

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ПРАКТИКУМ

8 семестр

2024 г.

Численное моделирование нестационарного двумерного течения вязкого газа с использованием неявных разностных схем

Попов А.В.

Содержание

1	Введение	2
2	Задачи практикума	4
2.1	Начально-краевая задача	4
2.2	Основные обозначения	5
2.3	Задания практикума	7
2.4	Варианты областей и граничных условий	10
2.5	Задание практикума 2024 г.	11
3	Разностные схемы	19
3.1	Классификация РС	19
3.2	Схема для $\ln(\rho)$ с центральными разностями	25
3.3	Схема с центральными разностями $(\ln(\rho), u)$ (последовательная)	29
3.4	Схема с центральными разностями $(u, \ln(\rho))$ (последовательная)	30
3.5	Схема с центральными разностями для $\ln(\rho)$ (параллельная)	31
3.6	Схема для $\ln(\rho)$ с односторонними разностями	31
3.7	Схема с односторонними разностями для $(\ln(\rho), u)$ (последовательная)	34
3.8	Схема с односторонними разностями для $(u, \ln(\rho))$ (последовательная)	34
3.9	Схема с односторонними разностями для $\ln(\rho)$ (параллельная)	35
3.10	Схема А.Г.Соколова ПЛОТНОСТЬ-ИМПУЛЬС (последовательная)	35
3.11	Схема А.Г.Соколова ПЛОТНОСТЬ-СКОРОСТЬ (последовательная)	40
3.12	Схема А.Г.Соколова СКОРОСТЬ-ПЛОТНОСТЬ (последовательная)	42
3.13	Схема А.Г.Соколова ПЛОТНОСТЬ-СКОРОСТЬ (параллельная)	42
3.14	Схема с центральными разностями $\rho_V I$	43
3.15	Схема с центральными разностями $\rho_V II$	43
3.16	Схема с центральными разностями $\rho_V I$ (последовательная)	43
3.17	Схема с центральными разностями $\rho_V II$ (последовательная)	44
3.18	Схема с центральными разностями $V_\rho I$ (последовательная)	44
3.19	Схема с центральными разностями $V_\rho II$ (последовательная)	45
3.20	Схема с центральными разностями $\rho_V I$ (параллельная)	45
3.21	Схема с центральными разностями $\rho_V II$ (параллельная)	46
3.22	Схема с односторонними разностями ρ_V	46
3.23	Схема с односторонними разностями ρ_V (последовательная)	46

3.24	Схема с односторонними разностями V_ρ (последовательная)	47
3.25	Схема с односторонними разностями ρ_V (параллельная)	47
3.26	Схема ρ_V (с расщепляющимся оператором)	48
3.27	Схема ρ_{Imp} (с расщепляющимся оператором)	49
4	Рекомендации по программированию	50
4.1	Общая структура главной программы	50
4.2	Задание сетки	50
4.3	Шаблон РС	51
4.4	Пример использования обозначений и структуры программы	53
4.5	Формулы для элементов матрицы и правой части СЛАУ	56
4.6	Заполнение матрицы и правой части	59
4.7	Методы решения СЛАУ	61
4.8	Использование предобуславливателей	62
4.9	Инструкция по использованию пакета LSPACK	63
4.10	Инструкция по использованию библиотеки Eigen	65
4.11	Разностная схема для расчета каверны	73

1 Введение

Практикум предназначен для знакомства студентов со следующими вопросами.

I) Сложные прикладные задачи, описываемые системами нелинейных уравнений в частных производных. Задачи практикума - это поиск нестационарных решений движения газа, являющихся решениями нелинейной системы Навье-Стокса. Студенты знакомятся с постановками различных начально-краевых задач и тем, что сделано на сегодняшний день с точки зрения их теоретического обоснования: теоремы существования, единственности и устойчивости их решений.

II) Алгоритмы численного решения нелинейных задач математической физики. В задачах практикума используются только неявные разностные схемы. Это сделано с целью познакомить студентов с алгоритмами, имеющими минимальные условия устойчивости, и показать на примере этих задач использование современных итерационных алгоритмов решения СЛАУ и методов расщепления.

III) Принципы организации программ. В процессе выполнения практикума каждый студент на примере конкретной задачи пишет и отлаживает свою программу. Эти задачи обладают своими особенностями, поэтому для успешного выполнения заданий от студентов требуется изучение описаний алгоритмов и примеров программ, которые включены в описание практикума. По желанию студента он может либо изменить уже имеющуюся программу под свою задачу (что требует от него понимания ее содержания), либо написать свою реализацию алгоритма.

IV) Использование в проектах пакетов программ. Для решения вспомогательных задач в практикуме предлагается использовать пакеты программ, лежащих в открытом доступе в сети Internet. Одним из таких пакетов служит LSPACK (Package for Linear Algebra with Sparse Matrices)[10]. Он в частности предназначен для решения СЛАУ с сильно разреженными матрицами. Альтернативой пакету LSPACK является библиотека EIGEN [11]. Это библиотека программ линейной алгебры для языка программирования C++ с открытым исходным доступом.

У) Использование графических пакетов. Для визуальной интерпретации своих численных результатов студентам предлагается использовать доступные им графические программы. В качестве графического пакета, лежащего в открытом доступе в интернете, рекомендован GNUPLOT [8]. В ходе выполнения заданий требуется освоить изображение линий тока газовых течений и различных поверхностей.

Система, описывающая нестационарное течение газа, относится к задачам, нахождение решений которой требуется во многих прикладных задачах. Поскольку методов поиска точных решений этих задач на сегодняшний день не существует, то для их решения применяют численные методы. Разностные методы являются одним из широко развитых и до сих пор активно совершенствуемых способов получения приближенных решений. В настоящее время для решения задач газовой динамики часто используют явные разностные схемы. Однако, особенно в случае вязкого газа, соображения устойчивости разностных схем приводят к необходимости разработки и внедрения неявных разностных методов. Поэтому знание и умение применять подобные алгоритмы часто требуется при решении сложных газодинамических задач.

Неявные схемы приводят к решению систем алгебраических уравнений (САУ) для нахождения решения на $(n + 1)$ -ом временном слое. Решение таких САУ как правило является достаточно сложной задачей, т.к. их размерность в задачах интересных с практической точки зрения бывает очень большой. Необходимость решать подобные задачи привела к разработке большого числа алгоритмов, получивших название методов расщепления, в которых САУ распадаются на подсистемы меньшей размерности или реализация которых сводится к последовательному решению более простых с точки зрения алгоритмов поиска решения САУ. Однако все эти методы обладают более обременительными условиями устойчивости и слабее аппроксимируют дифференциальные задачи, чем методы, в которых все переменные взяты одновременно с верхнего слоя. Такие методы приводят к нелинейным САУ, которые требуется решать итерационными методами. Это очень сложная с точки зрения реализации и обоснования задача. Промежуточным шагом может служить использование методов, в которых все производные (или почти все) по пространственным переменным берутся с верхнего временного слоя, а коэффициенты при них используют значения разностного решения с предыдущих временных слоев. Такие алгоритмы приводят к решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), решение которых может быть найдено при помощи итерационных алгоритмов, основанных на идее сопряженных градиентов.

Разностные схемы, предложенные для реализации в практикуме, именно такие. Одни схемы используют различные идеи метода расщепления и их решения находятся путем решения СЛАУ с трехдиагональными матрицами методом прогонки. Другие схемы приводят к СЛАУ, матрицы которых сильно разрежены, но не являются трехдиагональными даже в одномерном случае. Более того, вследствие аппроксимации конвективной части дифференциального оператора на верхнем временном слое такие матрицы не являются знакоопределенными. Для решения линейных алгебраических систем такого вида используется метод би-сопряженных градиентов.

Метод би-сопряженных градиентов и его модификации реализован в ряде пакетов стандартных программ. Например, в пакетах `Lapack` и `Eigen`, которые предлагается использовать студентам. Тем самым достигается еще одна цель: научить студентов использовать в своих проектах программные коды, написанные другими авторами. Одна-

ко гораздо эффективнее оказываются те программы, которые написаны с учетом вида матриц СЛАУ, которые получаются при реализации конкретного метода. Поэтому в одном из заданий ставится задача написать свою подпрограмму, реализующую метод би-сопряженных градиентов с предобуславливателем.

2 Задачи практикума

2.1 Начально-краевая задача

Система уравнений, описывающая нестационарное движение баротропного газа в области Ω , выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) &= 0, \\ \rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} \right] + \nabla p &= L \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}, \\ p &= p(\rho), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где L есть линейный симметричный положительно определенный оператор. В задачах практикума в качестве L берется

$$L \mathbf{u} \equiv \operatorname{div}(\mu \nabla \mathbf{u}) + \frac{1}{3} \nabla(\mu \operatorname{div} \mathbf{u}).$$

Как и в одномерном случае выше через μ обозначен коэффициент вязкости газа, который будем считать известной неотрицательной константой. Уравнение состояния газа $p = p(\rho)$ и вектор внешних сил $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ являются заданными. В задачах практикума зависимость давления от плотности принимается либо $p = C_\rho \rho$ (C_ρ – положительная константа), либо $p = \rho^\gamma$ ($\gamma > 1$).

Дивергентный вид записи системы (2.1) выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) &= 0, \\ \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p &= L \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь $(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u})$ – тензор второго ранга, полученный в результате прямого произведения векторов $\rho \mathbf{u}$ и \mathbf{u} . При вычислении дивергенции от тензора второго ранга свертка осуществляется по его первому индексу.

Поскольку в настоящий момент задания практикума ставятся для двумерных по пространству задач, приведем развернутую запись уравнений системы (2.2) в этом случае

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho u_2}{\partial x_2} &= 0, \\ \frac{\partial \rho u_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_1^2}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho u_2 u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_1} &= \mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \rho f_1, \\ \frac{\partial \rho u_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_1 u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho u_2^2}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_2} &= \mu \left(\frac{1}{3} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) + \rho f_2, \end{aligned} \quad (2.3)$$

Неизвестные функции: плотность ρ и вектор скорости \mathbf{u} являются функциями переменных Эйлера

$$(t, \mathbf{x}) \in Q = [0, T] \times \Omega.$$

В начальный момент времени задаются функции, значения которых определяют плотность и скорость газа в каждой точке области Ω :

$$(\rho, \mathbf{u})|_{t=0} = (\rho_0, \mathbf{u}_0), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2.4)$$

Для завершения постановки начально-краевой задачи систему (2.1) дополняют граничными условиями. Простейшие граничные условия в случае положительной вязкости газа – это условия прилипания:

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \Gamma, \quad \text{где } \Gamma = \partial\Omega. \quad (2.5)$$

В случае, если на какой-либо границе задается скорость отличная от нуля, задание плотности зависит от направления скорости: если вектор скорости направлен вовнутрь области, то необходимо задавать значение плотности, если наоборот наружу, то плотность газа не задается.

Хороший обзор результатов по поводу обоснования начально-краевых задач механики жидкости и газа можно найти в [5].

Дифференциальные уравнения системы (2.1) являются следствиями интегральных законов сохранения массы и импульса в случае достаточной гладкости функций плотности и скорости газа. Важными требованиями к вычислительным алгоритмам являются выполнение аналогов этих законов для сеточных функций. Численные методы, для которых выполняются один или несколько законов сохранения, называют консервативными. Если выполняются все законы сохранения, то метод называют полностью консервативным.

Еще одним важным свойством является выполнение условия неотрицательности функции плотности. В практикуме используются схемы, где это условие выполняется автоматически. Для этого использовано два альтернативных подхода. Первый – это замена поиска функции ρ на функцию $g = \ln(\rho)$. Во втором применяется специальная аппроксимация уравнения неразрывности, предложенная А.Г.Соколовым.

2.2 Основные обозначения

В простейших заданиях практикума рассматриваются пространственные области прямоугольного типа $\bar{\Omega} = \prod_{k=1}^s [0; X_k]$, где s - размерность пространства. По каждому из направлений используются сетки с постоянным шагом h_k : $\bar{\omega}_{h_k} = \{mh_k \mid m = 0, \dots, M_k\}$, где $M_k h_k = X_k$. На временном интервале $[0; T]$ также используется равномерная сетка: $\omega_\tau = \{n\tau \mid n = 0, \dots, N\}$, где $N\tau = T$. В результате в области Q вводится сетка $\bar{Q}_{\tau\bar{h}} = \omega_\tau \times \bar{\Omega}_{\bar{h}}$, где $\bar{\Omega}_{\bar{h}} = \prod_{k=1}^s \bar{\omega}_{h_k}$. Узлы сетки $\bar{\Omega}_{\bar{h}}$, попадающие на границу области Ω , обозначим $\gamma_{\bar{h}}$ (граничные узлы), а попадающие в область Ω через $\Omega_{\bar{h}}$ (внутренние узлы). Граничные узлы с номерами, у которых $m_k = 0$ и $m_k = M_k$, обозначим γ_k^- и γ_k^+ соответственно.

Кроме сеток ω_{h_k} в ряде схем используются сдвинутые сетки с полупелыми узлами. Через $\omega_{h_k}^{1/2}$ будем обозначать сетку $\omega_{h_k}^{1/2} = \{mh_k + h_k/2 \mid m = 0, \dots, M_k - 1\}$, а через $\Omega_{\bar{h}}^{1/2} = \prod_{k=1}^s \omega_{h_k}^{1/2}$ и $Q_{\tau\bar{h}}^{1/2} = \omega_\tau \times \Omega_{\bar{h}}^{1/2}$.

Значение функции g , определенной на сетке $Q_{\tau\bar{h}}$ (или на сетке $Q_{\tau\bar{h}}^{1/2}$), в узле (n, \bar{m}) будем обозначать через $g_{\bar{m}}^n$. Если индексы будут опущены, то это означает, что они равны n и \bar{m} . Для сокращения записи значений функции g в узлах, соседних с узлом (n, \bar{m}) , используются следующие обозначения:

$$g_{\bar{m}}^{n+1} = \hat{g}, \quad g_{\bar{m} \pm q_k}^n = g^{\pm q_k},$$

где $\bar{m} \pm q_k$ номер узла, k -ая координата которого отличается от соответствующей координаты узла \bar{m} на $\pm q_k$. Введем обозначения для среднего значения величин сеточной функции в двух соседних узлах

$$g_{s_k} = \frac{g_{\bar{m}+1_k}^n + g_{\bar{m}}^n}{2}, \quad g_{\bar{s}_k} = \frac{g_{\bar{m}}^n + g_{\bar{m}-1_k}^n}{2}.$$

Для разностных операторов применяются обозначения, принятые в [1]:

$$g_t = \frac{g_{\bar{m}}^{n+1} - g_{\bar{m}}^n}{\tau}, \quad g_{x_k} = \frac{g_{\bar{m}+1_k}^n - g_{\bar{m}}^n}{h_k}, \quad g_{x_k}^\circ = \frac{g_{\bar{m}+1_k}^n - g_{\bar{m}-1_k}^n}{2h_k}, \quad g_{\bar{x}_k} = \frac{g_{\bar{m}}^n - g_{\bar{m}-1_k}^n}{h_k}.$$

Матрицы этих операторов обозначаются ниже $\partial_{x_k}^\circ, \partial_{x_k}, \partial_{\bar{x}_k}$.

Для приближения конвективных слагаемых в дифференциальных операторах в ряде схем будут использоваться разностные аппроксимации против потока. Для этих выражений введем обозначения

$$\delta_k\{W, V\} = \frac{V + |V|}{2}W_{\bar{x}_k} + \frac{V - |V|}{2}W_{x_k} = \begin{cases} VW_{\bar{x}_k}, & \text{если } V \geq 0, \\ VW_{x_k}, & \text{если } V < 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

В схеме А.Г.Соколова в конвективных слагаемых узел шаблона, в котором нужно брать значение сеточной функции, зависит от знака компоненты вектора скорости. Для этих выражений используется обозначение

$$\sigma_k\{H, V\} = H \frac{|V| - V}{2} + H^{-1_k} \frac{|V| + V}{2} = \begin{cases} -VH, & \text{если } V < 0, \\ VH^{-1_k}, & \text{если } V \geq 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Определим используемые ниже скалярные произведения и нормы сеточных функций, заданных на сетке $\bar{\Omega}_{\bar{h}}$:

$$(v, u) = \prod_{k=1}^s h_k \sum_{x_{\bar{m}} \in \bar{\Omega}_{\bar{h}}} v_{\bar{m}} u_{\bar{m}}, \quad [u, v] = (u, v) + 0,5 \prod_{k=1}^s h_k \sum_{x_{\bar{m}} \in \gamma_{\bar{h}}} v_{\bar{m}} u_{\bar{m}},$$

$$\|v\|_{C_h} = \max_{x_{\bar{m}} \in \bar{\Omega}_{\bar{h}}} |v_{\bar{m}}|, \quad \|v\| = \sqrt{(v, v)}, \quad \|v\|_{L_{2,h}} = |[v]| = \sqrt{[v, v]}, \quad \|v\|_2^1 = \sqrt{|[v]|^2 + |v|_1^2},$$

где через $|v|_1$ обозначена полунорма, задаваемая следующим образом:

$$|v|_1 = \sqrt{\left(\prod_{k=1}^s h_k \right) \left(\sum_{k=1}^s \left(\sum_{x_{\bar{m}} \in \Omega_{\bar{h}} \cup \gamma_k^-} (v_{x_k})^2 \right) \right)}.$$

2.3 Задания практикума

Задания практикума состоят в численном решении начально-краевых задач для системы (2.1) в случае двух пространственных переменных с помощью разностных схем. Всего предлагается три задания, по результатам выполнения которых должен быть написан итоговый отчет. Численные эксперименты следует провести при различных значениях параметров дифференциальной и разностной задач (ниже эти параметры будем называть входными). Входными параметрами будем считать

1) вязкость μ из диапазона $[0.001; 0.1]$ (результаты следует привести для трех значений 0.001, 0.01 и 0.1);

2) уравнение состояния $p = p(\rho)$ (рассмотреть линейную зависимость $p = C_\rho \rho$ при коэффициенте C_ρ равным 1, 10 и 100, а также нелинейную зависимость $p = \rho^\gamma$, где $\gamma = 1.4$);

3) шаги сетки τ и h .

