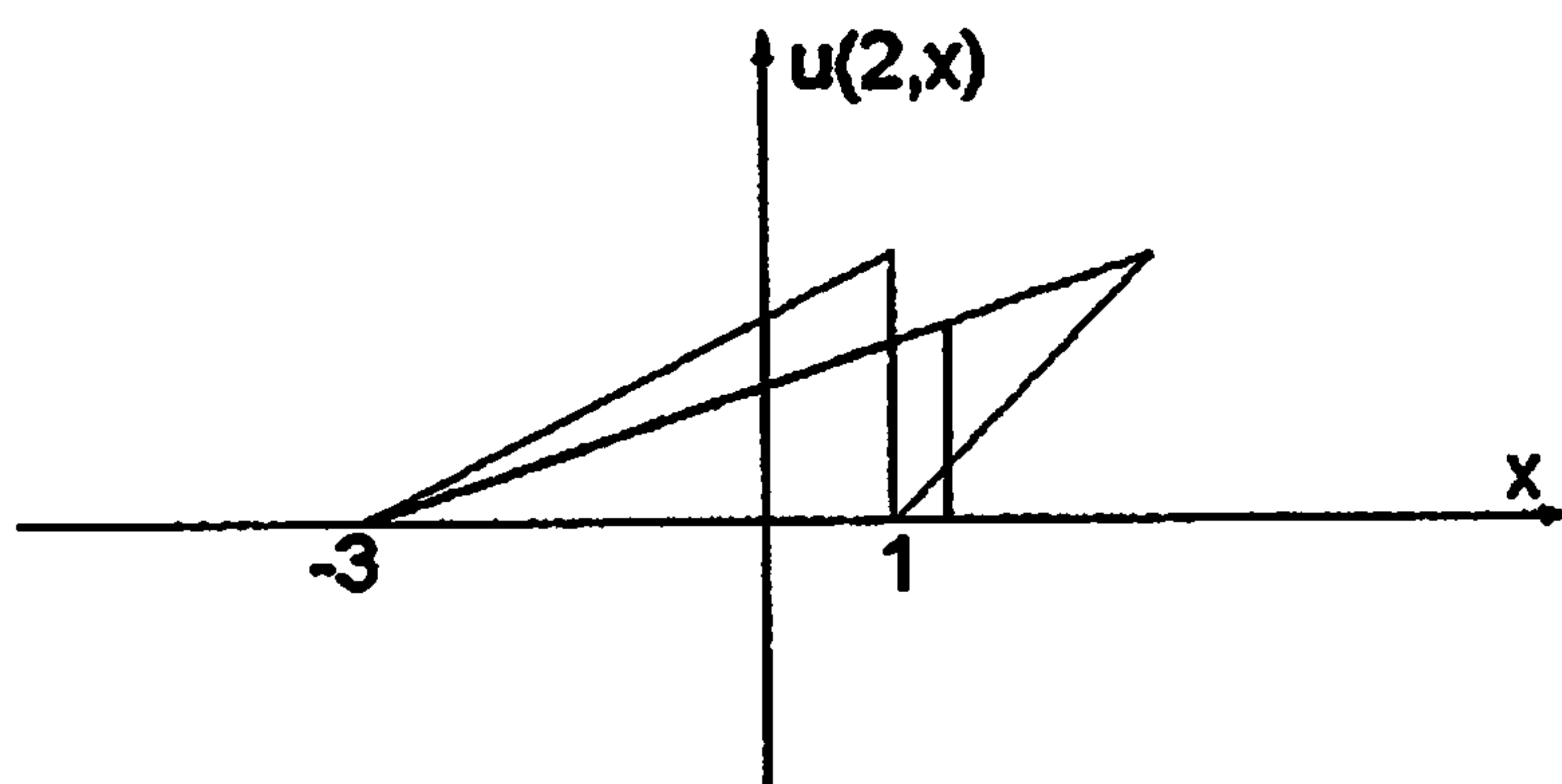


Рис. 25.

В момент $t = 1$ $x_p = 1$, $u^- = 2$, $u^+ = 0$, левый импульс полностью "поглощает" правый (см. рис. 24).

$$u(1, x) = \begin{cases} 0, & x \leq -3, x \geq 1, \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, & -3 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Далее разрыв движется вправо с убывающей скоростью, по

11. Точные решения квазилинейного уравнения

закону распространения однополярного треугольного импульса, описанному в разделе 11.6. Амплитуда разрыва уменьшается (см. рис 25).

Пример 11.9 Пусть

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -3, x \geq 2, \\ x + 3, & -3 \leq x \leq 0, \\ 2x - 4, & 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рисунке 26.

В этом случае

$$k_1 = 1, v_1 = 3, k_2 = 2, v_2 = -4.$$

и система (11.38) принимает вид

$$u^- = \frac{x_p(t) + 3}{1 + t}, \quad u^+ = \frac{2x_p(t) - 4}{1 + 2t},$$
$$\frac{dx_p}{dt} = \frac{u^+ + u^-}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{x_p(t) + 3}{1 + t} + \frac{2x_p(t) - 4}{1 + 2t} \right).$$

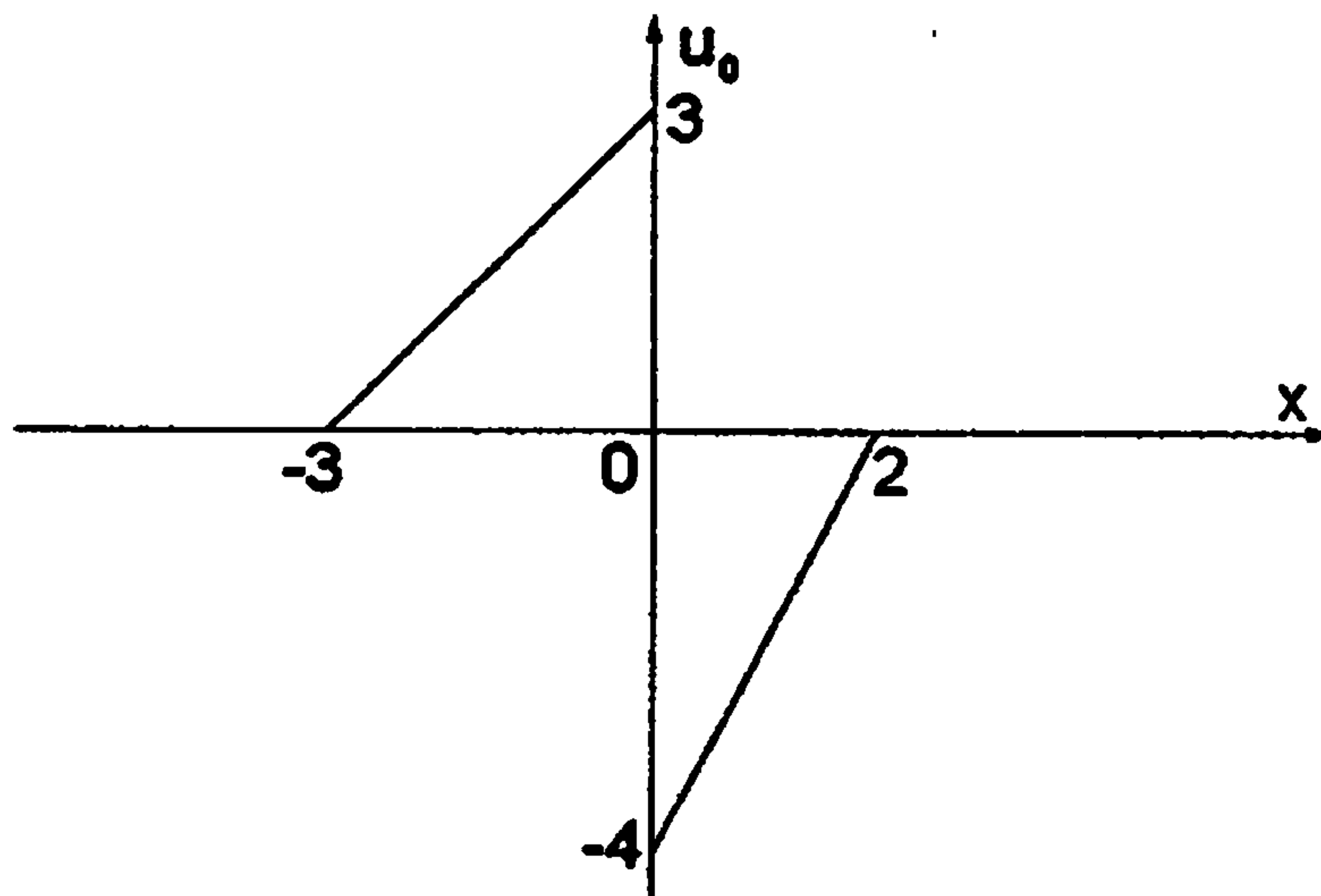


Рис. 26.

Решим однородное уравнение

$$\frac{dx_{od}}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{x_{od}}{1 + t} + \frac{2x_{od}}{1 + 2t} \right),$$

11.8. Примеры распространения двуполярного импульса

$$\ln x_{од} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{2}{1+2t} \right) dt = \frac{1}{2} (\ln(1+t) + \ln(1+2t) + c'),$$