Результаты расчетов следует оформить в виде таблиц и графиков, после которых должны следовать выводы о характере зависимости полученных результатов от входных параметров.

Варианты заданий, предлагаемые для разных студентов, отличаются друг от друга

- 1) разностными схемами, которые требуется реализовать (см. параграфы 3.2-3.27);
- 2) пространственными областями и граничными условиями (см. параграф 2.4);
- 3) применяемыми итерационными методами поиска решений на очередном временном слое (см. параграф 4.7).

Задание 1: Отладочный тест

Первое задание заключается в написании программы, реализующей разностную схему, и проверке ее на наличие ошибок с помощью задачи, имеющей точное гладкое решение.

Дело в том, что программы, реализующие нижеописанные РС, достаточно сложны и не допустить при их создании ошибки (опечатки) не удастся никому. В книге [6] в „заклучении“ приводятся практические советы по отладке таких программ. Одним из описанных там приемов является постановка дифференциальной задачи, имеющей известное точное гладкое решение. Этот способ верификации является одним из основных на этапе отладки (см. параграф „Задания практикума“ в [7]).

Почти во всех предложенных схемах решение на верхнем временном слое ищется путем решения СЛАУ с сильно разреженной матрицей, у которой число диагоналей с отличными от нуля элементами больше трех. Для чего предлагается использовать метод би-сопряженных градиентов. В первом задании для этого необходимо применить одну из модификаций этого метода, реализованную в пакетах Laspack или Eigen.

Первая программа должна создавать на выходе файлы, в которых содержатся таблицы погрешностей численного интегрирования на вложенных сетках при $t = T$ для различных компонент решения задачи в нормах $\|\cdot\|_{C_h}$, $\|\cdot\|_{L_{2,h}}$ и $\|\cdot\|_{W_{2,h}^1}$.

Приведем примеры таблиц, содержащие нормы $\|\cdot\|_{C_h}$ погрешностей для точного решения, задаваемого следующими функциями

$$u_1(t, x_1, x_2) = \sin(2\pi x_1) \sin(2\pi x_2) e^t,$$

$$u_2(t, x_1, x_2) = \sin(2\pi x_1) \sin(2\pi x_2) e^{-t},$$

$$\rho(t, x_1, x_2) = (\cos(2\pi x_1) + 3/2)(\sin(2\pi x_2) + 3/2)e^t,$$

и параметров газа $p_\rho = 10$ и $\mu = 0.1$.

Замечание. В дифференциальной задаче первого задания все уравнения решаемой системы (2.1) имеют правые части отличные от нуля, граничные условия на обе компоненты вектор-функции скорости нулевые на всей границе, а для функции плотности граничных условий нет.

$$\|g - \ln(\rho)\|_{C_h}$$

$\tau \setminus h_x =$ h_y	0.05	0.025	0.0125	0.00625
0.05000	$1.533e-001$	$1.059e-001$	$9.675e-002$	$9.525e-002$
0.02500	$1.206e-001$	$6.518e-002$	$5.427e-002$	$5.302e-002$
0.01250	$1.044e-001$	$4.401e-002$	$2.854e-002$	$2.745e-002$
0.00625	$9.611e-002$	$3.449e-002$	$1.679e-002$	$1.423e-002$

$$\|v_1 - u_1\|_{C_h}$$

$\tau \setminus h_x =$ h_y	0.05	0.025	0.0125	0.00625
0.05000	$1.997e-001$	$1.911e-001$	$1.912e-001$	$1.915e-001$
0.02500	$1.183e-001$	$1.005e-001$	$1.011e-001$	$1.015e-001$
0.01250	$9.124e-002$	$4.955e-002$	$4.982e-002$	$5.037e-002$
0.00625	$7.818e-002$	$2.491e-002$	$2.475e-002$	$2.534e-002$

$$\|v_2 - u_2\|_{C_h}$$

$\tau \setminus h_x =$ h_y	0.05	0.025	0.0125	0.00625
0.05000	$3.961e-001$	$3.539e-001$	$3.489e-001$	$3.479e-001$
0.02500	$2.344e-001$	$1.920e-001$	$1.875e-001$	$1.869e-001$
0.01250	$1.369e-001$	$9.970e-002$	$9.642e-002$	$9.603e-002$
0.00625	$8.980e-002$	$5.271e-002$	$4.904e-002$	$4.873e-002$

Таблицы, приведенные выше, были получены с параметрами RГСAssigasy равным 10^{-8} и максимальным числом итераций 2000.

Важным свойством РС, использованной при получении таблиц, является теоретически доказанная сходимость к точному гладкому решению с порядком $\tau + h^2$ в частности в норме $\|\cdot\|_{C_h}$ [3], которое подтверждается результатами теста.

Очень важным является вопрос о точности получаемого по РС решения, когда точное решение неизвестно и теоретические оценки погрешности отсутствуют. Для получения ответа на этот вопрос на практике часто используют расчеты на вложенных сетках. Вывод о порядке точности решения, полученного на сетке с шагами τ и h , делается на основании сравнения его по норме в одинаковых узлах с решением, полученным на сетке с шагами $\tau/2^k$ и $h/2^k$, где $k \in \mathbb{N}$. Если сходимость РС есть, то норма этой разности,

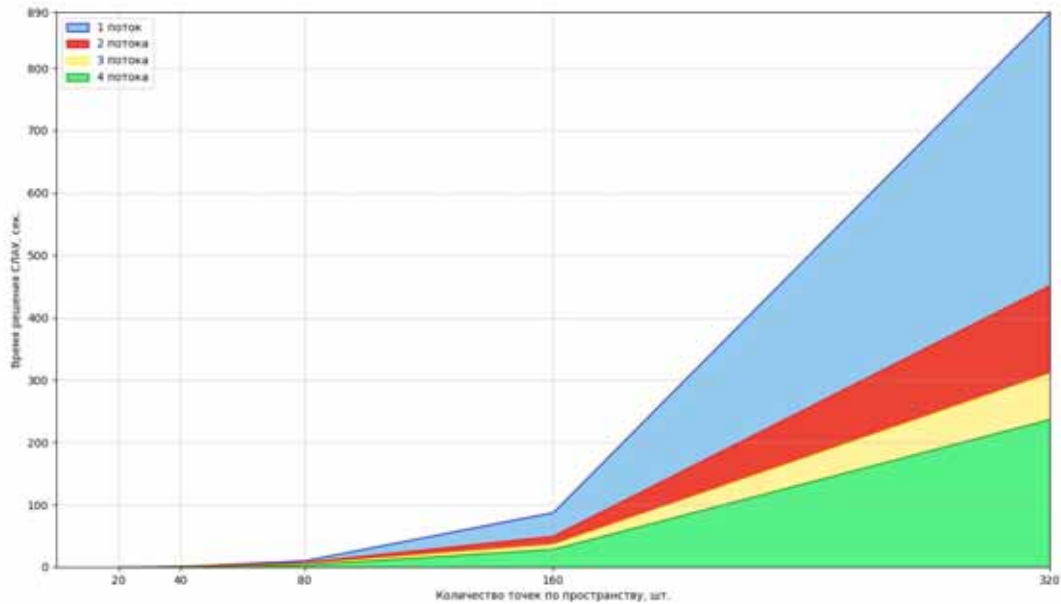


Рис. 1: скорости

как правило, является оценкой снизу для нормы разности между сеточным и точным решениями и тем лучше, чем больше параметр k .

Подтверждение этого факта следует получить, выполняя первое задание. Проиллюстрировать это можно, приведя следующую таблицу. Выбираются шаги τ и h и в k -ой строке таблицы приводятся нормы разности решения, полученного на сетке $Q_{\tau,h}$, и решения, полученного на сетке $Q_{\tau/2^k, h/2^k}$ (столбцы таблицы различаются различными шагами начальной сетки) на последнем временном слое. В последней строке содержатся нормы погрешности решения на сетке $Q_{\tau,h}$. Пример такой таблицы можно найти в [7].

Задание 2: Собственная реализация алгоритма би-сопряженных градиентов.

Второе задание заключается в написании подпрограммы, реализующей модификацию алгоритма би-сопряженных градиентов, используя возможности параллельного программирования.

Возможности укорить вычисления состоят не только в использовании нескольких доступных процессоров, но и экономии памяти и более рациональном умножении получающихся матриц на вектор. Рекомендации как это можно сделать находятся в параграфе 4.7.

Отладка программы осуществляется на тесте из первого задания. Нужно сравнить время, требуемое для вычисления по программе, использующей Laspack, программу с собственной реализацией метода би-сопряженных градиентов и параллельную программу. Результаты сравнения привести в виде таблицы.

Задание 3: Решение задачи „протекания“.

Задачей „протекания“ будем называть краевую задачу, где не на всей границе области выполняется условие равенства нулю скорости газа. В точках границы, где ненулевой вектор скорости направлен во внутрь области, задается плотность „входного“ потока. В точках, где газ вытекает из области, граничного условия на плотность нет, а условие на скорость ставится в виде задания нулевых нормальной производной вектора скорости и тангенциальной компоненты этого вектора. Примеры постановок таких задач находятся в параграфе 2.4.

Входные параметры задачи „протекания“ дополняются скоростью и плотностью входного потока. Задача решается методом установления, где в начальный момент времени газ в области считается покоящимся с постоянной плотностью.

Третье задание заключается в написании программы, позволяющей найти стационарное течение газа, протекающего через заданную область.

Результаты расчетов оформляются в виде таблиц и иллюстраций, выполненными с помощью пакета GNUPLOT.

1. Время установления стационарного потока в зависимости от входных параметров. В отчете требуется изучить вопрос о зависимости времени установления при скачкообразном изменении граничного условия на участке, где газ втекает, с величин состояния покоя на параметры входного потока и при плавном нарастании этих величин.

2. Изображение поля скоростей и цветной проекции на пространственную область плотности потока в динамике (мультифильм) и в форме иллюстраций в дискретные моменты времени (например, при $T/4$, $T/2$, $3T/4$ и T , где T — конечный момент времени).

3. Точность расчетов в зависимости от шагов сетки и других входных параметров (вязкости газа, уравнения состояния, параметров входного потока).

2.4 Варианты областей и граничных условий

Компоненты функции скорости на границе области Ω будем считать равными нулю, если явно не задано другое условие. На границе, где вектор скорости направлен во внутрь области, будем считать известной функцию плотности, положив ее значения равными ρ_γ . На остальных участках границы функция плотности считается неизвестной и подлежит определению.

Обозначим через Ω_{nm} квадрат, координаты точек которого удовлетворяют неравенствам $n < x < n + 1$ и $m < y < m + 1$. Множества точек, составляющие стороны квадрата Ω_{nm} обозначим Γ_{nm}^{x-} , Γ_{nm}^{x+} , Γ_{nm}^{y-} и Γ_{nm}^{y+} , где индекс x или y означает какая из координат на стороне является постоянной, а $+$ или $-$ означает максимальное или минимальное значение принимает эта координата.

Перечислим примеры областей Ω и граничных условий на функцию скорости, которые отличны от нулевых.

1. $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{00} \cup \bar{\Omega}_{01} \cup \bar{\Omega}_{11} \cup \bar{\Omega}_{21}$, $u_1|_{\Gamma_{00}^{x-} \cup \Gamma_{01}^{x-}} = w$, $\frac{\partial u_1}{\partial x}|_{\Gamma_{21}^{x+}} = 0$.
2. $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{00} \cup \bar{\Omega}_{10} \cup \bar{\Omega}_{11} \cup \bar{\Omega}_{21}$, $u_1|_{\Gamma_{00}^{x-}} = w$, $\frac{\partial u_1}{\partial x}|_{\Gamma_{21}^{x+}} = 0$.
3. $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{02} \cup \bar{\Omega}_{12} \cup \bar{\Omega}_{11} \cup \bar{\Omega}_{10}$, $u_1|_{\Gamma_{02}^{x-}} = w$, $\frac{\partial u_2}{\partial y}|_{\Gamma_{10}^{y-}} = 0$.
4. $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{01} \cup \bar{\Omega}_{11} \cup \bar{\Omega}_{10} \cup \bar{\Omega}_{20}$, $u_1|_{\Gamma_{01}^{x-}} = w$, $\frac{\partial u_1}{\partial x}|_{\Gamma_{20}^{x+}} = 0$.
5. $\bar{\Omega} = (\bar{\Omega}_{00} \cup \bar{\Omega}_{10} \cup \bar{\Omega}_{01} \cup \bar{\Omega}_{11}) \setminus \Gamma_{00}^{x+}$, $u_2|_{\Gamma_{00}^{y-}} = w$, $\frac{\partial u_2}{\partial y}|_{\Gamma_{10}^{y-}} = 0$.
6. $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{00} \cup \bar{\Omega}_{10} \cup \bar{\Omega}_{20} \cup \bar{\Omega}_{11}$, $u_1|_{\Gamma_{00}^{x-}} = w$, $\frac{\partial u_2}{\partial y}|_{\Gamma_{11}^{y+}} = 0$, $\frac{\partial u_1}{\partial x}|_{\Gamma_{20}^{x+}} = 0$.
7. $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{01} \cup \bar{\Omega}_{10} \cup \bar{\Omega}_{11} \cup \bar{\Omega}_{12}$, $u_1|_{\Gamma_{01}^{x-}} = w$, $\frac{\partial u_2}{\partial y}|_{\Gamma_{12}^{y+}} = 0$, $\frac{\partial u_1}{\partial x}|_{\Gamma_{10}^{x+}} = 0$.