$$x_{од} = c(1+t)^{\frac{1}{2}}(1+2t)^{\frac{1}{2}}.$$

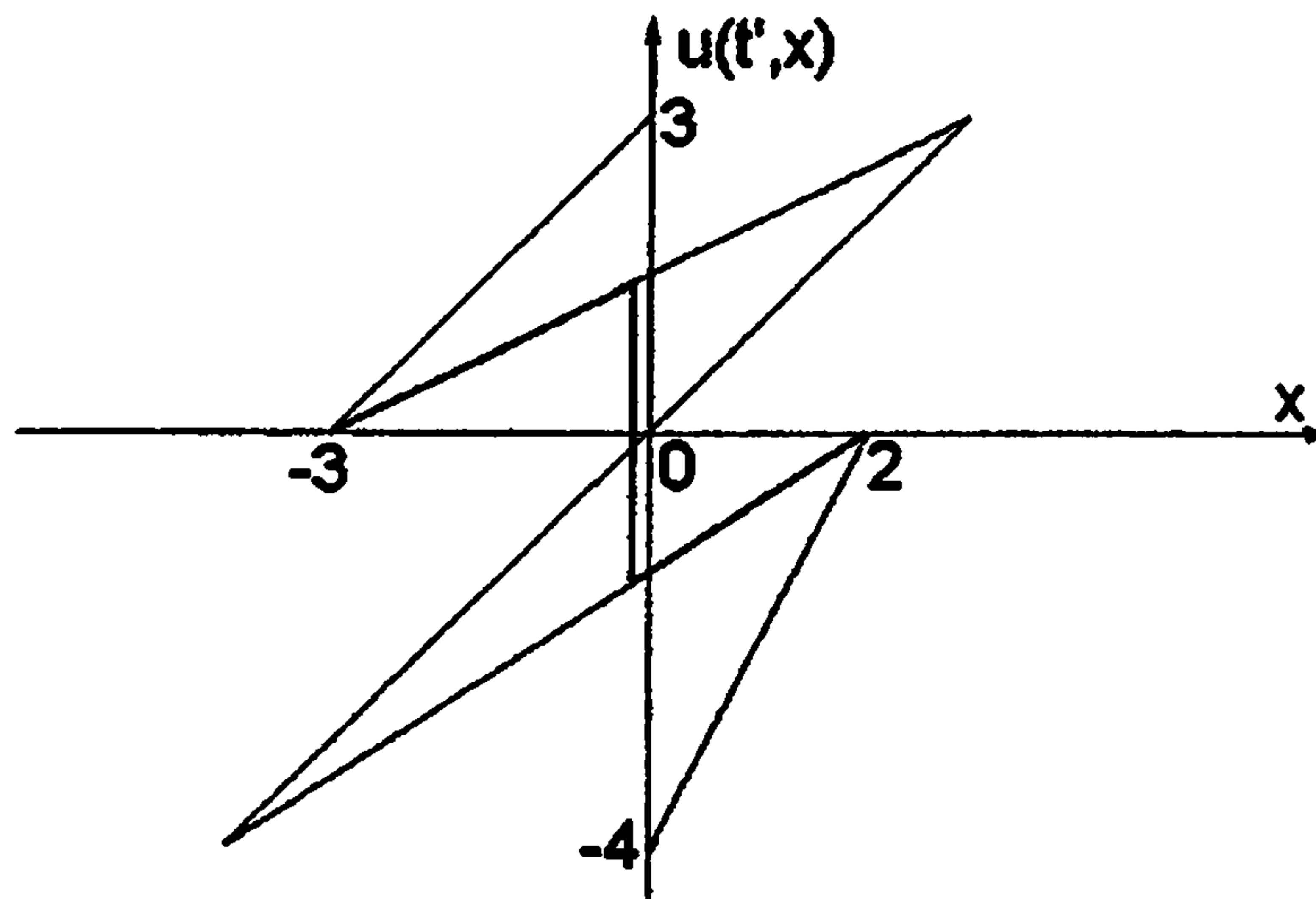


Рис. 27.

Теперь решим неоднородное уравнение, для этого подставим в него $x_p(t) = c(t)x_{од}$, где $x_{од} = (1+t)^{\frac{1}{2}}(1+2t)^{\frac{1}{2}}$ - удовлетворяет однородному уравнению.

$$\begin{aligned} c(t) \frac{dx_{од}}{dt} + c'(t)(1+t)^{\frac{1}{2}}(1+2t)^{\frac{1}{2}} &= \\ &= \frac{c(t)}{2} \left(\frac{x_{од}}{1+t} + \frac{2x_{од}}{1+2t} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{1+t} - \frac{4}{1+2t} \right). \end{aligned}$$

Первые слагаемые слева и справа взаимно уничтожаются, поэтому

$$\begin{aligned} c(t) &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{3}{(1+t)^{\frac{3}{2}}(1+2t)^{\frac{1}{2}}} - \frac{4}{(1+t)^{\frac{1}{2}}(1+2t)^{\frac{3}{2}}} \right) dt = \\ &\quad (1+t = b^2, dt = 2bdb) \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{3 \cdot 2b}{b^3(2b^2-1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{4 \cdot 2b}{b(2b^2-1)^{\frac{3}{2}}} \right) db = \end{aligned}$$

11. Точные решения квазилинейного уравнения

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{6}{b^3(2 - \frac{1}{b^2})^{\frac{1}{2}}} - \frac{8}{b^3(2 - \frac{1}{b^2})^{\frac{3}{2}}} \right) db = \\
 &= \frac{1}{2} \int \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{6}{(2 - \frac{1}{b^2})^{\frac{1}{2}}} - \frac{8}{(2 - \frac{1}{b^2})^{\frac{3}{2}}} \right) d\frac{1}{b^2} = \\
 &= -\frac{1}{4} \left(-6 \left(2 - \frac{1}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 + \frac{8 \cdot 2}{-(2 - \frac{1}{b^2})^{\frac{1}{2}}} \right) + c_0 = \\
 &\qquad\qquad\qquad (b^2 = 1 + t) \\
 &= 3 \left(\frac{1 + 2t}{1 + t} \right)^{\frac{1}{2}} + 4 \left(\frac{1 + t}{1 + 2t} \right)^{\frac{1}{2}} + c_0.
 \end{aligned}$$

Итак, $x_p(t) = 3(1 + 2t) + 4(1 + t) + c_0(1 + 2t)^{\frac{1}{2}}(1 + t)^{\frac{1}{2}}$. В начальный момент разрыв в нуле. Значит, $0 = 3 + 4 + c_0$, и следовательно, $c_0 = 7$. Таким образом, зависимость координаты разрыва от времени получается следующая:

$$x_p(t) = 10t + 7 - 7\sqrt{1 + t}\sqrt{1 + 2t}.$$

Заметим, что этот закон в общем случае записан формулой (11.40).

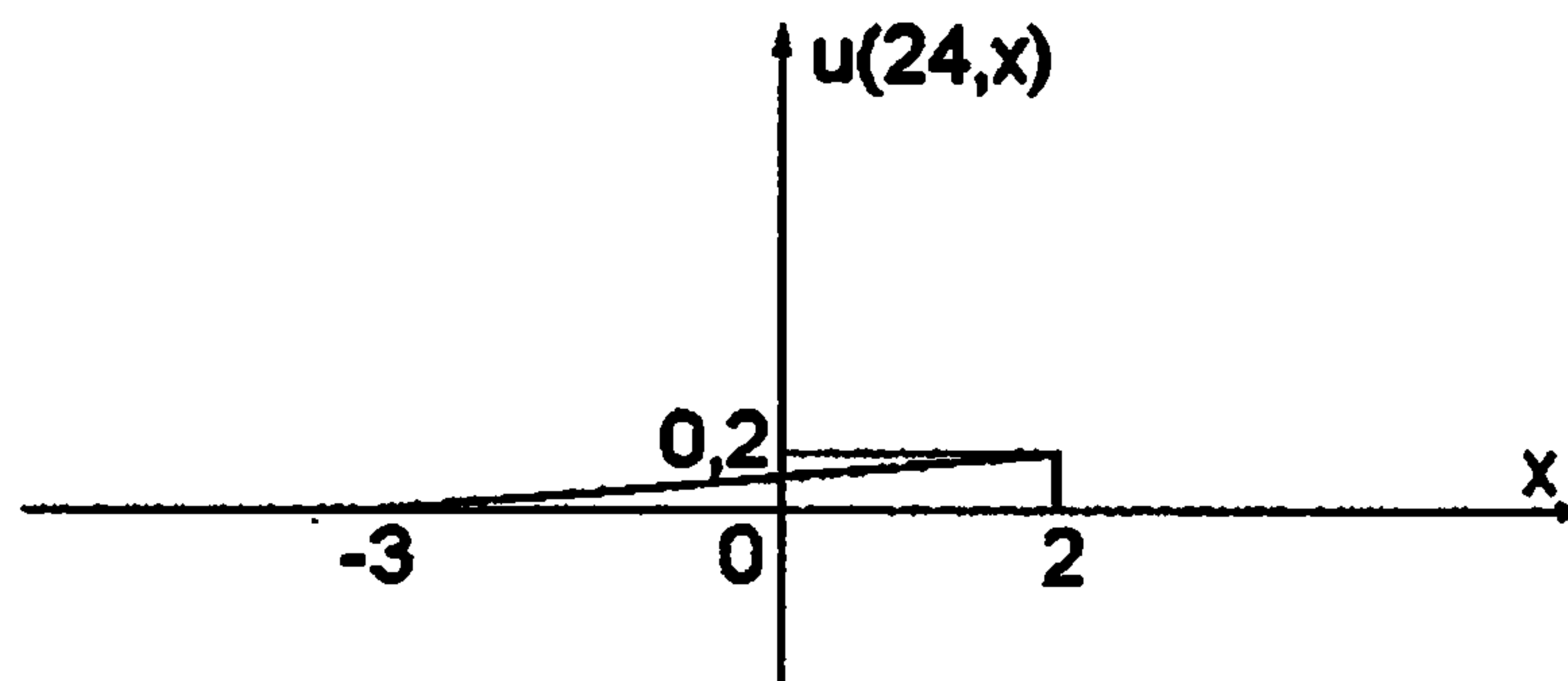


Рис. 28.

11.8. Примеры распространения дипольного импульса

Выясним, как движется линия разрыва:

$$\frac{dx_p}{dt} = 10 - \frac{7\sqrt{1+2t}}{2\sqrt{1+t}} - \frac{7\sqrt{1+t}}{\sqrt{1+2t}}.$$

При $t = 0$ $\frac{dx_p}{dt} < 0$. Затем $\frac{dx_p}{dt}$ растет и при некотором t' меняет знак. После чего при $t \in (t', +\infty)$ $\frac{dx_p}{dt} > 0$.

Уравнение для t' :

$$10 - \frac{7\sqrt{1+2t'}}{2\sqrt{1+t'}} - \frac{7\sqrt{1+t'}}{\sqrt{1+2t'}} = 0.$$

Пусть $\lambda = \frac{\sqrt{1+2t'}}{\sqrt{1+t'}}$, тогда

$$10 - \frac{7}{2}\lambda - \frac{7}{\lambda} = 0. \quad (11.45)$$

В случае

$$\lambda_1 = \frac{10 - \sqrt{2}}{7},$$

для нахождения момента времени t' имеем уравнение

$$\frac{1+2t'}{1+t'} = \frac{102 \pm 20\sqrt{2}}{49}.$$

Откуда время t' равно

$$t' = \frac{53 - 20\sqrt{2}}{20\sqrt{2} - 3}.$$

Второй корень уравнения (11.45) является посторонним, поскольку дает нам $t' < 0$.

Площадь левого треугольника больше площади правого, но "амплитуда" левого импульса меньше. Поэтому от нуля до t' "амплитуда" влияет на движение разрыва: координата $x_p(t)$ уменьшается, не достигая $x = -3$. В противном случае было бы противоречие с законом сохранения, так как суммарная площадь начального импульса у нас больше нуля (см. рис 27).

11. Точные решения квазилинейного уравнения

Начиная с t' , разрыв движется вправо, и при некотором t_0 импульс становится однополярным треугольным (когда линия разрыва пересекает $x = 2$).

Найдем t_0 :

$$10t_0 + 7 - 7\sqrt{1+t_0}\sqrt{1+2t_0} = 2,$$

$$10t_0 + 5 - 7\sqrt{1+t_0}\sqrt{1+2t_0} = 0,$$

$$\sqrt{1+2t_0}(5\sqrt{1+2t_0} - 7\sqrt{1+t_0}) = 0.$$

Поскольку $\sqrt{1+2t_0} > 0$, следовательно,

$$5\sqrt{1+2t_0} = 7\sqrt{1+t_0},$$

$$25 + 50t_0 = 49 + 49t_0,$$

$$t_0 = 24.$$

Заметим, что найденное значение t_0 могло быть получено по формуле (11.42).