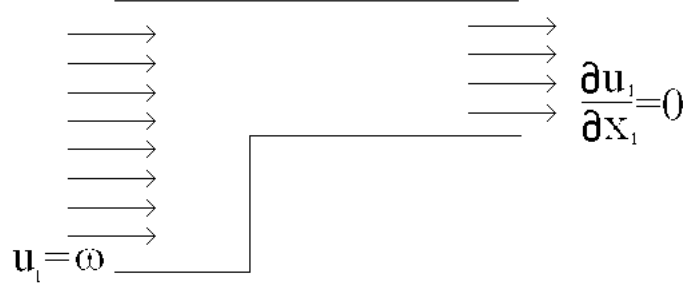


Рис. 2: Область 1-го типа

8. $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{02} \cup \bar{\Omega}_{12} \cup \bar{\Omega}_{22} \cup \bar{\Omega}_{11} \cup \bar{\Omega}_{21} \cup \bar{\Omega}_{10} \cup \bar{\Omega}_{20}$, $u_1|_{\Gamma_{02}^{x-}} = w$, $\frac{\partial u_2}{\partial y}|_{\Gamma_{10}^{y-} \cup \Gamma_{22}^{y+}} = 0$.
9. $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{01} \cup \bar{\Omega}_{02} \cup \bar{\Omega}_{11} \cup \bar{\Omega}_{12} \cup \bar{\Omega}_{20} \cup \bar{\Omega}_{21} \cup \bar{\Omega}_{22}$, $u_1|_{\Gamma_{01}^{x-} \cup \Gamma_{02}^{x-}} = w$, $\frac{\partial u_2}{\partial y}|_{\Gamma_{20}^{y-}} = 0$.
10. $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{01} \cup \bar{\Omega}_{02} \cup \bar{\Omega}_{11} \cup \bar{\Omega}_{12} \cup \bar{\Omega}_{10} \cup \bar{\Omega}_{20}$, $u_1|_{\Gamma_{01}^{x-} \cup \Gamma_{02}^{x-}} = w$, $\frac{\partial u_1}{\partial x}|_{\Gamma_{20}^{x+}} = 0$.
11. $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{00} \cup \bar{\Omega}_{01} \cup \bar{\Omega}_{11} \cup \bar{\Omega}_{21} \cup \bar{\Omega}_{20}$, $u_1|_{\Gamma_{00}^{x-} \cup \Gamma_{01}^{x-}} = w$, $\frac{\partial u_1}{\partial x}|_{\Gamma_{20}^{x+} \cup \Gamma_{21}^{x+}} = 0$.
12. $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{00} \cup \bar{\Omega}_{01} \cup \bar{\Omega}_{11} \cup \bar{\Omega}_{20} \cup \bar{\Omega}_{21}$, $u_1|_{\Gamma_{00}^{x-}} = w$, $\frac{\partial u_2}{\partial y}|_{\Gamma_{20}^{y-}} = 0$.
13. $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{01} \cup \bar{\Omega}_{11} \cup \bar{\Omega}_{21} \cup \bar{\Omega}_{22} \cup \bar{\Omega}_{10} \cup \bar{\Omega}_{20}$, $u_1|_{\Gamma_{01}^{x-}} = w$, $\frac{\partial u_2}{\partial y}|_{\Gamma_{20}^{y-} \cup \Gamma_{22}^{y+}} = 0$.
14. $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{01} \cup \bar{\Omega}_{11} \cup \bar{\Omega}_{21} \cup \bar{\Omega}_{22} \cup \bar{\Omega}_{10} \cup \bar{\Omega}_{20}$, $u_2|_{\Gamma_{10}^{y-} \cup \Gamma_{20}^{y-}} = w$, $\frac{\partial u_2}{\partial y}|_{\Gamma_{22}^{y+}} = 0$, $\frac{\partial u_1}{\partial x}|_{\Gamma_{01}^{x-}} = 0$.
15. $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{00} \cup \bar{\Omega}_{10} \cup \bar{\Omega}_{20} \cup \bar{\Omega}_{11}$, $u_1|_{\Gamma_{00}^{x-}} = w$, $u_2|_{\Gamma_{11}^{y+}} = -w$, $\frac{\partial u_1}{\partial x}|_{\Gamma_{20}^{x+}} = 0$.
16. $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{00} \cup \bar{\Omega}_{01} \cup \bar{\Omega}_{02} \cup \bar{\Omega}_{11} \cup \bar{\Omega}_{20} \cup \bar{\Omega}_{21} \cup \bar{\Omega}_{22}$, $u_1|_{\Gamma_{00}^{x-} \cup \Gamma_{01}^{x-} \cup \Gamma_{02}^{x-}} = w$, $\frac{\partial u_1}{\partial x}|_{\Gamma_{20}^{x+} \cup \Gamma_{21}^{x+} \cup \Gamma_{22}^{x+}} = 0$.
17. $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{00} \cup \bar{\Omega}_{01} \cup \bar{\Omega}_{02} \cup \bar{\Omega}_{11} \cup \bar{\Omega}_{20} \cup \bar{\Omega}_{21} \cup \bar{\Omega}_{22}$, $u_1|_{\Gamma_{00}^{x-} \cup \Gamma_{01}^{x-} \cup \Gamma_{02}^{x-}} = w$, $\frac{\partial u_2}{\partial y}|_{\Gamma_{20}^{y-}} = 0$.
18. $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{00} \cup \bar{\Omega}_{01} \cup \bar{\Omega}_{02} \cup \bar{\Omega}_{10} \cup \bar{\Omega}_{20} \cup \bar{\Omega}_{21} \cup \bar{\Omega}_{22}$,
 $u_1|_{\Gamma_{00}^{x-} \cup \Gamma_{01}^{x-} \cup \Gamma_{02}^{x-}} = w$, $\frac{\partial u_2}{\partial y}|_{\Gamma_{22}^{y+}} = 0$.
19. $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{00} \cup \bar{\Omega}_{01} \cup \bar{\Omega}_{02} \cup \bar{\Omega}_{10} \cup \bar{\Omega}_{11} \cup \bar{\Omega}_{20} \cup \bar{\Omega}_{21}$, $u_1|_{\Gamma_{00}^{x-} \cup \Gamma_{01}^{x-} \cup \Gamma_{02}^{x-}} = w$, $\frac{\partial u_1}{\partial x}|_{\Gamma_{20}^{x+} \cup \Gamma_{21}^{x+}} = 0$.
20. $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{01} \cup \bar{\Omega}_{02} \cup \bar{\Omega}_{10} \cup \bar{\Omega}_{11} \cup \bar{\Omega}_{12} \cup \bar{\Omega}_{20} \cup \bar{\Omega}_{21}$, $u_1|_{\Gamma_{01}^{x-} \cup \Gamma_{02}^{x-}} = w$, $\frac{\partial u_1}{\partial x}|_{\Gamma_{20}^{x+} \cup \Gamma_{21}^{x+}} = 0$.
21. $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{00} \cup \bar{\Omega}_{01} \cup \bar{\Omega}_{02} \cup \bar{\Omega}_{11} \cup \bar{\Omega}_{20} \cup \bar{\Omega}_{21} \cup \bar{\Omega}_{22}$, $u_1|_{\Gamma_{02}^{x-}} = u_2|_{\Gamma_{00}^{y-}} = w$, $\frac{\partial u_1}{\partial x}|_{\Gamma_{20}^{x+}} = \frac{\partial u_2}{\partial y}|_{\Gamma_{22}^{y+}} = 0$.
22. $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{00} \cup \bar{\Omega}_{01} \cup \bar{\Omega}_{11} \cup \bar{\Omega}_{21} \cup \bar{\Omega}_{20}$, $u_2|_{\Gamma_{00}^{y-}} = w$, $u_2|_{\Gamma_{01}^{y+}} = -w$, $\frac{\partial u_1}{\partial x}|_{\Gamma_{20}^{x+}} = 0$.
23. $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{01} \cup \bar{\Omega}_{10} \cup \bar{\Omega}_{11} \cup \bar{\Omega}_{12}$, $u_2|_{\Gamma_{01}^{y-}} = w$, $\frac{\partial u_1}{\partial x}|_{\Gamma_{12}^{x-}} = \frac{\partial u_2}{\partial y}|_{\Gamma_{10}^{y-}} = 0$.
24. $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{01} \cup \bar{\Omega}_{11} \cup \bar{\Omega}_{21} \cup \bar{\Omega}_{20} \cup \bar{\Omega}_{22}$, $u_1|_{\Gamma_{01}^{x-}} = w$, $\frac{\partial u_1}{\partial x}|_{\Gamma_{20}^{x+}} = \frac{\partial u_2}{\partial y}|_{\Gamma_{22}^{y+}} = 0$.
25. $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{00} \cup \bar{\Omega}_{01} \cup \bar{\Omega}_{02} \cup \bar{\Omega}_{11} \cup \bar{\Omega}_{21}$, $u_1|_{\Gamma_{02}^{x-}} = u_2|_{\Gamma_{00}^{y-}} = w$, $\frac{\partial u_2}{\partial y}|_{\Gamma_{21}^{y-}} = 0$.

Параметр w следует в тестах из диапазона $[0, 1; 10]$, а ρ_γ из диапазона $[1.0; 10]$.

2.5 Задание практикума 2024 г.

Написать программу, реализующую разностную схему указанную в персональном задании (ПЗ) Провести отладку программы на точном гладком решении в области из ПЗ при нулевых значениях вектора скорости на всей границе. Методом установления найти

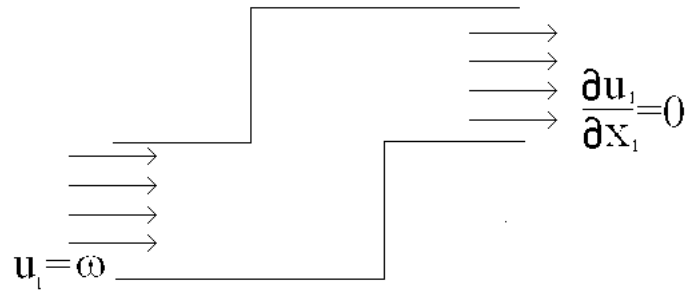


Рис. 3: Область 2-го типа

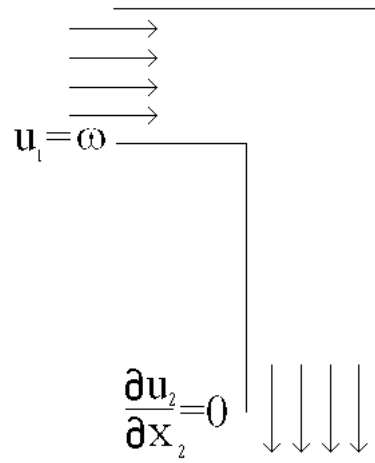


Рис. 4: Область 3-го типа

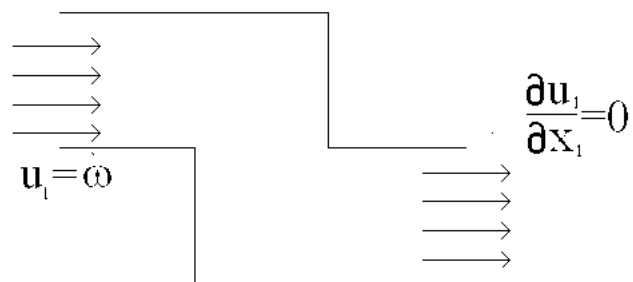


Рис. 5: Область 4-го типа

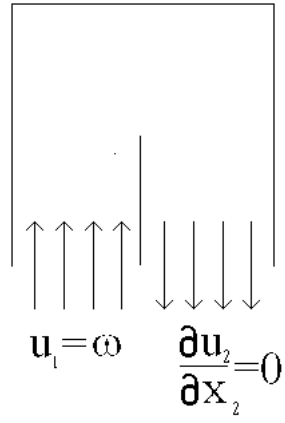


Рис. 6: Область 5-го типа

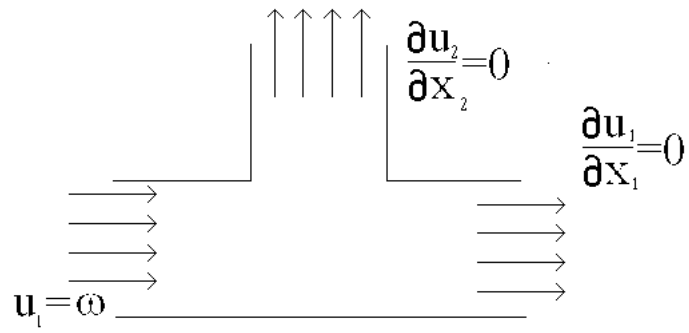


Рис. 7: Область 6-го типа

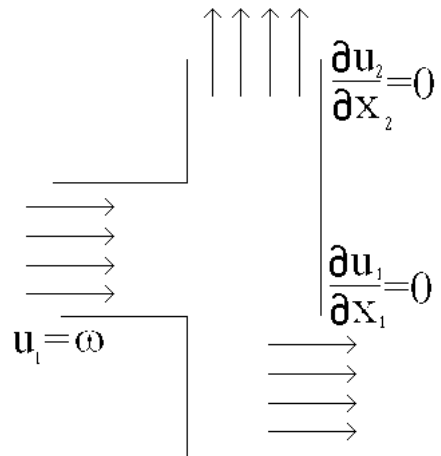


Рис. 8: Область 7-го типа

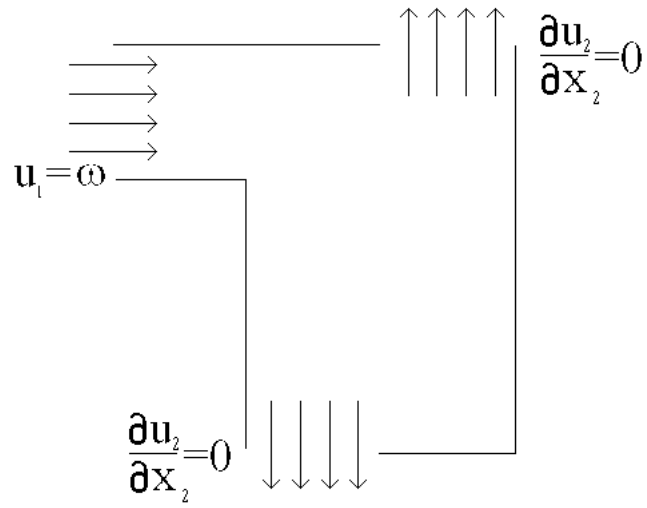


Рис. 9: Область 8-го типа

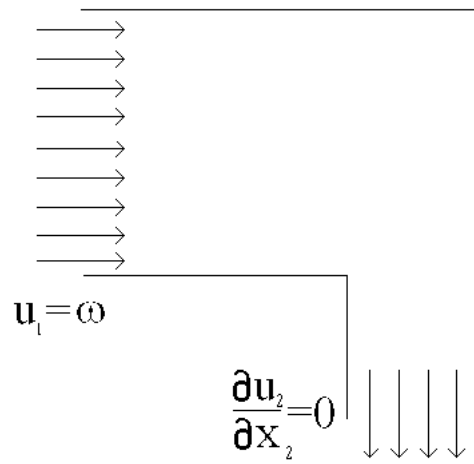


Рис. 10: Область 9-го типа

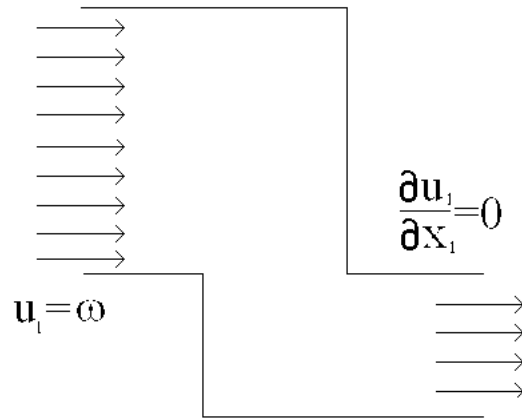


Рис. 11: Область 10-го типа

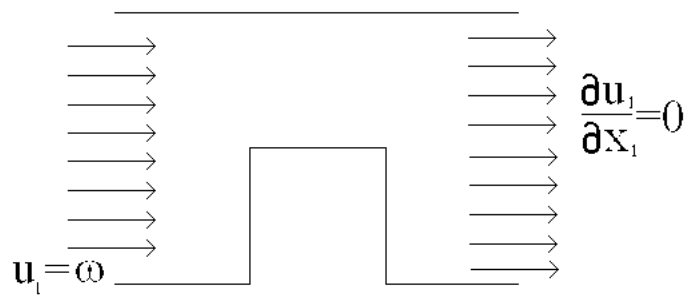


Рис. 12: Область 11-го типа

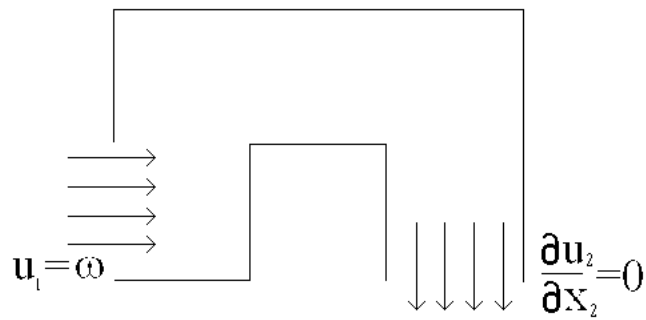


Рис. 13: Область 12-го типа

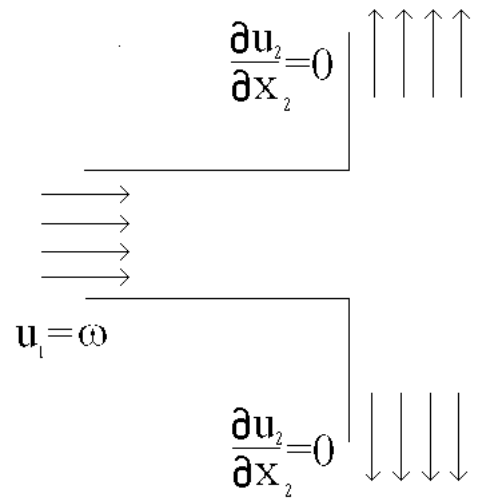


Рис. 14: Область 13-го типа

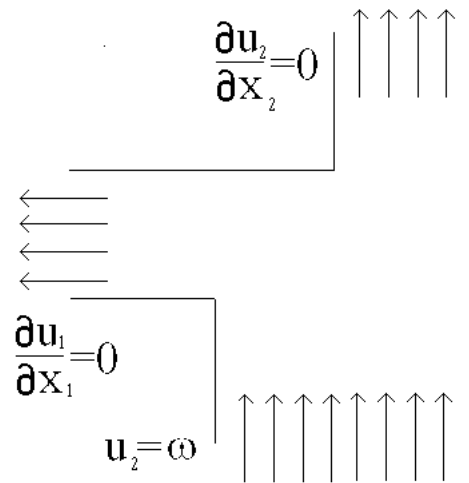


Рис. 15: Область 14-го типа

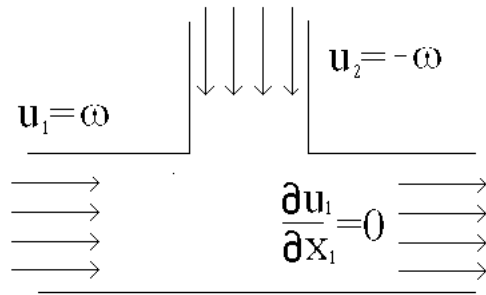


Рис. 16: Область 15-го типа

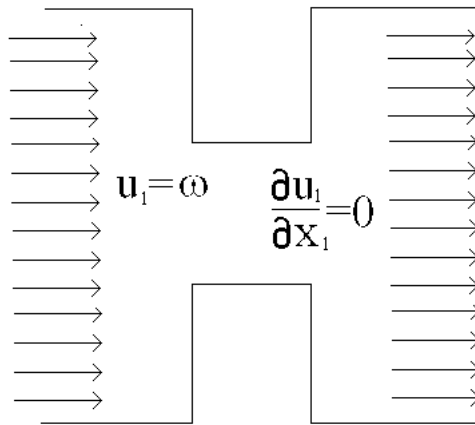


Рис. 17: Область 16-го типа

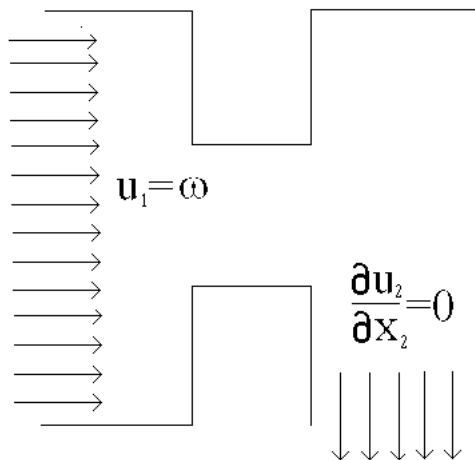


Рис. 18: Область 17-го типа

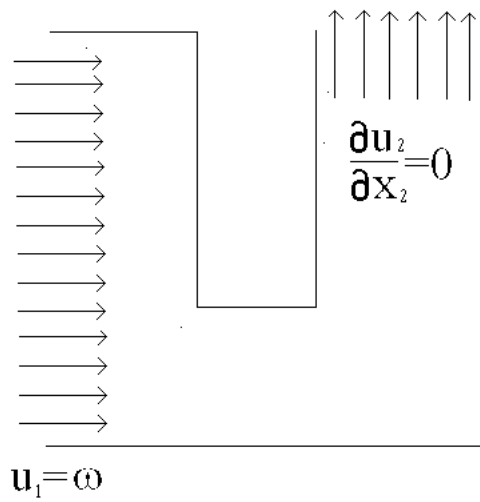


Рис. 19: Область 18-го типа

стационарное решение краевой задачи протекания газа через эту область. В программе использовать логическую основу и обозначения программы, разобранной в пособии. Для решения СЛАУ использовать один из методов CGS или BiCGSTAB (задается в ПЗ) и аналогичный алгоритм из пакета Laspack. Сравнить время счета по программам, использующим подпрограмму пакета Laspack, собственную реализацию итерационного метода, учитывающую особенности разреженной матрицы и параллельную версию.

В отчет о выполнении задания должны быть включены следующие пункты.

1. Постановки решенных дифференциальных задач.
2. Подробное описание использованной разностной схемы, включая ее поточечную запись и формулы для элементов матрицы и правой части СЛАУ.
3. Описание тестовых расчетов и полученных результатов:
 - а) расчет точного гладкого решения;
 - б) результаты расчета задачи протекания, снабженные графическими иллюстрациями, выполненными с помощью пакета GNUPLOT.
3. Выводы о точности расчетов использованной разностной схемы, характере течения и времени установления в зависимости от значений входных параметров.
5. Сравнение время счета по программам, использующим подпрограмму пакета Laspack, собственную реализацию итерационного метода и параллельной версии.

ТАБЛИЦА ПЕРСОНАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Фамилия	номер схемы	номер области	итерационный метод
Семенников	3.3	1	CGS
Брызгалин	3.7	2	BiCGSTAB
Ломовский	3.14	3	CGS
Зотова	3.8	4	BiCGSTAB
Филиппов	3.18	6	CGS
Чижик	3.2	11	BiCGSTAB
Преображенский	3.5	7	CGS
Мамедов	3.12	8	BiCGSTAB
Чечкин	3.11	9	CGS
Красильников	3.13	12	BiCGSTAB
Шибалкин	3.10	13	CGS
Шарова	3.6	10	BiCGSTAB
Солодова	3.16	5	CGS

3 Разностные схемы

3.1 Классификация РС

Все схемы практикума двухслойные, т.е. по известному решению на n -ом временном слое в результате решения САУ находится решение на $(n+1)$ -ом временном слое. Схемы можно разбить на классы, основываясь на свойствах этой САУ. Решение на верхнем

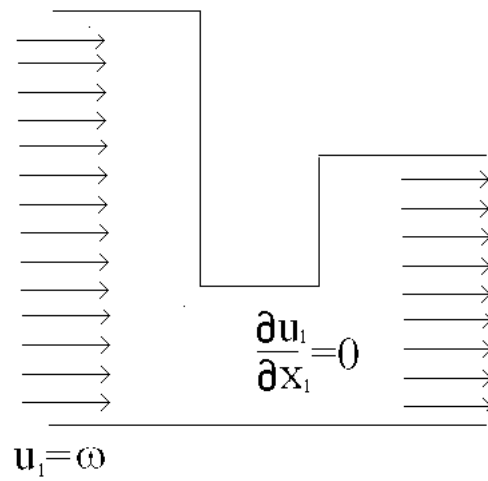


Рис. 20: Область 19-го типа

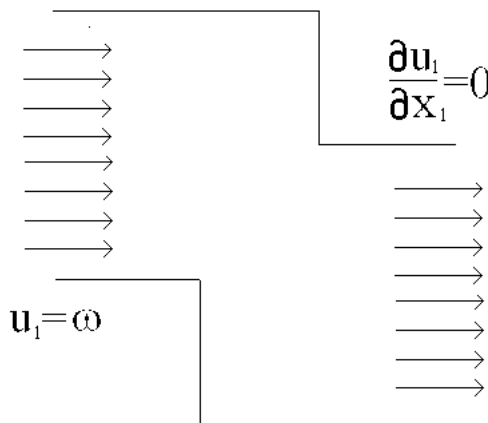


Рис. 21: Область 20-го типа

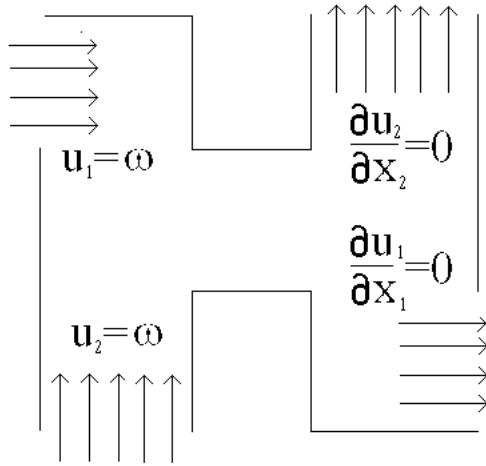


Рис. 22: Область 21-го типа

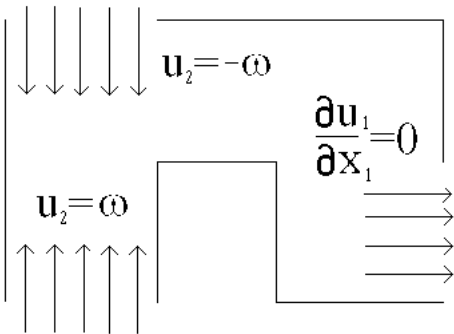


Рис. 23: Область 22-го типа

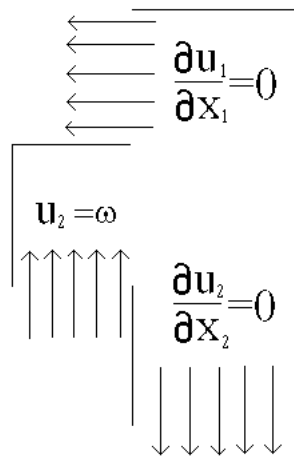


Рис. 24: Область 23-го типа

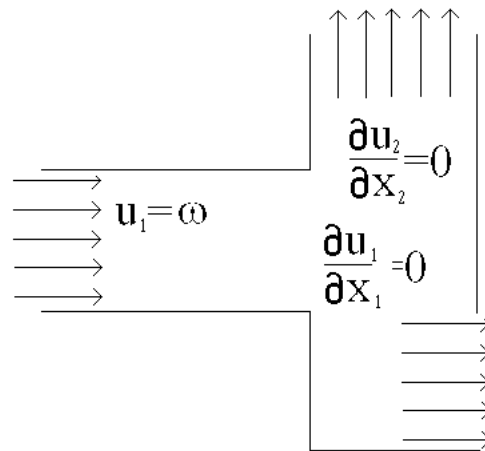


Рис. 25: Область 24-го типа

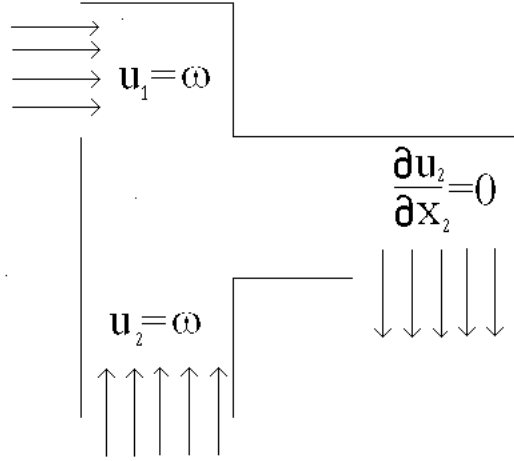


Рис. 26: Область 25-го типа

слое \hat{S} состоит из функций \hat{H} (или \hat{G} для схем, использующих вычисление логарифма плотности), \hat{V}_1 и \hat{V}_2 .

К первому классу отнесем РС, для которых составные части решения ищутся из трех СЛАУ

$$\begin{aligned} A_H \hat{H} &= b_H, \\ A_{V_1} \hat{V}_1 &= b_{V_1}, \\ A_{V_2} \hat{V}_2 &= b_{V_2}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Коэффициенты матриц A_H , A_{V_1} , A_{V_2} и векторов правых частей b_H , b_{V_1} , b_{V_2} зависят от решения S на нижнем слое. Поэтому решать эти СЛАУ можно в любом порядке или одновременно (параллельно). Такие разностные схемы назовем **параллельными**. Поскольку \hat{H} , \hat{V}_1 и \hat{V}_2 являются решениями независимых систем, то память под них можно отводить в виде трех отдельных массивов.

Ко второму классу отнесем РС, составные части решения которых ищутся путем решения трех САУ, каждая из которых является линейной относительно функции, подлежащей определению, но решать эти системы требуется в определенном порядке. Дело в том, что элементы матриц и правых частей в системах, решаемых не первыми, зависят от уже найденных компонент решения \hat{S} . Например, РС из параграфа 3.16 приводит с САУ (3.1), с матрицами A_{V_1} и A_{V_2} , элементы которых определяются с использованием значений найденной из первой системы (3.1) функции \hat{H} . Такие РС назовем **последовательными**. Их решения также можно хранить в виде отдельных трех массивов.

К третьему классу отнесем РС, решение которых ищется из одной СЛАУ, которую не удастся разделить на самостоятельные подсистемы. Назовем РС, принадлежащие этому классу, **неразделяемыми**. Примерами таких РС служат схемы из параграфа 3.2 или 3.14. Важным отличием РС этого класса от предыдущих является то, что в уравнениях алгебраической системы оказываются связаны между собой неизвестные значения из трех составных частей решения \hat{H} , \hat{V}_1 , \hat{V}_2 . Эти уравнения являются линейными относительно вектора неизвестных $\hat{S} = (\hat{H}, \hat{V}_1, \hat{V}_2)^T$ и решению на каждом временном слое

подлежит СЛАУ

$$A\hat{S} = b, \quad (3.2)$$

где коэффициенты матрицы A и правой части b определяются значениями решения на нижнем слое S . Матрицу A удобно представлять в блочном виде

$$\begin{pmatrix} A_{HH} & A_{HV_1} & A_{HV_2} \\ A_{V_1H} & A_{V_1V_1} & A_{V_1V_2} \\ A_{V_2H} & A_{V_2V_1} & A_{V_2V_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{H} \\ \hat{V}_1 \\ \hat{V}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_H \\ b_{V_1} \\ b_{V_2} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Каждая строка матрицы A содержит очень много нулевых элементов: отличными от нуля являются элементы матрицы, которые являются коэффициентами для неизвестных \hat{H} , \hat{V}_1 и \hat{V}_2 , которые участвуют в аппроксимации соответствующего уравнения дифференциальной системы в рассматриваемой точке. Число таких отличных от нуля элементов для любой РС из практикума заведомо меньше 27, где $27=3*9$. Здесь 3 – число частей вектора \hat{S} , а 9 – число точек из девятиточечного набора узлов

$$(m_1, m_2), (m_1 \pm 1, m_2), (m_1, m_2 \pm 1), (m_1 \pm 1, m_2 \pm 1), \quad (3.4)$$

значения \hat{S} в которых могут быть использованы при аппроксимациях. В то же время число узлов сетки равно числу M , которое имеет порядок M_1M_2 , и существенно превышает число 27. Такие матрицы называются сильно разреженными и для решения СЛАУ с этими матрицами разработаны специальные алгоритмы решения.

Важным параметром разреженной матрицы служит ширина ее ленты [6]. Матрицу A называют $(2q + 1)$ -диагональной или имеющей ленточную структуру, если $a_{ij} = 0$ при $|i - j| > q$. Скорость решения задач с ленточными матрицами сильно зависит от ширины ленты: чем она меньше, тем быстрее работают алгоритмы. При задании порядка неизвестных в векторе \hat{S} в виде

$$\hat{H}_0, \hat{H}_1, \dots, \hat{H}_M (\hat{V}_1)_0 (\hat{V}_1)_1, \dots, (\hat{V}_1)_M, (\hat{V}_2)_0 (\hat{V}_2)_1, \dots, (\hat{V}_2)_M,$$

ширина ленты будет порядка M , поскольку в одно уравнение входят с ненулевыми коэффициентами неизвестные из различных частей вектора \hat{S} . Если же выбрать следующий порядок неизвестных

$$\hat{H}_0, (\hat{V}_1)_0, (\hat{V}_2)_0, \hat{H}_1, (\hat{V}_1)_1, (\hat{V}_2)_1, \dots, \hat{H}_M, (\hat{V}_1)_M, (\hat{V}_2)_M. \quad (3.5)$$

и соответствующую нумерацию узлов, то ширина ленты оказывается порядка $\min(M_1, M_2)$, что приводит к существенному ускорению скорости решения СЛАУ. Обычно нумерация узлов проводится следующим образом. Фиксируется наименьшее значение одной компоненты двойного индекса узла и последовательно нумеруются все узлы, имеющие всевозможные значения другой компоненты. После чего первая компонента увеличивается на единицу и снова происходит перебор всех узлов по второй компоненте. И так далее. Выбор компоненты, которую фиксируют, стараются выбирать так, чтобы ширина ленты была наименьшей.

Хранение значений неизвестных на временном слое для неразделяемых РС удобнее организовывать в виде одного массива размерности порядка $3M$.

Поиск решения РС из первых трех классов осуществляется путем решения СЛАУ хотя и с сильно разреженными матрицами, но с достаточно большой шириной ленты.

Методы решения таких систем основаны на использовании либо прямых методов [9], адаптированных под ленточную структуру матриц, либо на итерационном методе бисопряженных градиентов [4]. Использование неявных РС преследует цель избавиться от условной устойчивости, являющейся неустранимым свойством явных РС. Для этого в разностных аппроксимациях максимально используются значения решения с верхнего слоя, но так, чтобы получающиеся САУ были линейными (для класса последовательных РС это условие выполняется только при определенном порядке решения СЛАУ). Однако трудоемкость таких методов существенно превышает затраты для поиска решения по явным РС, которые характеризуются числом арифметических операций, требуемых для определения решения на очередном слое, пропорциональным числу узлов на временном слое. Поэтому в теории РС был введен специальный термин **экономичные РС** [6].

Определение. РС называется **экономичной**, если выполнены следующие два условия.

1. РС является безусловно устойчивой.
2. Число арифметических операций при переходе от слоя к слою пропорционально числу неизвестных.

Часто требование из первого пункта ослабляют до условия устойчивости вида

$$\tau \leq C \ln\left(\frac{1}{h}\right).$$

Четвертый класс схем практикума составляют экономичные РС. Используемые в практикуме РС часто называют схемами с **расщепляющимися операторами**. Идея использовать подобный подход для построения экономичных РС принадлежит Яненко Н.Н. Он первым предложил его для нестационарного уравнения теплопроводности. Для РС этого класса удается теоретически обосновать сходимость и устойчивость в случае гладкости точных решений. Однако при реально допустимых шагах сетки решения этих РС часто лишь качественно похожи на точные решения. Это связано с тем, что для расщепления разностных операторов используются дополнительные слагаемые, которые сильно влияют на точность аппроксимации (формально не меняя ее порядок).

3.2 Схема для $\ln(\rho)$ с центральными разностями

Для построения разностной схемы, для которой автоматически выполняется условие положительности функции плотности, система (2.1) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s \left(u_k \frac{\partial g}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k g}{\partial x_k} + (2-g) \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) &= f_0, \\ \frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{1}{3} \left(u_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^2}{\partial x_k} \right) + \frac{1}{2} \sum_{m=1, m \neq k}^s \left(u_m \frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m u_k}{\partial x_m} - u_k \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \right) + p'_\rho(\rho) \frac{\partial g}{\partial x_k} &= \\ = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k^2} + \sum_{m=1, m \neq k}^s \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_m^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_m} \right) \right) + f_k, \quad k = 1, \dots, s, \\ p = p(\rho), \quad g = \ln \rho. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Правая часть первого уравнения системы (3.6) равна функции f_0 , которая в системе (2.1) является тождественным нулем. Однако в целях отладки программ и проверки

теоретических оценок точности численных методов удобно иметь примеры задач, обладающие точными гладкими решениями, выраженными через элементарные функции. Таких примеров для задачи (2.1)-(2.5) не известно. Поэтому поступают следующим образом. Задают пару гладких функций (ρ, \mathbf{u}) , определяемых через элементарные функции. При этом функция \mathbf{u} должна удовлетворять граничному условию (2.5). Подставив эти функции в уравнения (3.6), вычисляют функции f_k ($k=0, \dots, s$), при которых пара (ρ, \mathbf{u}) является решением системы (3.6). Тем самым, получается начально-краевая задача, имеющая точное гладкое решение.

Сеточную функцию, задающую разностное приближение для плотности ρ , обозначим H . Аналогично, разностные аналоги функций g и \mathbf{u} обозначим G и \mathbf{V} соответственно. Функции H, G и \mathbf{V} будем считать заданными на сетке $\bar{\Omega}_{\bar{h}}$. Для поиска численного решения задачи (3.6),(2.4),(2.5) предлагается использовать р.с:

$$G_t + 0.5 \sum_{k=1}^s \left(V_k \hat{G}_0 + (V_k \hat{G})_0 + 2(\hat{V}_k)_0 - G(V_k)_0 \right) = \tau \eta \sum_{k=1}^s (\Phi_{s_k} \hat{G}_{x_k})_{\bar{x}_k} + f_0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}}; \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} & G_t + 0.5 \left((V_k \hat{G})_{x_k} + 2(\hat{V}_k)_{x_k} - G(V_k)_{x_k} \right) - \\ & - 0.5 h_k \left((GV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{+1_k} - 0.5 (GV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{+2_k} + (2 - G) \left((V_k)_{x_k \bar{x}_k}^{+1_k} - 0.5 (V_k)_{x_k \bar{x}_k}^{+2_k} \right) \right) = \\ & = \frac{2\tau \eta \Phi_{s_k}}{h_k} \hat{G}_{x_k} + f_0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_k^-, \quad k = 1, \dots, s; \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} & G_t + 0.5 \left((V_k \hat{G})_{\bar{x}_k} + 2(\hat{V}_k)_{\bar{x}_k} - G(V_k)_{\bar{x}_k} \right) + \\ & + 0.5 h_k \left((GV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{-1_k} - 0.5 (GV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{-2_k} + (2 - G) \left((V_k)_{x_k \bar{x}_k}^{-1_k} - 0.5 (V_k)_{x_k \bar{x}_k}^{-2_k} \right) \right) = \\ & = -\frac{2\tau \eta \Phi_{s_k}}{h_k} \hat{G}_{\bar{x}_k} + f_0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_k^+, \quad k = 1, \dots, s. \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} & (V_k)_t + \frac{1}{3} \left(V_k (\hat{V}_k)_0 + (V_k \hat{V}_k)_0 \right) + \frac{1}{2} \sum_{m=1, m \neq k}^s \left(V_m (\hat{V}_k)_0 + (V_m \hat{V}_k)_0 - V_k (V_m)_0 \right) + \\ & + p'_\rho(e^G) \hat{G}_0 = \tilde{\mu} \left(\frac{4}{3} (\hat{V}_k)_{x_k \bar{x}_k} + \sum_{m=1, m \neq k}^s (\hat{V}_k)_{x_m \bar{x}_m} \right) - \\ & - (\tilde{\mu} - \mu e^{-G}) \left(\frac{4}{3} (V_k)_{x_k \bar{x}_k} + \sum_{m=1, m \neq k}^s (V_k)_{x_m \bar{x}_m} \right) + \frac{\mu e^{-G}}{3} \sum_{m=1, m \neq k}^s (V_m)_{x_k x_m} + f_k, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}}, \\ & \hat{V}_k = 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_{\bar{h}}, \quad k = 1, \dots, s. \end{aligned} \quad (3.10)$$

где $\tilde{\mu} = \mu \|e^{-G}\|_C$, а функция равна $\Phi = H \equiv e^G$ или $\Phi = V^2$.