Значения u^- и u^+ в момент времени $t_0 = 24$ равны

$$u^- = \frac{2+3}{1+24} = \frac{1}{5}, \quad u^+ = 0.$$

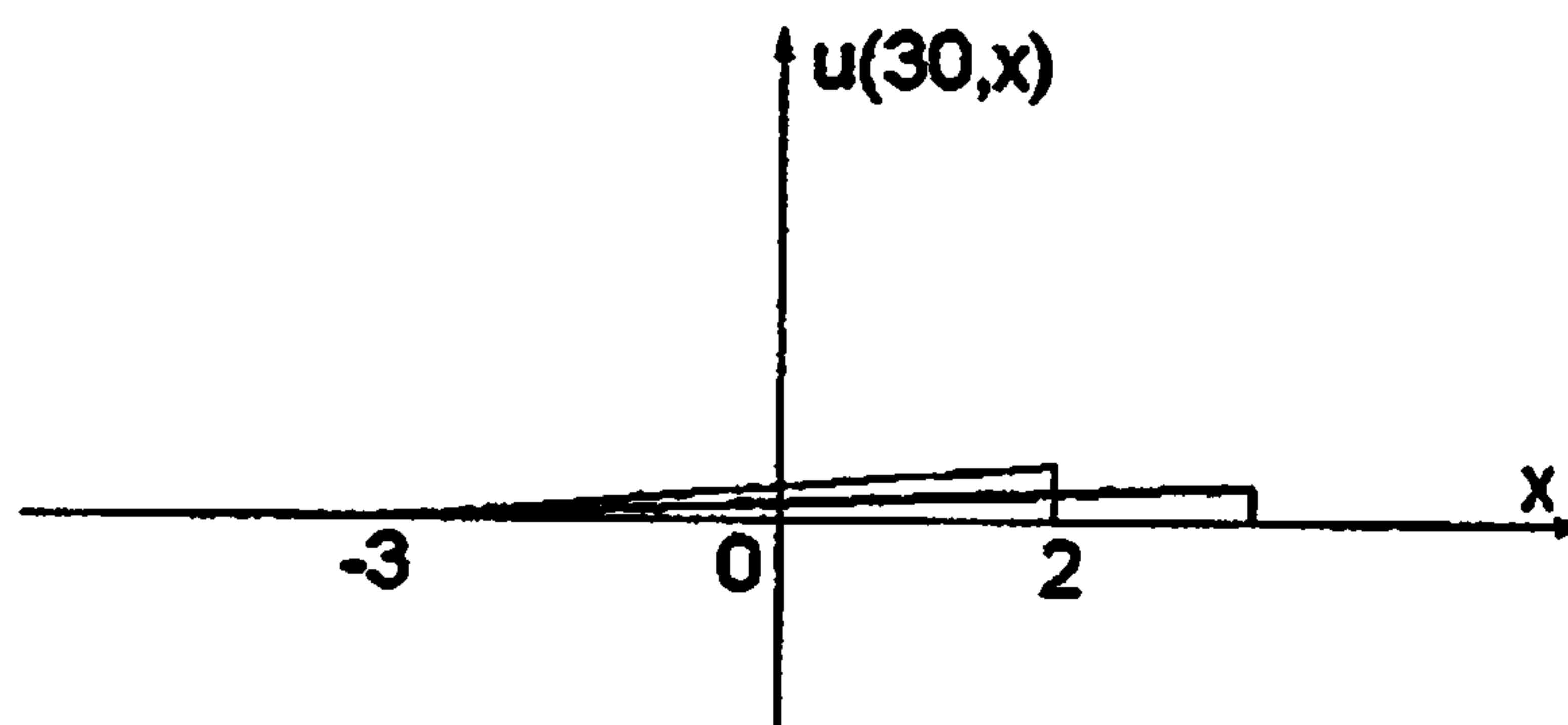


Рис. 29.