Величина η является положительной константой. Ее значение подбирается экспериментально. Дело в том, что в разностной схеме использованы центральные разности по пространственным переменным, что приводит к появлению осцилляций у численного решения в окрестности точек разрыва точного решения дифференциальной задачи. Такие схемы называют немонотонными. У немонотонных схем часто тяжело проводить анализ полученного разностного решения и поэтому от немонотонности схемы требуется избавляться. Один из способов сгладить осцилляции используется в схеме (3.7)-(3.10). Он называется введение искусственной вязкости, влияние которой регулируется значением η . Одним из возможных заданий практикума является определение оптимального

значения этого параметра, при котором осцилляции пропадают, но в то же время искусственная вязкость еще не сильно сглаживает полученное решение, искажая его поведение в областях резкого изменения (например, в окрестности разрывов или погранслоев).

В качестве значений разностного решения на нулевом слое берутся проекции на сетку $\bar{\Omega}_h$ функций $\ln(\rho_0)$ и \mathbf{u}_0 :

$$G^0 = \ln(\rho_0), \quad \mathbf{V}^0 = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}_h. \quad (3.11)$$

Схема (3.7)-(3.11) двухслойная. Это означает, что при известном решении на n -ом временном слое решение на $(n+1)$ -ом определяется из СЛАУ

$$A\hat{S} = b. \quad (3.12)$$

Вектор неизвестных \hat{S} в трехмерном случае составлен из значений функций G , $V1$, $V2$ и $V3$ на $(n+1)$ -ом временном слое. В работе [3] доказано, что решение СЛАУ (3.12) в случае уравнения состояния $p = C\rho$ всегда существует и единственно.

Порядок записи неизвестных в векторе \hat{S} при решении системы (3.12) определяется из условия минимальности ширины ленты матрицы A . Для достижения этого условия нумерация узлов осуществляется следующим образом. Нулевым узлом считается узел, имеющий наименьшие значения всех пространственных координат. Далее последовательно выбираются узлы, у которых в первую очередь увеличивается на значение шага первая координата, потом вторая и в последнюю очередь третья (если решаемая задача трехмерная). При этом, когда изменяется вторая первая принимает наименьшее возможное значение, а при изменении третьей минимальные значения принимают уже первые две координаты. Пронумеровав все узлы, записываем вектор неизвестных \hat{S} в виде

$$(\hat{G}(0), \hat{V}1(0), \hat{V}2(0), \hat{V}3(0), \hat{G}(1), \hat{V}1(1), \hat{V}2(1), \hat{V}3(1), \dots)^T$$

Такой выбор последовательности элементов вектора \hat{S} обеспечивает минимальную ширину ленты матрицы A .

РС для $\ln(\rho)$ с центральными разностями в случае двух пространственных переменных

Для определения коэффициентов матрицы A и вектора b требуется расписать уравнения схемы (3.7)-(3.10) в поточечном виде. Проведем эти выкладки на примере двумерной задачи с нулевыми значениями скорости на границе для схемы без искусственной вязкости ($\eta = 0$) и $f_0 = 0$.

Для этого запишем уравнения (3.7), используя значения функций в узлах сетки

$$\begin{aligned} & \frac{G_{m_1, m_2}^{n+1} - G_{m_1, m_2}^n}{\tau} + \frac{1}{2} \left(V_{1m_1, m_2}^n \frac{G_{m_1+1, m_2}^{n+1} - G_{m_1-1, m_2}^{n+1}}{2h_1} \right. \\ & + \frac{V_{1m_1+1, m_2}^n G_{m_1+1, m_2}^{n+1} - V_{1m_1-1, m_2}^n G_{m_1-1, m_2}^{n+1}}{2h_1} + 2 \frac{V_{1m_1+1, m_2}^{n+1} - V_{1m_1-1, m_2}^{n+1}}{2h_1} \\ & + V_{2m_1, m_2}^n \frac{G_{m_1, m_2+1}^{n+1} - G_{m_1, m_2-1}^{n+1}}{2h_2} + \frac{V_{2m_1, m_2+1}^n G_{m_1, m_2+1}^{n+1} - V_{2m_1, m_2-1}^n G_{m_1, m_2-1}^{n+1}}{2h_2} \\ & \left. + 2 \frac{V_{2m_1, m_2+1}^{n+1} - V_{2m_1, m_2-1}^{n+1}}{2h_2} \right) - \frac{G_{m_1, m_2}^n}{2} \left(\frac{V_{1m_1+1, m_2}^n - V_{1m_1-1, m_2}^n}{2h_1} \right. \\ & \left. + \frac{V_{2m_1, m_2+1}^n - V_{2m_1, m_2-1}^n}{2h_2} \right) = 0, \quad \mathbf{x} = (m_1 h_1, m_2 h_2) \in \Omega_h, \end{aligned} \quad (3.13)$$

Умножим уравнение (3.13) на 4τ и приведем подобные при неизвестных значениях функций G и V с верхнего слоя. В результате получим следующие уравнения

$$\begin{aligned}
& 4G_{m_1, m_2}^{n+1} - \frac{\tau}{h_1} (V_{1m_1-1, m_2}^n + V_{1m_1, m_2}^n) G_{m_1-1, m_2}^{n+1} - \frac{\tau}{h_2} (V_{2m_1, m_2-1}^n + V_{2m_1, m_2}^n) G_{m_1, m_2-1}^{n+1} \\
& + \frac{\tau}{h_1} (V_{1m_1+1, m_2}^n + V_{1m_1, m_2}^n) G_{m_1+1, m_2}^{n+1} + \frac{\tau}{h_2} (V_{2m_1, m_2+1}^n + V_{2m_1, m_2}^n) G_{m_1, m_2+1}^{n+1} - \\
& - \frac{2\tau}{h_1} V_{1m_1-1, m_2}^{n+1} - \frac{2\tau}{h_2} V_{2m_1, m_2-1}^{n+1} + \frac{2\tau}{h_1} V_{1m_1+1, m_2}^{n+1} + \frac{2\tau}{h_2} V_{2m_1, m_2+1}^{n+1} = \\
& = 4G_{m_1, m_2}^n + \tau G_{m_1, m_2}^n \left(\frac{V_{1m_1+1, m_2}^n - V_{1m_1-1, m_2}^n}{h_1} + \frac{V_{2m_1, m_2+1}^n - V_{2m_1, m_2-1}^n}{h_2} \right), \quad \mathbf{x} \in \Omega_h.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Аналогично, расписав уравнения (3.8) и (3.9), умножив полученные равенства на 2τ и приведя подобные при искомым значениях с верхнего слоя, получим уравнения в граничных точках γ .

$$\begin{aligned}
& 2G_{0, m_2}^{n+1} + \frac{\tau}{h_1} V_{11, m_2}^n G_{1, m_2}^{n+1} + \frac{2\tau}{h_1} V_{11, m_2}^{n+1} = 2G_{0, m_2}^n + \frac{\tau}{h_1} G_{0, m_2}^n V_{11, m_2}^n + \\
& + \frac{2\tau}{h_1} (-2.5G_{1, m_2}^n V_{11, m_2}^n + 2G_{2, m_2}^n V_{12, m_2}^n - 0.5G_{3, m_2}^n V_{13, m_2}^n + \\
& + (2 - G_{0, m_2}^n) (-2.5V_{11, m_2}^n + 2V_{12, m_2}^n - 0.5V_{13, m_2}^n)), \quad \mathbf{x} \in \gamma_1^-,
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
& 2G_{M_1, m_2}^{n+1} - \frac{\tau}{h_1} V_{1M_1-1, m_2}^n G_{M_1-1, m_2}^{n+1} - \frac{2\tau}{h_1} V_{1M_1-1, m_2}^{n+1} = 2G_{M_1, m_2}^n - \frac{\tau}{h_1} G_{M_1, m_2}^n V_{1M_1-1, m_2}^n - \\
& - \frac{2\tau}{h_1} (-2.5G_{M_1-1, m_2}^n V_{1M_1-1, m_2}^n + 2G_{M_1-2, m_2}^n V_{1M_1-2, m_2}^n - G_{M_1-3, m_2}^n V_{1M_1-3, m_2}^n + \\
& + (2 - G_{M_1, m_2}^n) (-2.5V_{1M_1-1, m_2}^n + 2V_{1M_1-2, m_2}^n - 0.5V_{1M_1-3, m_2}^n)), \quad \mathbf{x} \in \gamma_1^+,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
& 2G_{m_1, 0}^{n+1} + \frac{\tau}{h_2} V_{2m_1, 1}^n G_{m_1, 1}^{n+1} + \frac{2\tau}{h_2} V_{2m_1, 1}^{n+1} = 2G_{m_1, 0}^n + \frac{\tau}{h_2} G_{m_1, 0}^n V_{2m_1, 1}^n + \\
& + \frac{2\tau}{h_2} (-2.5G_{m_1, 1}^n V_{2m_1, 1}^n + 2G_{m_1, 2}^n V_{2m_1, 2}^n - 0.5G_{m_1, 3}^n V_{2m_1, 3}^n + \\
& + (2 - G_{m_1, 0}^n) (-2.5V_{2m_1, 1}^n + 2V_{2m_1, 2}^n - 0.5V_{2m_1, 3}^n)), \quad \mathbf{x} \in \gamma_2^-,
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
& 2G_{m_1, M_2}^{n+1} - \frac{2\tau}{h_2} V_{2m_1, M_2-1}^n G_{m_1, M_2-1}^{n+1} - \frac{2\tau}{h_2} V_{2m_1, M_2-1}^{n+1} = 2G_{m_1, M_2}^n - \frac{\tau}{h_2} G_{m_1, M_2}^n V_{2m_1, M_2-1}^n - \\
& - \frac{\tau}{h_2} (-2.5G_{m_1, M_2-1}^n V_{2m_1, M_2-1}^n + 2G_{m_1, M_2-2}^n V_{2m_1, M_2-2}^n - 0.5G_{m_1, M_2-3}^n V_{2m_1, M_2-3}^n + \\
& + (2 - G_{m_1, M_2}^n) (-2.5V_{2m_1, M_2-1}^n + 2V_{2m_1, M_2-2}^n - 0.5V_{2m_1, M_2-3}^n)), \quad \mathbf{x} \in \gamma_2^+,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Аналогично из уравнений (3.10) получаем

$$\begin{aligned}
& \left(6 + 4\tau\tilde{\mu}\left(\frac{4}{h_1^2} + \frac{3}{h_2^2}\right)\right) V_{1m_1, m_2}^{n+1} - \left(\frac{\tau}{h_1} (V_{1m_1-1, m_2}^n + V_{1m_1, m_2}^n) + \frac{8\tau\tilde{\mu}}{h_1^2}\right) V_{1m_1-1, m_2}^{n+1} - \\
& - \left(\frac{3\tau}{2h_2} (V_{2m_1, m_2-1}^n + V_{2m_1, m_2}^n) + \frac{6\tau\tilde{\mu}}{h_2^2}\right) V_{1m_1, m_2-1}^{n+1} + \\
& + \left(\frac{\tau}{h_1} (V_{1m_1+1, m_2}^n + V_{1m_1, m_2}^n) - \frac{8\tau\tilde{\mu}}{h_1^2}\right) V_{1m_1+1, m_2}^{n+1} + \\
& + \left(\frac{3\tau}{2h_2} (V_{2m_1, m_2+1}^n + V_{2m_1, m_2}^n) - \frac{6\tau\tilde{\mu}}{h_2^2}\right) V_{1m_1, m_2+1}^{n+1} - \\
& - \frac{3\tau p'_\rho(H_{m_1, m_2}^n)}{h_1} G_{m_1-1, m_2}^{n+1} + \frac{3\tau p'_\rho(H_{m_1, m_2}^n)}{h_1} G_{m_1+1, m_2}^{n+1} = \\
& = 6V_{1m_1, m_2}^n + \frac{3\tau}{2h_2} V_{1m_1, m_2}^n (V_{2m_1, m_2+1}^n - V_{2m_1, m_2-1}^n) + \\
& + 6\tau \left(\frac{\mu}{H_{m_1, m_2}^n} - \tilde{\mu}\right) \left(\frac{4}{3h_1^2} (V_{1m_1+1, m_2}^n - 2V_{1m_1, m_2}^n + V_{1m_1-1, m_2}^n) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{h_2^2} (V_{1m_1, m_2+1}^n - 2V_{1m_1, m_2}^n + V_{1m_1, m_2-1}^n)\right) + \\
& + \frac{\tau\mu}{2H_{m_1, m_2}^n h_1 h_2} (V_{2m_1+1, m_2+1}^n - V_{2m_1-1, m_2+1}^n - V_{2m_1+1, m_2-1}^n + V_{2m_1-1, m_2-1}^n) + \\
& + 6\tau f_{1m_1, m_2}^n, \quad \mathbf{x} \in \Omega_h,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
& \left(6 + 4\tau\tilde{\mu}\left(\frac{3}{h_1^2} + \frac{4}{h_2^2}\right)\right) V_{2m_1, m_2}^{n+1} - \left(\frac{3\tau}{2h_1} (V_{1m_1-1, m_2}^n + V_{1m_1, m_2}^n) + \frac{6\tau\tilde{\mu}}{h_1^2}\right) V_{2m_1-1, m_2}^{n+1} - \\
& - \left(\frac{\tau}{h_2} (V_{2m_1, m_2-1}^n + V_{2m_1, m_2}^n) + \frac{8\tau\tilde{\mu}}{h_2^2}\right) V_{2m_1, m_2-1}^{n+1} + \\
& + \left(\frac{3\tau}{2h_1} (V_{1m_1+1, m_2}^n + V_{1m_1, m_2}^n) - \frac{6\tau\tilde{\mu}}{h_1^2}\right) V_{2m_1+1, m_2}^{n+1} + \\
& + \left(\frac{\tau}{h_2} (V_{2m_1, m_2+1}^n + V_{2m_1, m_2}^n) - \frac{8\tau\tilde{\mu}}{h_2^2}\right) V_{2m_1, m_2+1}^{n+1} - \\
& - \frac{3\tau p'_\rho(H_{m_1, m_2}^n)}{h_2} G_{m_1, m_2-1}^{n+1} + \frac{3\tau p'_\rho(H_{m_1, m_2}^n)}{h_2} G_{m_1, m_2+1}^{n+1} = \\
& = 6V_{2m_1, m_2}^n + \frac{3\tau}{2h_1} V_{2m_1, m_2}^n (V_{1m_1+1, m_2}^n - V_{1m_1-1, m_2}^n) + \\
& + 6\tau \left(\frac{\mu}{H_{m_1, m_2}^n} - \tilde{\mu}\right) \left(\frac{1}{h_1^2} (V_{2m_1+1, m_2}^n - 2V_{2m_1, m_2}^n + V_{2m_1-1, m_2}^n) + \right. \\
& \left. + \frac{4}{3h_2^2} (V_{2m_1, m_2+1}^n - 2V_{2m_1, m_2}^n + V_{2m_1, m_2-1}^n)\right) + \\
& + \frac{\tau\mu}{2H_{m_1, m_2}^n h_1 h_2} (V_{1m_1+1, m_2+1}^n - V_{1m_1-1, m_2+1}^n - V_{1m_1+1, m_2-1}^n + V_{1m_1-1, m_2-1}^n) + \\
& + 6\tau f_{2m_1, m_2}^n, \quad \mathbf{x} \in \Omega_h.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

3.3 Схема с центральными разностями $(ln(\rho), u)$ (последовательная)

Для поиска численного решения двумерной задачи (3.6), (2.4), (2.5) можно использовать р.с., в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности, а функции G и V на верхнем слое ищутся путем последовательного решения трех СЛАУ:

$$\begin{aligned}
G_t + 0.5 (V_1 \hat{G}_0^{\hat{x}_1} + (V_1 \hat{G})_0^{\hat{x}_1} + (2 - G)V_{1_0}^{\hat{x}_1} + V_2 \hat{G}_0^{\hat{x}_2} + (V_2 \hat{G})_0^{\hat{x}_2} + (2 - G)V_{2_0}^{\hat{x}_2}) &= f_0, \quad x \in \Omega_h, \\
G_t + 0.5 ((V_k \hat{G})_{x_k} + (2 - G)V_{k x_k}) - 0.5 h_k ((GV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{(+1k)} - \\
- 0.5 (GV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{(+2k)} + (2 - G)(V_k^{(+1k)} - 0.5 V_k^{(+2k)})) &= f_0, \quad x \in \gamma_k^-, \quad k = 1, 2, \\
G_t + 0.5 ((V_k \hat{G})_{\bar{x}_k} + (2 - G)V_{k \bar{x}_k}) + 0.5 h_k ((GV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{(-1k)} - \\
- 0.5 (GV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{(-2k)} + (2 - G)(V_k^{(-1k)} - 0.5 V_k^{(-2k)})) &= f_0, \quad x \in \gamma_k^+, \quad k = 1, 2.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
&\hat{H}(V_k)_t + \frac{1}{3} \left(\hat{H}V_k(\hat{V}_k)_0^{\hat{x}_k} + (\hat{H}V_k \hat{V}_k)_0^{\hat{x}_k} - V_k^2 \hat{H}_0^{\hat{x}_k} \right) + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{m=1, m \neq k}^2 \left(\hat{H}V_m(\hat{V}_k)_0^{\hat{x}_m} + (\hat{H}V_m \hat{V}_k)_0^{\hat{x}_m} - V_k(\hat{H}V_m)_0^{\hat{x}_m} \right) + \\
&+ p(\hat{H})_0^{\hat{x}_k} = \mu \left(\frac{4}{3}(\hat{V}_k)_{x_k \bar{x}_k} + \sum_{m=1, m \neq k}^2 (\hat{V}_k)_{x_m \bar{x}_m} \right) + \\
&+ \frac{\mu}{3} \sum_{m=1, m \neq k}^2 (V_m)_{x_k x_m} + \hat{H}f_k, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}}, \\
\hat{V}_k &= 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_{\bar{h}}, \quad k = 1, 2.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

В качестве значений разностного решения на нулевом слое берутся проекции на сетку $\bar{\Omega}_h$ функций $ln(\rho_0)$ и \mathbf{u}_0 , а граничные значения функции скорости равны нулю.

3.4 Схема с центральными разностями $(u, ln(\rho))$ (последовательная)

Для поиска численного решения задачи (3.6), (2.4), (2.5) можно использовать р.с., в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности, а функции V и G на верхнем слое ищутся путем последовательного решения трех СЛАУ:

$$\begin{aligned}
H(V_k)_t + \frac{1}{3} \left(HV_k(\hat{V}_k)_0^{\hat{x}_k} + (HV_k \hat{V}_k)_0^{\hat{x}_k} - V_k^2 H_0^{\hat{x}_k} \right) + \\
+ \frac{1}{2} \sum_{m=1, m \neq k}^2 \left(HV_m(\hat{V}_k)_0^{\hat{x}_m} + (HV_m \hat{V}_k)_0^{\hat{x}_m} - V_k(HV_m)_0^{\hat{x}_m} \right) + \\
+ p(H)_0^{\hat{x}_k} = \mu \left(\frac{4}{3}(\hat{V}_k)_{x_k \bar{x}_k} + \sum_{m=1, m \neq k}^2 (\hat{V}_k)_{x_m \bar{x}_m} \right) + \\
+ \frac{\mu}{3} \sum_{m=1, m \neq k}^2 (V_m)_{x_k x_m} + Hf_k, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}}, \\
\hat{V}_k &= 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_{\bar{h}}, \quad k = 1, 2.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}
G_t + 0.5 (\hat{V}_1 \hat{G}_0^{\hat{x}_1} + (\hat{V}_1 \hat{G})_0^{\hat{x}_1} + (2 - G)\hat{V}_{1_0}^{\hat{x}_1} + \hat{V}_2 \hat{G}_0^{\hat{x}_2} + (\hat{V}_2 \hat{G})_0^{\hat{x}_2} + (2 - G)\hat{V}_{2_0}^{\hat{x}_2}) &= f_0, \quad x \in \Omega_h, \\
G_t + 0.5 ((\hat{V}_k \hat{G})_{x_k} + (2 - G)\hat{V}_{k x_k}) - 0.5 h_k ((GV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{(+1k)} - \\
- 0.5 (GV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{(+2k)} + (2 - G)(\hat{V}_k^{(+1k)} - 0.5 \hat{V}_k^{(+2k)})) &= f_0, \quad x \in \gamma_k^-, \quad k = 1, 2, \\
G_t + 0.5 ((\hat{V}_k \hat{G})_{\bar{x}_k} + (2 - G)\hat{V}_{k \bar{x}_k}) + 0.5 h_k ((GV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{(-1k)} - \\
- 0.5 (GV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{(-2k)} + (2 - G)(\hat{V}_k^{(-1k)} - 0.5 \hat{V}_k^{(-2k)})) &= f_0, \quad x \in \gamma_k^+, \quad k = 1, 2.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

В качестве значений разностного решения на нулевом слое берутся проекции на сетку $\bar{\Omega}_h$ функций $ln(\rho_0)$ и \mathbf{u}_0 , а граничные значения функции скорости равны нулю.

3.5 Схема с центральными разностями для $\ln(\rho)$ (параллельная)

Для поиска численного решения задачи (3.6), (2.5), (2.5) можно использовать р.с., в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности, а функции G и V на верхнем слое ищутся путем решения трех СЛАУ, последовательность решения которых произвольная:

$$\begin{aligned}
G_t + 0.5(V_1 \hat{G}_0 + (V_1 \hat{G})_0 + (2-G)V_{10} + V_2 \hat{G}_0 + (V_2 \hat{G})_0 + (2-G)V_{20}) &= f_0, \quad x \in \Omega_h, \\
G_t + 0.5((V_k \hat{G})_{x_k} + (2-G)V_{kx_k}) - 0.5h_k((GV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{(+1k)} - \\
- 0.5(GV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{(+2k)}) + (2-G)(V_{kx_k \bar{x}_k}^{(+1k)} - 0.5V_{kx_k \bar{x}_k}^{(+2k)}) &= f_0, \quad x \in \gamma_k^-, \quad k = 1, 2, \\
G_t + 0.5((V_k \hat{G})_{\bar{x}_k} + (2-G)V_{k\bar{x}_k}) + 0.5h_k((GV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{(-1k)} - \\
- 0.5(GV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{(-2k)}) + (2-G)(V_{kx_k \bar{x}_k}^{(-1k)} - 0.5V_{kx_k \bar{x}_k}^{(-2k)}) &= f_0, \quad x \in \gamma_k^+, \quad k = 1, 2.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
H(V_k)_t + \frac{1}{3} \left(HV_k(\hat{V}_k)_{x_k} + (HV_k \hat{V}_k)_{x_k} - V_k^2 H_{x_k} \right) + \\
+ \frac{1}{2} \sum_{m=1, m \neq k}^2 \left(HV_m(\hat{V}_k)_{x_m} + (HV_m \hat{V}_k)_{x_m} - V_k(HV_m)_{x_m} \right) + \\
+ p(H)_{x_k} = \mu \left(\frac{4}{3}(\hat{V}_k)_{x_k \bar{x}_k} + \sum_{m=1, m \neq k}^2 (\hat{V}_k)_{x_m \bar{x}_m} \right) + \\
+ \frac{\mu}{3} \sum_{m=1, m \neq k}^2 (V_m)_{x_k x_m} + Hf_k, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}}, \\
\hat{V}_k = 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_{\bar{h}}, \quad k = 1, 2.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

В качестве значений разностного решения на нулевом слое берутся проекции на сетку $\bar{\Omega}_h$ функций $\ln(\rho_0)$ и \mathbf{u}_0 , а граничные значения функции скорости равны нулю.

3.6 Схема для $\ln(\rho)$ с односторонними разностями

Для построения разностной схемы в двумерном случае с односторонними разностями, направленными против потока, запишем систему (2.1) в виде

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial t} + u_1 \frac{\partial g}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial g}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= 0, \\
\frac{\partial u_k}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_k}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_k}{\partial x_2} + p'_\rho(\rho) \frac{\partial g}{\partial x_k} &= \\
= \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k^2} + \sum_{m=1, m \neq k}^2 \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_m^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_m} \right) \right) + f_k, \quad k = 1, 2, \\
p = p(\rho), \quad g = \ln \rho.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Для поиска численного решения задачи (3.27), (2.4), (2.5) можно использовать р.с:

$$G_t + \delta_1 \{ \hat{G}, V_1 \} + \delta_2 \{ \hat{G}, V_2 \} + (\hat{V}_1)_{x_1} + (\hat{V}_2)_{x_2} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}}; \tag{3.28}$$

$$G_t + \hat{V}_{kx_k} = 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_k^-, \quad k = 1, 2; \tag{3.29}$$

$$G_t + \hat{V}_{k\bar{x}_k} = 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_k^+, \quad k = 1, 2; \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}
& (V_k)_t + \delta_1 \{\hat{V}_k, V_1\} + \delta_2 \{\hat{V}_k, V_2\} + \tilde{p}'_\rho(e^G) \hat{G}_{x_k}^0 = \tilde{\mu} \left(\frac{4}{3} (\hat{V}_k)_{x_k \bar{x}_k} + \sum_{m=1, m \neq k}^2 (\hat{V}_k)_{x_m \bar{x}_m} \right) - \\
& - (\tilde{\mu} - \mu e^{-G}) \left(\frac{4}{3} (V_k)_{x_k \bar{x}_k} + \sum_{m=1, m \neq k}^2 (V_k)_{x_m \bar{x}_m} \right) + \frac{\mu e^{-G}}{3} \sum_{m=1, m \neq k}^2 (V_m)_{x_k x_m}^0 + f_k, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}}, \\
& \hat{V}_k = 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_{\bar{h}}, \quad k = 1, 2.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

где $\tilde{\mu} = \mu \|e^{-G}\|_C$.

Приведем индексную запись уравнений разностной схемы (3.28)-(3.31).

$$\begin{aligned}
& \frac{G_{m_1, m_2}^{n+1} - G_{m_1, m_2}^n}{\tau} - \frac{|V_{2m_1, m_2}^n| + V_{2m_1, m_2}^n}{2h_2} G_{m_1, m_2-1}^{n+1} - \\
& - \frac{|V_{1m_1, m_2}^n| + V_{1m_1, m_2}^n}{2h_1} G_{m_1-1, m_2}^{n+1} + \left(\frac{|V_{1m_1, m_2}^n|}{h_1} + \frac{|V_{2m_1, m_2}^n|}{h_2} \right) G_{m_1, m_2}^{n+1} + \\
& + \frac{V_{1m_1, m_2}^n - |V_{1m_1, m_2}^n|}{2h_1} G_{m_1+1, m_2}^{n+1} + \frac{V_{2m_1, m_2}^n - |V_{2m_1, m_2}^n|}{2h_2} G_{m_1, m_2+1}^{n+1} + \\
& + \frac{V_{1m_1+1, m_2}^{n+1} - V_{1m_1-1, m_2}^{n+1}}{2h_1} + \frac{V_{2m_1, m_2+1}^{n+1} - V_{2m_1, m_2-1}^{n+1}}{2h_2} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_h,
\end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{G_{0, m_2}^{n+1} - G_{0, m_2}^n}{\tau} + \frac{V_{11, m_2}^{n+1} - V_{10, m_2}^{n+1}}{h_1} = 0, \quad 0 < m_2 < M_2, \\
& \frac{G_{m_1, 0}^{n+1} - G_{m_1, 0}^n}{\tau} + \frac{V_{2m_1, 1}^{n+1} - V_{2m_1, 0}^{n+1}}{h_2} = 0, \quad 0 < m_1 < M_1, \\
& \frac{G_{M_1, m_2}^{n+1} - G_{M_1, m_2}^n}{\tau} + \frac{V_{1M_1, m_2}^{n+1} - V_{1M_1-1, m_2}^{n+1}}{h_1} = 0, \quad 0 < m_2 < M_2, \\
& \frac{G_{m_1, M_2}^{n+1} - G_{m_1, M_2}^n}{\tau} + \frac{V_{2m_1, M_2}^{n+1} - V_{2m_1, M_2-1}^{n+1}}{h_2} = 0, \quad 0 < m_1 < M_1,
\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{V_{1m_1, m_2}^{n+1} - V_{1m_1, m_2}^n}{\tau} - \frac{|V_{2m_1, m_2}^n| + V_{2m_1, m_2}^n}{2h_2} V_{1m_1, m_2-1}^{n+1} - \\
& - \frac{|V_{1m_1, m_2}^n| + V_{1m_1, m_2}^n}{2h_1} V_{1m_1-1, m_2}^{n+1} + \left(\frac{|V_{1m_1, m_2}^n|}{h_1} + \frac{|V_{2m_1, m_2}^n|}{h_2} \right) V_{1m_1, m_2}^{n+1} + \\
& + \frac{V_{1m_1, m_2}^n - |V_{1m_1, m_2}^n|}{2h_1} V_{1m_1+1, m_2}^{n+1} + \frac{V_{2m_1, m_2}^n - |V_{2m_1, m_2}^n|}{2h_2} V_{1m_1, m_2+1}^{n+1} + \\
& + p'_\rho(e^{G_{m_1, m_2}^n}) \frac{G_{m_1+1, m_2}^{n+1} - G_{m_1-1, m_2}^{n+1}}{2h_1} = \\
& = \tilde{\mu} \left(\frac{4}{3} \frac{V_{1m_1-1, m_2}^{n+1} - 2V_{1m_1, m_2}^{n+1} + V_{1m_1+1, m_2}^{n+1}}{h_1^2} + \frac{V_{1m_1, m_2-1}^{n+1} - 2V_{1m_1, m_2}^{n+1} + V_{1m_1, m_2+1}^{n+1}}{h_2^2} \right) - \\
& - (\tilde{\mu} - \mu e^{-G_{m_1, m_2}^n}) \left(\frac{4}{3} \frac{V_{1m_1-1, m_2}^n - 2V_{1m_1, m_2}^n + V_{1m_1+1, m_2}^n}{h_1^2} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{V_{1m_1, m_2-1}^n - 2V_{1m_1, m_2}^n + V_{1m_1, m_2+1}^n}{h_2^2} \right) + \\
& + \frac{\mu}{3} e^{-G_{m_1, m_2}^n} \frac{V_{2m_1-1, m_2-1}^n - V_{2m_1-1, m_2+1}^n - V_{2m_1+1, m_2-1}^n + V_{2m_1+1, m_2+1}^n}{4h_1 h_2} + f_{1m_1, m_2}^{n+1}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_h,
\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{V_{2m_1, m_2}^{n+1} - V_{2m_1, m_2}^n}{2h_1} - \frac{|V_{2m_1, m_2}^n| + V_{2m_1, m_2}^n}{2h_2} V_{2m_1, m_2-1}^{n+1} - \\
& - \frac{|V_{1m_1, m_2}^n| + V_{1m_1, m_2}^n}{2h_1} V_{2m_1-1, m_2}^{n+1} + \left(\frac{|V_{1m_1, m_2}^n|}{h_1} + \frac{|V_{2m_1, m_2}^n|}{h_2} \right) V_{2m_1, m_2}^{n+1} + \\
& + \frac{V_{1m_1, m_2}^n - |V_{1m_1, m_2}^n|}{2h_1} V_{2m_1+1, m_2}^{n+1} + \frac{V_{2m_1, m_2}^n - |V_{2m_1, m_2}^n|}{2h_2} V_{2m_1, m_2+1}^{n+1} + \\
& + p'_\rho(e^{G_{m_1, m_2}^{n+1}}) \frac{G_{m_1, m_2+1}^{n+1} - G_{m_1, m_2-1}^{n+1}}{2h_2} = \\
& = \tilde{\mu} \left(\frac{V_{2m_1-1, m_2}^{n+1} - 2V_{2m_1, m_2}^{n+1} + V_{2m_1+1, m_2}^{n+1}}{h_1^2} + \frac{4}{3} \frac{V_{2m_1, m_2-1}^{n+1} - 2V_{2m_1, m_2}^{n+1} + V_{2m_1, m_2+1}^{n+1}}{h_2^2} \right) - \\
& - (\tilde{\mu} - \mu e^{-G_{m_1, m_2}^n}) \left(\frac{V_{2m_1-1, m_2}^n - 2V_{2m_1, m_2}^n + V_{2m_1+1, m_2}^n}{h_1^2} + \right. \\
& \left. + \frac{4}{3} \frac{V_{2m_1, m_2-1}^n - 2V_{2m_1, m_2}^n + V_{2m_1, m_2+1}^n}{h_2^2} \right) + \\
& + \frac{\mu}{3} e^{-G_{m_1, m_2}^n} \frac{V_{1m_1-1, m_2-1}^n - V_{1m_1-1, m_2+1}^n - V_{1m_1+1, m_2-1}^n + V_{1m_1+1, m_2+1}^n}{4h_1 h_2} + f_{2m_1, m_2}^{n+1}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_h,
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Уравнения (3.32)-(3.35) образуют СЛАУ, решая которую находим сеточное решение на очередном временном слое.