11. Точные решения квазилинейного уравнения

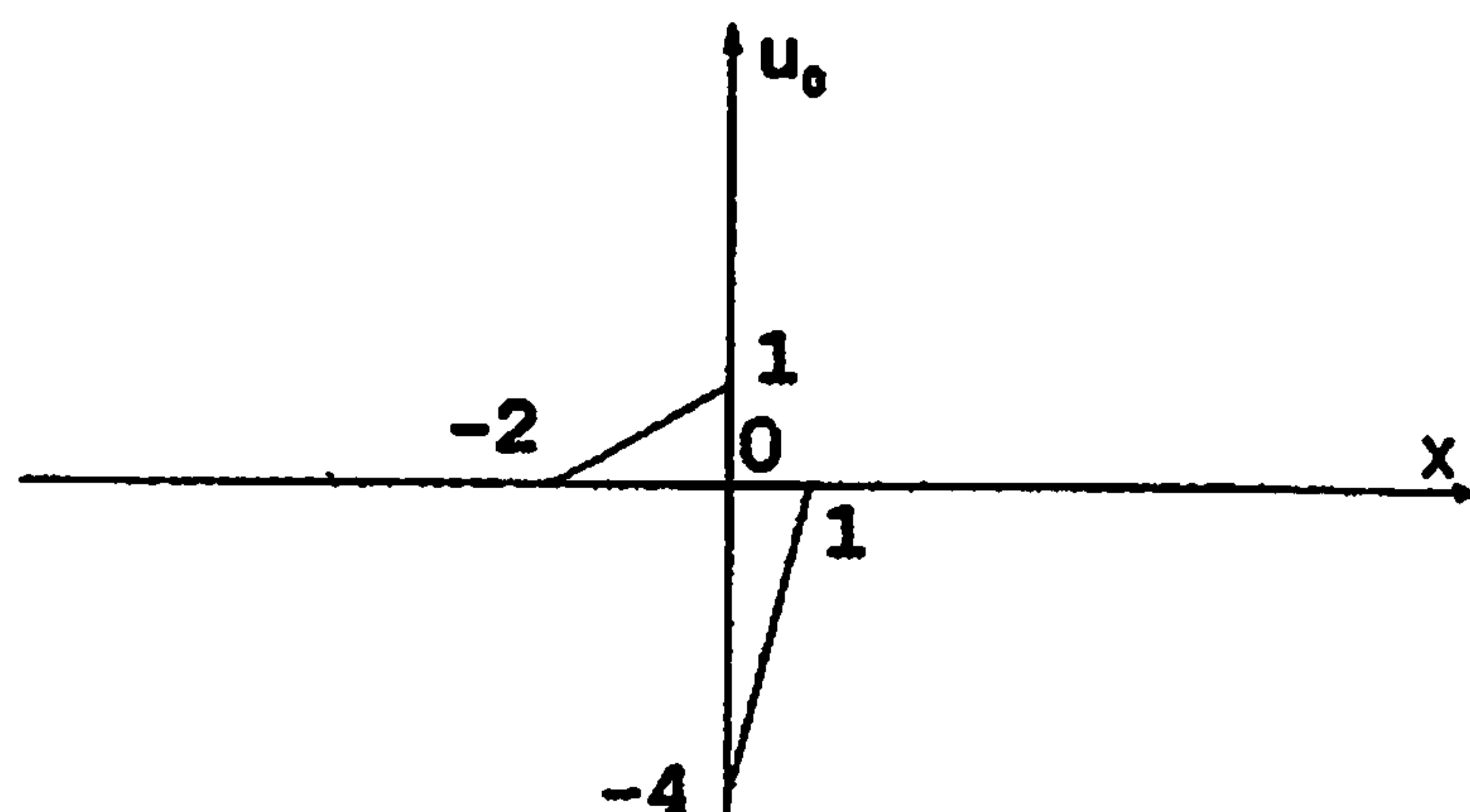


Рис. 30.

Функция $x_p(t)$, являющаяся решением этой системы, согласно формуле (11.40) записывается в следующем виде

$$x_p(t) = \frac{\sqrt{2+8t} - 4\sqrt{2+t}}{\sqrt{2+8t} + \sqrt{2+t}} t.$$

Поскольку $\sqrt{2+8t} < 4\sqrt{2+t}$ при $t > 0$, то координата разрыва будет отрицательной при любом $t > 0$. Покажем, что ее абсолютная величина будет монотонно возрастать. Для этого сделаем замену переменной

$$\sqrt{\frac{2+8t}{2+t}} = z.$$

Откуда $t = 2\frac{z^2-1}{8-z^2}$. Промежутку изменения $t \in [0; \infty)$ соответствует интервал изменения $z \in [1; 2\sqrt{2})$. Поэтому нужно показать, что

$$x_p = 2\frac{(z-4)(z^2-1)}{(z+1)(8-z^2)} = 2\frac{z^2-5z+4}{8-z^2}$$

будет монотонно убывать на интервале $[1; 2\sqrt{2})$.

11.8. Примеры распространения двуполярного импульса

Это следует из того, что

$$\frac{x_p}{dz} = 2 \frac{-5z^2 + 24z - 40}{8 - z^2} < 0$$

для всех z из $[1; 2\sqrt{2})$.

При $t = \frac{17}{4}$ координата разрыва становится равной -2 и импульс становится однополярным. Величина u^+ при этом равна $52/21$.

В примере 21 координата разрыва постоянна и импульсы постепенно "поглощают" друг друга. Приведем пример начальной функции, когда суммарная площадь импульсов будет равна нулю, но x_p будет меняться.

Пример 11.11 Пусть

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, x \geq 1, \\ x + 2, & -2 \leq x \leq 0, \\ 4x - 4, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рисунке 31.