Из разностного уравнения (3.32) получаем следующее алгебраическое уравнение для всех внутренних узлов

$$\begin{aligned}
& ag_G00 \cdot G_{m_1, m_2}^{n+1} + ag_GR0 \cdot G_{m_1+1, m_2}^{n+1} + ag_GL0 \cdot G_{m_1-1, m_2}^{n+1} + ag_G0R \cdot G_{m_1, m_2+1}^{n+1} + \\
& + ag_G0L \cdot G_{m_1, m_2-1}^{n+1} + ag_V1R0 \cdot V_{1m_1+1, m_2}^{n+1} + ag_V1L0 \cdot V_{1m_1-1, m_2}^{n+1} + \\
& + ag_V2R0 \cdot V_{2m_1, m_2+1}^{n+1} + ag_V2L0 \cdot V_{2m_1, m_2-1}^{n+1} = bg,
\end{aligned} \tag{3.36}$$

где коэффициенты определяются по формулам

$$\begin{aligned}
ag_G00 &= 1 + \frac{\tau}{h_1} |V100| + \frac{\tau}{h_2} |V200|, \\
ag_GR0 &= \frac{\tau}{2h_1} (V100 - |V100|), \\
ag_GL0 &= -\frac{\tau}{2h_1} (V100 + |V100|), \\
ag_G0R &= \frac{\tau}{2h_2} (V200 - |V200|), \\
ag_G0L &= -\frac{\tau}{2h_2} (V200 + |V200|), \\
ag_V1R0 &= \frac{\tau}{2h_1}, \\
ag_V1L0 &= -\frac{\tau}{2h_1}, \\
ag_V2R0 &= \frac{\tau}{2h_2}, \\
ag_V2L0 &= -\frac{\tau}{2h_2}, \\
bg &= g00.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Из разностного уравнения (3.34) получаем

$$\begin{aligned}
& av1_V100 \cdot (V_1)_{m_1, m_2}^{n+1} + av1_V1R0 \cdot (V_1)_{m_1+1, m_2}^{n+1} + av1_V1L0 \cdot (V_1)_{m_1-1, m_2}^{n+1} + \\
& + av1_V10R \cdot (V_1)_{m_1, m_2+1}^{n+1} + av1_V10L \cdot (V_1)_{m_1, m_2-1}^{n+1} + \\
& + av1_GR0 \cdot G_{m_1+1, m_2}^{n+1} + av1_GL0 \cdot G_{m_1-1, m_2}^{n+1} = bv1,
\end{aligned} \tag{3.38}$$

где

$$\begin{aligned}
av1_V100 &= 1 + \frac{\tau}{h_1}|V100| + \frac{\tau}{h_2}|V200| + \tau\tilde{\mu} \left(\frac{8}{3h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \right), \\
av1_V1R0 &= \frac{\tau}{2h_1}(V100 - |V100|) - \frac{4\tau\tilde{\mu}}{3h_1^2}, \\
av1_V1L0 &= -\frac{\tau}{2h_1}(V100 + |V100|) - \frac{4\tau\tilde{\mu}}{3h_1^2}, \\
av1_V10R &= \frac{\tau}{2h_2}(V200 - |V200|) - \frac{\tau\tilde{\mu}}{h_2^2}, \\
av1_V10L &= -\frac{\tau}{2h_2}(V200 + |V200|) - \frac{\tau\tilde{\mu}}{h_2^2}, \\
av1_GR0 &= \frac{\tau p'_\rho}{2h_1}, \\
av1_GL0 &= -\frac{\tau p'_\rho}{2h_1}, \\
bv1 &= V100 + \tau \left(\frac{\mu}{e^{g00}} - \tilde{\mu} \right) \left(\frac{4}{3h_1^2}(V1R0 - 2V100 + V1L0) + \frac{1}{h_2^2}(V10R - 2V100 + V10L) \right) + \\
&+ \frac{\tau\mu}{12e^{g00}h_1h_2}(V2RR - V2RL - V2LR + V2LL) + \tau f_1.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Аналогично расписывается и разностное уравнение (3.35).

3.7 Схема с односторонними разностями для $(\ln(\rho), u)$ (последовательная)

Для поиска численного решения задачи (3.27),(2.4), (2.5) можно использовать р.с, по которой сначала находится функция G , а затем функции V_1 и V_2 :

$$G_t + \delta_1\{\hat{G}, V_1\} + \delta_2\{\hat{G}, V_2\} + (V_1)_{x_1}^0 + (V_2)_{x_2}^0 = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}}; \tag{3.40}$$

$$G_t + V_{kx_k} = 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_k^-, k = 1, 2; \tag{3.41}$$

$$G_t + V_{k\bar{x}_k} = 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_k^+, k = 1, 2; \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned}
\hat{H}(V_k)_t + \delta_1\{\hat{V}_k, \hat{H}V_1\} + \delta_2\{\hat{V}_k, \hat{H}V_2\} + p(\hat{H})_{x_k}^0 &= \mu \left(\frac{4}{3}(\hat{V}_k)_{x_k\bar{x}_k} + \sum_{m=1, m \neq k}^2 (\hat{V}_k)_{x_m\bar{x}_m} \right) + \\
+ \frac{\mu}{3} \sum_{m=1, m \neq k}^2 (V_m)_{x_k x_m}^0 + \hat{H}f_k, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}}, \\
\hat{V}_k &= 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_{\bar{h}}, \quad k = 1, 2.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

3.8 Схема с односторонними разностями для $(u, \ln(\rho))$ (последовательная)

Для поиска численного решения задачи (3.27),(2.4), (2.5) можно использовать р.с, по которой сначала находятся функции V_1 и V_2 , а затем функция G :

$$\begin{aligned}
H(V_k)_t + \delta_1\{\hat{V}_k, HV_1\} + \delta_2\{\hat{V}_k, HV_2\} + p(H)_{x_k}^0 &= \mu \left(\frac{4}{3}(\hat{V}_k)_{x_k\bar{x}_k} + \sum_{m=1, m \neq k}^2 (\hat{V}_k)_{x_m\bar{x}_m} \right) + \\
+ \frac{\mu}{3} \sum_{m=1, m \neq k}^2 (V_m)_{x_k x_m}^0 + Hf_k, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}}, \\
\hat{V}_k &= 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_{\bar{h}}, \quad k = 1, 2.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$G_t + \delta_1\{\hat{G}, \hat{V}_1\} + \delta_2\{\hat{G}, \hat{V}_2\} + (\hat{V}_1)_{x_1}^0 + (\hat{V}_2)_{x_2}^0 = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}}; \quad (3.45)$$

$$G_t + \hat{V}_{kx_k} = 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_k^-, k = 1, 2; \quad (3.46)$$

$$G_t + \hat{V}_{k\bar{x}_k} = 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_k^+, k = 1, 2; \quad (3.47)$$

3.9 Схема с односторонними разностями для $\ln(\rho)$ (параллельная)

Для поиска численного решения задачи (3.27), (2.4), (2.5) можно использовать р.с, по которой системы для определения функций G и \bar{V} могут решаться в произвольном порядке:

$$G_t + \delta_1\{\hat{G}, V_1\} + \delta_2\{\hat{G}, V_2\} + (V_1)_{x_1}^0 + (V_2)_{x_2}^0 = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}}; \quad (3.48)$$

$$G_t + V_{kx_k} = 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_k^-, k = 1, 2; \quad (3.49)$$

$$G_t + V_{k\bar{x}_k} = 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_k^+, k = 1, 2; \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} H(V_k)_t + \delta_1\{\hat{V}_k, HV_1\} + \delta_2\{\hat{V}_k, HV_2\} + p(H)_{x_k}^0 &= \mu \left(\frac{4}{3}(\hat{V}_k)_{x_k\bar{x}_k} + \sum_{m=1, m \neq k}^2 (\hat{V}_k)_{x_m\bar{x}_m} \right) + \\ + \frac{\mu}{3} \sum_{m=1, m \neq k}^2 (V_m)_{x_k x_m}^0 + Hf_k, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}}, \\ \hat{V}_k &= 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_{\bar{h}}, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.51)$$

3.10 Схема А.Г.Соколова ПЛОТНОСТЬ-ИМПУЛЬС (последовательная)

Сеточная функция \mathbf{V} , приближающая функцию вектора скорости \mathbf{u} , определяется в узлах сетки $\bar{Q}_{\tau\bar{h}}$, а значения функции H , приближающей функцию плотности ρ , ищутся в узлах сетки $Q_{\tau\bar{h}}^{1/2}$ по следующей схеме, аппроксимирующей систему (2.3)

$$\begin{aligned} H_t + (\sigma_1\{\hat{H}, V_{1s_2}\})_{x_1} + (\sigma_2\{\hat{H}, V_{2s_1}\})_{x_2} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}}^{1/2}; \\ (H_{\bar{s}_1\bar{s}_2}V_1)_t + 0, 5(\sigma_1\{\hat{H}_{\bar{s}_2}\hat{V}_1, V_1\})_{x_1} + 0, 5(\sigma_1\{\hat{H}_{\bar{s}_2}\hat{V}_1^{+1}, V_1\})_{\bar{x}_1} + \\ + 0, 5(\sigma_2\{\hat{H}_{\bar{s}_1}\hat{V}_2, V_1\})_{x_2} + 0, 5(\sigma_2\{\hat{H}_{\bar{s}_1}\hat{V}_2^{+1}, V_1\})_{\bar{x}_2} + Gr_{x_1}^h p(\hat{H}) &= \\ = \mu \left(\frac{4}{3}(\hat{V}_1)_{x_1\bar{x}_1} + (\hat{V}_1)_{x_2\bar{x}_2} \right) + \frac{\mu}{3}(V_2)_{x_1x_2}^0 + \hat{f}_1\hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2}, \quad \text{при } \hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2} \neq 0, \\ \hat{V}_1 &= 0, \quad \text{при } \hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}}; \\ (H_{\bar{s}_1\bar{s}_2}V_2)_t + 0, 5(\sigma_1\{\hat{H}_{\bar{s}_2}\hat{V}_1, V_2\})_{x_1} + 0, 5(\sigma_1\{\hat{H}_{\bar{s}_2}\hat{V}_1^{+1}, V_2\})_{\bar{x}_1} + \\ + 0, 5(\sigma_2\{\hat{H}_{\bar{s}_1}\hat{V}_2, V_2\})_{x_2} + 0, 5(\sigma_2\{\hat{H}_{\bar{s}_1}\hat{V}_2^{+1}, V_2\})_{\bar{x}_2} + Gr_{x_2}^h p(\hat{H}) &= \\ = \mu \left((\hat{V}_2)_{x_1\bar{x}_1} + \frac{4}{3}(\hat{V}_2)_{x_2\bar{x}_2} \right) + \frac{\mu}{3}(V_1)_{x_1x_2}^0 + \hat{f}_2\hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2}, \quad \text{при } \hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2} \neq 0, \\ \hat{V}_2 &= 0, \quad \text{при } \hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}}, \end{aligned} \quad (3.52)$$

где

$$\begin{aligned} Gr_{x_1}^h p(H) &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} H_{\bar{s}_1\bar{s}_2} ((H_{\bar{s}_2})^{\gamma-1})_{\bar{x}_1}, \\ Gr_{x_2}^h p(H) &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} H_{\bar{s}_1\bar{s}_2} ((H_{\bar{s}_1})^{\gamma-1})_{\bar{x}_2}, \end{aligned}$$

если $p = \rho^\gamma$, и

$$Gr_{x_1}^h p(H) = p(H_{\bar{s}_2})_{\bar{x}_1},$$

$$Gr_{x_2}^h p(H) = p(H_{\bar{s}_1})_{\bar{x}_2},$$

если $p = C\rho$.

В граничных узлах $\gamma_{\bar{h}}$ значения функции \mathbf{V} считаются известными из граничных условий. В граничных узлах, где газ втекает в область, задаются значения плотности газа, которые также берутся из граничных условий.

Разностные уравнения (3.52) (для примера рассмотрен случай уравнения состояния вида $p = \rho^\gamma$) в индексах имеют вид

$$\begin{aligned} & \frac{H_{m_1, m_2}^{n+1} - H_{m_1, m_2}^n}{2h_2} + \\ & + \frac{((\tilde{V}_2)_{m_1, m_2+1}^n - |(\tilde{V}_2)_{m_1, m_2+1}^n|)H_{m_1, m_2+1}^{n+1}}{2h_2} + \frac{((\tilde{V}_1)_{m_1+1, m_2}^n - |(\tilde{V}_1)_{m_1+1, m_2}^n|)H_{m_1+1, m_2}^{n+1}}{2h_1} + \\ & + \left(\frac{1}{2h_1} ((\tilde{V}_1)_{m_1+1, m_2}^n + |(\tilde{V}_1)_{m_1+1, m_2}^n| - (\tilde{V}_1)_{m_1, m_2}^n + |(\tilde{V}_1)_{m_1, m_2}^n|) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2h_2} ((\tilde{V}_2)_{m_1, m_2+1}^n + |(\tilde{V}_2)_{m_1, m_2+1}^n| - (\tilde{V}_2)_{m_1, m_2}^n + |(\tilde{V}_2)_{m_1, m_2}^n|) \right) H_{m_1, m_2}^{n+1} - \\ & - \frac{((\tilde{V}_1)_{m_1, m_2}^n + |(\tilde{V}_1)_{m_1, m_2}^n|)H_{m_1-1, m_2}^{n+1}}{2h_1} - \frac{((\tilde{V}_2)_{m_1, m_2}^n + |(\tilde{V}_2)_{m_1, m_2}^n|)H_{m_1, m_2-1}^{n+1}}{2h_2} = 0, \\ & 0 \leq m_1 < M_1, 0 \leq m_2 < M_2, n \geq 0. \end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(\tilde{H})_{m_1, m_2}^{n+1} V_{1m_1, m_2}^{n+1} - (\tilde{H})_{m_1, m_2}^n V_{1m_1, m_2}^n}{-} \\
& \frac{((|V_{1m_1-1, m_2}^n| + V_{1m_1-1, m_2}^n)H_{1m_1-2, m_2}^{n+1} + (|V_{1m_1, m_2}^n| + V_{1m_1, m_2}^n)H_{1m_1-1, m_2}^{n+1})V_{1m_1-1, m_2}^{n+1}}{4h_1} + \\
& \quad + \frac{1}{4h_1} ((|V_{1m_1-1, m_2}^n| - V_{1m_1-1, m_2}^n + |V_{1m_1, m_2}^n| + V_{1m_1, m_2}^n)H_{1m_1-1, m_2}^{n+1} + \\
& \quad + (|V_{1m_1+1, m_2}^n| + V_{1m_1+1, m_2}^n + |V_{1m_1, m_2}^n| - V_{1m_1, m_2}^n)H_{1m_1, m_2}^{n+1})V_{1m_1, m_2}^{n+1} - \\
& \frac{((|V_{1m_1, m_2}^n| - V_{1m_1, m_2}^n)H_{1m_1, m_2}^{n+1} + (|V_{1m_1+1, m_2}^n| - V_{1m_1+1, m_2}^n)H_{1m_1+1, m_2}^{n+1})V_{1m_1+1, m_2}^{n+1}}{4h_1} + \\
& \frac{((|V_{1m_1, m_2-1}^n| + V_{1m_1, m_2-1}^n)H_{2m_1, m_2-2}^{n+1} + (|V_{1m_1, m_2}^n| + V_{1m_1, m_2}^n)H_{2m_1, m_2-1}^{n+1})V_{2m_1, m_2-1}^{n+1}}{4h_2} + \\
& \quad + \frac{1}{4h_2} ((|V_{1m_1, m_2-1}^n| - V_{1m_1, m_2-1}^n + |V_{1m_1, m_2}^n| + V_{1m_1, m_2}^n)H_{2m_1, m_2-1}^{n+1} + \\
& \quad + (|V_{1m_1, m_2+1}^n| + V_{1m_1, m_2+1}^n + |V_{1m_1, m_2}^n| - V_{1m_1, m_2}^n)H_{2m_1, m_2}^{n+1})V_{2m_1, m_2}^{n+1} - \\
& \frac{((|V_{1m_1, m_2}^n| - V_{1m_1, m_2}^n)H_{2m_1, m_2}^{n+1} + (|V_{1m_1, m_2+1}^n| - V_{1m_1, m_2+1}^n)H_{2m_1, m_2+1}^{n+1})V_{2m_1, m_2+1}^{n+1}}{4h_2} + \\
& \quad + \frac{\gamma}{\gamma-1} \tilde{H}_{m_1, m_2}^{n+1} \frac{(H_{1m_1, m_2}^{n+1})^{\gamma-1} - (H_{1m_1-1, m_2}^{n+1})^{\gamma-1}}{h_1} = \\
& = \mu \left(\frac{4}{3} \frac{V_{1m_1-1, m_2}^{n+1} - 2V_{1m_1, m_2}^{n+1} + V_{1m_1+1, m_2}^{n+1}}{h_1^2} + \frac{V_{1m_1, m_2-1}^{n+1} - 2V_{1m_1, m_2}^{n+1} + V_{1m_1, m_2+1}^{n+1}}{h_2^2} \right) + \\
& \quad + \frac{\mu}{3} \frac{V_{2m_1-1, m_2-1}^n - V_{2m_1-1, m_2+1}^n - V_{2m_1+1, m_2-1}^n + V_{2m_1+1, m_2+1}^n}{4h_1 h_2} + f_{1m_1, m_2}^{n+1} (\tilde{H})_{m_1, m_2}^{n+1}, \\
& \quad \text{при } \tilde{H}_{m_1, m_2}^{n+1} \neq 0, \\
& \hat{V}_{1m_1, m_2} = 0, \quad \text{при } \tilde{H}_{m_1, m_2}^{n+1} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\tilde{h}};
\end{aligned} \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(\tilde{H})_{m_1, m_2}^{n+1} V_{2m_1, m_2}^{n+1} - (\tilde{H})_{m_1, m_2}^n V_{2m_1, m_2}^n}{-} \\
& \frac{((|V_{2m_1-1, m_2}^n| + V_{2m_1-1, m_2}^n) H_{1m_1-2, m_2}^{n+1} + (|V_{2m_1, m_2}^n| + V_{2m_1, m_2}^n) H_{1m_1-1, m_2}^{n+1}) V_{1m_1-1, m_2}^{n+1}}{4h_1} + \\
& \frac{1}{4h_1} ((|V_{2m_1-1, m_2}^n| - V_{2m_1-1, m_2}^n + |V_{2m_1, m_2}^n| + V_{2m_1, m_2}^n) H_{1m_1-1, m_2}^{n+1} + \\
& + (|V_{2m_1+1, m_2}^n| + V_{2m_1+1, m_2}^n + |V_{2m_1, m_2}^n| - V_{2m_1, m_2}^n) H_{1m_1, m_2}^{n+1}) V_{1m_1, m_2}^{n+1} - \\
& \frac{((|V_{2m_1, m_2}^n| - V_{2m_1, m_2}^n) H_{1m_1, m_2}^{n+1} + (|V_{2m_1+1, m_2}^n| - V_{2m_1+1, m_2}^n) H_{1m_1+1, m_2}^{n+1}) V_{1m_1+1, m_2}^{n+1}}{4h_1} + \\
& \frac{((|V_{2m_1, m_2-1}^n| + V_{2m_1, m_2-1}^n) H_{2m_1, m_2-2}^{n+1} + (|V_{2m_1, m_2}^n| + V_{2m_1, m_2}^n) H_{2m_1, m_2-1}^{n+1}) V_{2m_1, m_2-1}^{n+1}}{4h_2} + \\
& \frac{1}{4h_2} ((|V_{2m_1, m_2-1}^n| - V_{2m_1, m_2-1}^n + |V_{2m_1, m_2}^n| + V_{2m_1, m_2}^n) H_{2m_1, m_2-1}^{n+1} + \\
& + (|V_{2m_1, m_2+1}^n| + V_{2m_1, m_2+1}^n + |V_{2m_1, m_2}^n| - V_{2m_1, m_2}^n) H_{2m_1, m_2}^{n+1}) V_{2m_1, m_2}^{n+1} - \\
& \frac{((|V_{2m_1, m_2}^n| - V_{2m_1, m_2}^n) H_{2m_1, m_2}^{n+1} + (|V_{2m_1, m_2+1}^n| - V_{2m_1, m_2+1}^n) H_{2m_1, m_2+1}^{n+1}) V_{2m_1, m_2+1}^{n+1}}{4h_2} + \\
& + \frac{\gamma}{\gamma-1} \tilde{H}_{m_1, m_2}^{n+1} \frac{(H_{2m_1, m_2}^{n+1})^{\gamma-1} - (H_{2m_1, m_2-1}^{n+1})^{\gamma-1}}{h_2} = \\
& = \mu \left(\frac{V_{2m_1-1, m_2}^{n+1} - 2V_{2m_1, m_2}^{n+1} + V_{2m_1+1, m_2}^{n+1}}{h_1^2} + \frac{4}{3} \frac{V_{2m_1, m_2-1}^{n+1} - 2V_{2m_1, m_2}^{n+1} + V_{2m_1, m_2+1}^{n+1}}{h_2^2} \right) + \\
& + \frac{\mu}{3} \frac{V_{1m_1-1, m_2-1}^n - V_{1m_1-1, m_2+1}^n - V_{1m_1+1, m_2-1}^n + V_{1m_1+1, m_2+1}^n}{4h_1 h_2} + f_{2m_1, m_2}^{n+1} (\tilde{H})_{m_1, m_2}^{n+1}, \\
& \hat{V}_{2m_1, m_2} = 0, \quad \begin{array}{l} \text{при } \tilde{H}_{m_1, m_2}^{n+1} \neq 0, \\ \text{при } \tilde{H}_{m_1, m_2}^{n+1} = 0, \end{array} \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\tilde{h}}.
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Выше были использованы следующие обозначения