В этом случае

$$k_1 = 1, v_1 = 2, k_2 = 4, v_2 = -4$$

и система (11.38) принимает вид

$$u^- = \frac{x_p(t) + 2}{1 + t}, \quad u^+ = \frac{4x_p(t) - 4}{1 + 4t},$$

$$\frac{dx_p}{dt} = \frac{x_p(t) + 2}{2(1 + t)} + 2 \frac{x_p(t) - 1}{1 + 4t}.$$

11. Точные решения квазилинейного уравнения

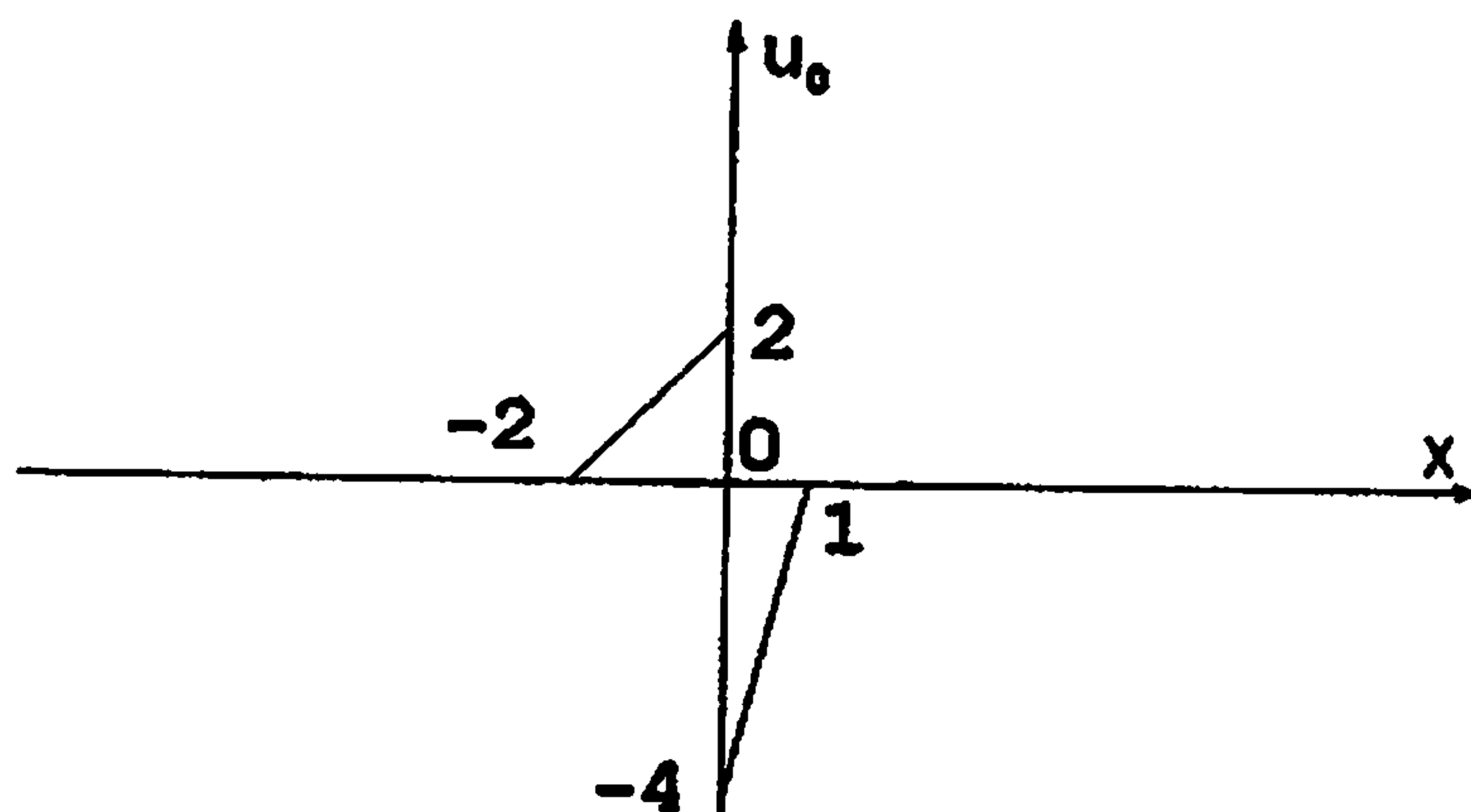


Рис. 31.

Функция $x_p(t)$, являющаяся решением этой системы, согласно формуле (11.40) записывается в следующем виде

$$x_p(t) = 2 \frac{\sqrt{1+4t} - 2\sqrt{1+t}}{\sqrt{1+4t} + \sqrt{1+t}} t.$$

Т.к. $\sqrt{1+4t} < 2\sqrt{1+t}$ при $t > 0$, то координата разрыва будет отрицательной при любом $t > 0$. Заметим, что поскольку площади импульсов равны, то x_p никогда не станет равным -4 . Для выяснения вопроса о характере изменения координаты разрыва, как и в предыдущем примере, сделаем замену переменной:

$$\sqrt{\frac{1+4t}{1+t}} = z.$$

Тогда $t = \frac{z^2 - 1}{4 - z^2}$. Промежутку изменения $t \in [0; \infty)$ соответствует интервал изменения $z \in [1; 2)$. После замены получаем функцию

$$x_p = 2 \frac{(z-2)(z^2-1)}{(z+1)(4-z^2)} = 2 \frac{1-z}{z+2}.$$

Она будет монотонно убывать на интервале $[1; 2)$, поскольку

$$\frac{x_p}{dz} = \frac{-6}{(z+2)^2} < 0$$

11.9. Примеры дифференциальных задач

для всех z из $[1; 2\sqrt{2})$.

Значения x_p меняются от 0 при $t = 0$ до $-1/2$ при $t \rightarrow \infty$. По мере приближения точки разрыва к величине $-1/2$ импульсы "поглощают" друг друга.

11.9 Примеры дифференциальных задач

$$1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} = 0,$$

$$а) \quad u_0(x) = \begin{cases} -2 & \text{при } x < 0, \\ 3 & \text{при } x > 0; \end{cases}$$

$$б) \quad u_0(x) = \begin{cases} 2 & \text{при } x < -0.5, \\ -3x + 0.5 & \text{при } -0.5 \leq x \leq 0.5, \\ -1 & \text{при } x > 0.5. \end{cases}$$

$$2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$а) \quad u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 2 & \text{при } x > 0; \end{cases}$$

$$б) \quad u_0(x) = \begin{cases} 2 & \text{при } x < -0.5, \\ -3x + 0.5 & \text{при } -0.5 \leq x \leq 0.5, \\ -1 & \text{при } x > 0.5. \end{cases}$$

$$3) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \cos u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$а) \quad u_0(x) = \begin{cases} \pi & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x > 0; \end{cases}$$

$$б) \quad u_0(x) = \begin{cases} \pi & \text{при } x < 0, \\ 2\pi & \text{при } x > 0; \end{cases}$$

$$в) \quad u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -0.5, \\ \pi x + 0.5\pi & \text{при } -0.5 \leq x \leq 0.5, \\ \pi & \text{при } x > 0.5. \end{cases}$$

$$\text{г) } u_0(x) = \begin{cases} 3\pi & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x > 0; \end{cases}$$

$$\text{д) } u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 3\pi & \text{при } x > 0; \end{cases}$$

$$4) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + e^u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$\text{а) } u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x > 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x < -0.5, \\ -x + 0.5 & \text{при } -0.5 \leq x \leq 0.5, \\ 0 & \text{при } x > 0.5. \end{cases}$$

$$5) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \ln u}{\partial x} = 0,$$

$$\text{а) } u_0(x) = \begin{cases} e & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x > 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x < 0, \\ 5(e - 1)x + 1 & \text{при } 0 \leq x \leq 0.2, \\ e & \text{при } x > 0.2. \end{cases}$$

Список литературы

- [1] Д.Андерсон, Дж.Таннехилл, Р.Плетчер Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т.1: М.: Мир, 1990, 384с., Т.2: М.: Мир, 1990, 392с.
- [2] Н.С.Бахвалов Оценка погрешности численного интегрирования квазилинейного уравнения первого порядка. Журн. выч. мат. и мат. физ. 1961, т.1, N 5, с. 771-783.
- [3] Н.С.Бахвалов Численное решение задач с негладкими данными и интеполяционные теоремы. Труды МИ АН СССР, 1984, т.166, с. 18-22.
- [4] Н.С.Бахвалов, Н.П.Жидков, Г.М.Кобельков Численные методы. М.: Наука, 1987, 600 с.
- [5] О.М.Белоцерковский, В.А.Андрущенко, Ю.Д.Шевелев Динамика пространственных вихревых течений в неоднородной атмосфере. Вычислительный эксперимент. М.: "Янус-К", 2000, 456 с.
- [6] О.А.Васильева, А.А.Карабутов, Е.А.Лапшин, О.В.Руденко Взаимодействие одномерных волн в средах без дисперсии. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983, 152 с.
- [7] М.Б.Виноградова, О.В.Руденко, А.П.Сухоруков Теория волн. М.: Наука, 1979, 384 с.
- [8] С.К.Годунов Разностный метод численного расчета разрывных решений гидродинамики. Мат. сборник, 47 (89), 1959, с. 271-306.
- [9] С.К.Годунов, А.В.Забродин, М.Я.Иванов, А.Н.Крайко, Г.П.Прокопов. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976, 400 с.
- [10] С.К.Годунов, В.С.Рябенский Разностные схемы. М.: Наука, 1977, 440 с.

- [11] А.Ю.Горицкий, С.Н.Кружков, Г.А.Чечкин Уравнения с частными производными первого порядка. (Учебное пособие) М.: Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 1999, 96 с.
- [12] С.Н.Кружков Нелинейные уравнения с частными производными (Лекции). Часть 2. Уравнения первого порядка. М.: Изд-во МГУ, 1970.
- [13] Труды С.Н.Кружкова: Сборник статей / Под редакцией С.Н.Бахвалова; Сост. С.Н.Бахвалов, В.А.Галкин, Ю.А.Дубинский. – М.: Физико-математическая литература (ФИЗМАТЛИТ), 2000. – 336 с.
- [14] Н.Н.Кузнецов Точность некоторых приближенных методов расчета слабых решений квазилинейного уравнения первого порядка. Журн. выч. мат. и мат. физ. 1976, т.16, N 6, с. 1489-1502.
- [15] Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001 г. 608 с.
- [16] Е.А.Лалшин Определение области распространения акустического сигнала. Фундаментальная и прикладная математика, 1, N 2, 1995, с. 431-454.
- [17] В.И.Лебедев Явные разностные схемы для решения жестких задач с комплексным или разделимым спектром. Журн. выч. мат. и мат. физ. 2000, т.40, N 12, с. 1801-1812.
- [18] Попов А.В. Неявные разностные схемы для нестационарного движения вязкого газа. Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Т.13 Казанское математическое общество. Численные методы решения линейных и нелинейных краевых задач. Материалы всероссийской молодежной научной школы-конференции. 2001, с. 4-54.

- [19] Б.Л.Рождественский, Н.Н.Яненко Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968, 592 с.
- [20] Русанов В.В. Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счета разрывных решений. ДАН СССР, 1968, 180, N 6, с. 1303-1305.
- [21] А.А.Самарский Теория разностных схем. М.: Наука, 1983, 616 с.
- [22] А.А.Самарский, А.В.Гулин Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973, 416 с.
- [23] А.А.Самарский, Ю.П.Попов Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1973, 352 с.
- [24] Ю.И.Шокин Метод дифференциального приближения. Новосибирск: Наука, 1979, 219 с.
- [25] H.Q.Yang, A.J.Przekwas A Comparative Study of Advanced Shock-Capturing Schemes Applied to Burgers' Equation. Journal of Computational Physics 102, 1992, 139-159 p.

Учебное издание
Попов Анатолий Вадимович
Практикум на ЭВМ.
Разностные методы решения
квазилинейных уравнений первого порядка.

Издание второе
переработанное и дополненное

**М.: Издательство центра прикладных исследований при
механико-математическом факультете МГУ,
2003.—128 с.**

Подписано в печать 15.01.2003 г.

Формат 60×90 1/16. Объем 8 п.л.

Заказ 3.

Тираж 350 экз.

**Издательство центра прикладных исследований при механико-
математическом факультете МГУ**

г. Москва, Воробьевы горы.

**Лицензия на издательскую деятельность ИД В 04059,
от 20.02.2001г.**

**Отпечатано с оригинал-макета на типографском оборудова-
нии механико-математического факультета и Франко-русского
центра им. А.М. Ляпунова.**