$$\begin{aligned}
(\tilde{V}_1)_{m_1, m_2}^n &= \frac{(V_1)_{m_1, m_2}^n + (V_1)_{m_1, m_2+1}^n}{2}, & (\tilde{V}_2)_{m_1, m_2}^n &= \frac{(V_2)_{m_1, m_2}^n + (V_2)_{m_1+1, m_2}^n}{2}, \\
(\tilde{H})_{m_1, m_2}^n &= \frac{H_{m_1, m_2}^n + H_{m_1, m_2-1}^n + H_{m_1-1, m_2}^n + H_{m_1-1, m_2-1}^n}{4}, \\
(H_1)_{m_1, m_2}^n &= \frac{H_{m_1, m_2}^n + H_{m_1, m_2-1}^n}{2}, & (H_2)_{m_1, m_2}^n &= \frac{H_{m_1, m_2}^n + H_{m_1-1, m_2}^n}{2}.
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Порядок вычислений по разностной схеме (3.52) следующий. Сначала на очередном временном слое находится функция \hat{H} из системы, задаваемой уравнениями (3.53), а затем решается система, задаваемая уравнениями (3.54) и (3.55).

Используя обозначения, введенные в параграфе 4.5, выпишем алгебраическое уравнение системы на \hat{H} , получающееся из разностного уравнения (3.53)

$$\begin{aligned}
& ah_- H_{00} \cdot H_{m_1, m_2}^{n+1} + ah_- H_{R0} \cdot H_{m_1+1, m_2}^{n+1} + ah_- H_{L0} \cdot H_{m_1-1, m_2}^{n+1} + \\
& + ah_- H_{0R} \cdot H_{m_1, m_2+1}^{n+1} + ah_- H_{0L} \cdot H_{m_1, m_2-1}^{n+1} = bh,
\end{aligned} \tag{3.57}$$

где коэффициенты определяются по формулам

$$\begin{aligned}
ah_H00 &= 1. + \frac{\tau}{2h_1}(VT1R0 + |VT1R0| - VT100 + |VT100|) + \\
&+ \frac{\tau}{2h_2}(VT20R + |VT20R| - VT200 + |VT200|), \\
ah_HR0 &= \frac{\tau}{2h_1}(VT1R0 - |VT1R0|), \\
ah_H0R &= \frac{\tau}{2h_2}(VT20R - |VT20R|), \\
ah_HL0 &= -\frac{\tau}{2h_1}(VT100 + |VT100|), \\
ah_H0L &= -\frac{\tau}{2h_2}(VT200 + |VT200|), \\
bh &= H00.
\end{aligned} \tag{3.58}$$

В формулах (3.58) через $VT???$ обозначены значения функций $\tilde{V}?$ в соответствующих узлах шаблона.

Отдельно требуется пояснить, как понимать эти уравнения в приграничных узлах (узлах, у которых одна из координат равна либо 0, либо $M_k - 1$). В первом возможном случае, если на на границе вблизи такого узла задано условие прилипания (т.е. скорость потока равна нулю), значение функции \hat{H} в узле, выходящем за пределы сетки, умножается на коэффициент, который полагается равным нулю. Иными словами такого слагаемого в уравнении просто нет. Во втором случае, если газ втекает в область, то все необходимые для расчетов значения \hat{H} и V_k , в узлах выходящих за границу сетки, считаются известными значениями из заданных граничных условий. В третьем возможном случае, когда газ вытекает из области через участок границы вблизи узла, можно заметить, что соответствующий коэффициент в уравнении также как в первом случае равен нулю.

Из разностного уравнения (3.54) получают следующие алгебраические уравнения для всех внутренних узлов сетки Ω_h

$$\begin{aligned}
av1_V100 \cdot V_{1m_1, m_2}^{n+1} + av1_V1R0 \cdot V_{1m_1+1, m_2}^{n+1} + av1_V1L0 \cdot V_{1m_1-1, m_2}^{n+1} + \\
+ av1_V10R \cdot V_{1m_1, m_2+1}^{n+1} + av1_V10L \cdot V_{1m_1, m_2-1}^{n+1} + av1_V200 \cdot V_{2m_1, m_2}^{n+1} + \\
+ av1_V20R \cdot V_{2m_1, m_2+1}^{n+1} + av1_V20L \cdot V_{2m_1, m_2-1}^{n+1} = bv1,
\end{aligned} \tag{3.59}$$

где

$$\begin{aligned}
av1_V100 &= HT00 + \frac{\tau}{4h_1} ((-V1L0 + |V1L0| + V100 + |V100|)H1L0 + \\
&+ (V1R0 + |V1R0| - V100 + |V100|)H100) + \\
&+ \frac{\tau}{4h_2} ((-V10L + |V10L| + V100 + |V100|)H2L0 + \\
&+ (V10R + |V10R| - V100 + |V100|)H100) + \tau\mu \left(\frac{8}{3h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \right), \\
av1_V1L0 &= -\frac{\tau}{4h_1} ((V1L0 + |V1L0|)H1D0 + (V100 + |V100|)H1L0) - \frac{4\tau\mu}{3h_1^2}, \\
av1_V1R0 &= -\frac{\tau}{4h_1} ((-V100 + |V100|)H100 + (-V1R0 + |V1R0|)H1R0) - \frac{4\tau\mu}{3h_1^2}, \\
av1_V10L &= -\frac{\tau\mu}{h_2^2}, \\
av1_V10R &= -\frac{\tau\mu}{h_2^2}, \\
av1_V200 &= \frac{\tau}{4h_2} (-(V10L + |V10L| + V100 + |V100|)H20L + \\
&+ (-V100 + |V100| + V10R + |V10R|)H200), \\
av1_V20L &= -\frac{\tau}{4h_2} ((V10L + |V10L|)H20D + (V100 + |V100|)H10L), \\
av1_V20R &= -\frac{\tau}{4h_2} ((-V100 + |V100|)H200 + (-V10R + |V10R|)H20R), \\
bv1 &= HT00_OLD * V100 - \frac{\tau\gamma}{(\gamma - 1)h_1} H200((H100)^{\gamma-1} - (H1L0)^{\gamma-1}) + \\
&+ \frac{\tau\mu}{12h_1h_2}(V2RR - V2RL - V2LR + V2LL) + \tau f_1 HT00.
\end{aligned} \tag{3.60}$$

В формулах (3.60) были использованы обозначения

$$HT00 = (\tilde{H})_{m_1, m_2}^{n+1}, \quad HT00_OLD = (\tilde{H})_{m_1, m_2}^n.$$

Идентификаторы $H1??$ и $H2??$ применяются для значений функций H_1 и H_2 в узлах шаблона. Отдельно заметим, что

$$H1D0 = (H_1)_{m_1-2, m_2}^{n+1}, \quad H2D0 = (H_2)_{m_1, m_2-2}^{n+1}.$$

Коэффициенты уравнений (3.59) не используют неопределенных величин, если в приграничных узлах трактовать их аналогично тому, как это было сделано выше для уравнений (3.57).

Из разностного уравнения (3.55) получаются алгебраические уравнения, аналогичные уравнениям (3.59).

3.11 Схема А.Г.Соколова ПЛОТНОСТЬ-СКОРОСТЬ (последовательная)

Сеточная функция \mathbf{V} , приближающая функцию вектора скорости \mathbf{u} , определяется в узлах сетки $Q_{\tau\bar{h}}$, а значения функции H , приближающей функцию плотности ρ , ищутся в узлах сетки $Q_{\tau\bar{h}}^{1/2}$ по следующей схеме, аппроксимирующей систему (2.1)

$$\begin{aligned} H_t + (\sigma_1\{\hat{H}, V_{1s_2}\})_{x_1} + (\sigma_2\{\hat{H}, V_{2s_1}\})_{x_2} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}}^{1/2}; \\ \hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2} V_{1t} + \hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2} \delta_1\{\hat{V}_1, V_1\} + \hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2} \delta_2\{\hat{V}_1, V_2\} + p(\hat{H}_{\bar{s}_2})_{\bar{x}_1} &= \\ = \mu \left(\frac{4}{3}(\hat{V}_1)_{x_1\bar{x}_1} + (\hat{V}_1)_{x_2\bar{x}_2} \right) + \frac{\mu}{3}(V_2)_{x_1x_2} + f_1 \hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2}, \quad \text{при } \hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2} \neq 0, \\ \hat{V}_1 &= 0, \quad \text{при } \hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}}; \\ \hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2} V_{2t} + \hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2} \delta_1\{\hat{V}_2, V_1\} + \hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2} \delta_2\{\hat{V}_2, V_2\} + p(\hat{H}_{\bar{s}_1})_{\bar{x}_2} &= \\ = \mu \left((\hat{V}_2)_{x_1\bar{x}_1} + \frac{4}{3}(\hat{V}_2)_{x_2\bar{x}_2} \right) + \frac{\mu}{3}(V_1)_{x_1x_2} + f_2 \hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2}, \quad \text{при } \hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2} \neq 0, \\ \hat{V}_2 &= 0, \quad \text{при } \hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}}. \end{aligned} \tag{3.61}$$

В граничных узлах $\gamma_{\bar{h}}$ значения функции \mathbf{V} считаются известными из граничных условий. В граничных узлах, где газ втекает в область, задаются значения плотности газа, которые также берутся из граничных условий.

Поскольку разностное уравнение, аппроксимирующее уравнение неразрывности, в точности совпадает с первым уравнением схемы из параграфа 3.10, приведем запись

в индексах лишь для двух оставшихся уравнений.

$$\begin{aligned}
& (\tilde{H})_{m_1, m_2}^{n+1} \left(\frac{(V_{1m_1, m_2}^{n+1} - V_{1m_1, m_2}^n)}{\tau} - \frac{|V_{2m_1, m_2}^n| + V_{2m_1, m_2}^n}{2h_2} V_{1m_1, m_2-1}^{n+1} \right. \\
& - \frac{|V_{1m_1, m_2}^n| + V_{1m_1, m_2}^n}{2h_1} V_{1m_1-1, m_2}^{n+1} + \left. \left(\frac{|V_{1m_1, m_2}^n|}{h_1} + \frac{|V_{2m_1, m_2}^n|}{h_2} \right) V_{1m_1, m_2}^{n+1} + \right. \\
& + \left. \frac{V_{1m_1, m_2}^n - |V_{1m_1, m_2}^n|}{2h_1} V_{1m_1+1, m_2}^{n+1} + \frac{V_{2m_1, m_2}^n - |V_{2m_1, m_2}^n|}{2h_2} V_{1m_1, m_2+1}^{n+1} \right) + \\
& + \frac{p(H_{1m_1, m_2}^{n+1}) - p(H_{1m_1-1, m_2}^{n+1})}{h_1} = \\
& = \mu \left(\frac{4V_{1m_1-1, m_2}^{n+1} - 2V_{1m_1, m_2}^{n+1} + V_{1m_1+1, m_2}^{n+1}}{3h_1^2} + \frac{V_{1m_1, m_2-1}^{n+1} - 2V_{1m_1, m_2}^{n+1} + V_{1m_1, m_2+1}^{n+1}}{h_2^2} \right) + \\
& + \frac{\mu}{3} \frac{V_{2m_1-1, m_2-1}^n - V_{2m_1-1, m_2+1}^n - V_{2m_1+1, m_2-1}^n + V_{2m_1+1, m_2+1}^n}{4h_1 h_2} + f_{1m_1, m_2}^{n+1} (\tilde{H})_{m_1, m_2}^{n+1}, \\
& \hat{V}_{1m_1, m_2} = 0, \quad \text{при } \tilde{H}_{\mathbf{m}}^{n+1} \neq 0, \\
& \quad \quad \quad \text{при } \tilde{H}_{m_1, m_2}^{n+1} = 0; \quad \mathbf{x} \in \Omega_h.
\end{aligned} \tag{3.62}$$

$$\begin{aligned}
& (\tilde{H})_{m_1, m_2}^{n+1} \left(\frac{(V_{2m_1, m_2}^{n+1} - V_{2m_1, m_2}^n)}{\tau} - \frac{|V_{2m_1, m_2}^n| + V_{2m_1, m_2}^n}{2h_2} V_{2m_1, m_2-1}^{n+1} \right. \\
& - \frac{|V_{1m_1, m_2}^n| + V_{1m_1, m_2}^n}{2h_1} V_{2m_1-1, m_2}^{n+1} + \left. \left(\frac{|V_{1m_1, m_2}^n|}{h_1} + \frac{|V_{2m_1, m_2}^n|}{h_2} \right) V_{2m_1, m_2}^{n+1} + \right. \\
& + \left. \frac{V_{1m_1, m_2}^n - |V_{1m_1, m_2}^n|}{2h_1} V_{2m_1+1, m_2}^{n+1} + \frac{V_{2m_1, m_2}^n - |V_{2m_1, m_2}^n|}{2h_2} V_{2m_1, m_2+1}^{n+1} \right) + \\
& + \frac{p(H_{2m_1, m_2}^{n+1}) - p(H_{2m_1, m_2-1}^{n+1})}{h_2} = \\
& = \mu \left(\frac{V_{2m_1-1, m_2}^{n+1} - 2V_{2m_1, m_2}^{n+1} + V_{2m_1+1, m_2}^{n+1}}{h_1^2} + \frac{4V_{2m_1, m_2-1}^{n+1} - 2V_{2m_1, m_2}^{n+1} + V_{2m_1, m_2+1}^{n+1}}{3h_2^2} \right) + \\
& + \frac{\mu}{3} \frac{V_{1m_1-1, m_2-1}^n - V_{1m_1-1, m_2+1}^n - V_{1m_1+1, m_2-1}^n + V_{1m_1+1, m_2+1}^n}{4h_1 h_2} + f_{2m_1, m_2}^{n+1} (\tilde{H})_{m_1, m_2}^{n+1}, \\
& \hat{V}_{2m_1, m_2} = 0, \quad \text{при } \tilde{H}_{\mathbf{m}}^{n+1} \neq 0, \\
& \quad \quad \quad \text{при } \tilde{H}_{m_1, m_2}^{n+1} = 0; \quad \mathbf{x} \in \Omega_h.
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Также как и в случае схемы из параграфа 3.10 по этой схеме на каждом временном слое решается СЛАУ, решением которой является сеточная функция плотности H^{n+1} , а затем в любом порядке решаются СЛАУ, которые задают функции V_1^{n+1} и V_2^{n+1} . Последние две системы можно решать независимо.

Из разностного уравнения (3.62) получаются следующие алгебраические уравнения для всех внутренних узлов сетки Ω_h

$$\begin{aligned}
& av1_V100 \cdot V_{1m_1, m_2}^{n+1} + av1_V1R0 \cdot V_{1m_1+1, m_2}^{n+1} + av1_V1L0 \cdot V_{1m_1-1, m_2}^{n+1} + \\
& + av1_V10R \cdot V_{1m_1, m_2+1}^{n+1} + av1_V10L \cdot V_{1m_1, m_2-1}^{n+1} = bv1,
\end{aligned} \tag{3.64}$$

где

$$\begin{aligned}
av1_V100 &= HT00(1 + \frac{\tau}{h_1}|V100| + \frac{\tau}{h_2}|V200|) + \tau\mu \left(\frac{8}{3h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \right), \\
av1_V1L0 &= -\frac{\tau}{2h_1}(V100 + |V100|)HT00 - \frac{4\tau\mu}{3h_1^2}, \\
av1_V1R0 &= \frac{\tau}{2h_1}(V100 - |V100|)HT00 - \frac{4\tau\mu}{3h_1^2}, \\
av1_V10L &= -\frac{\tau}{2h_2}(V200 + |V200|)HT00 - \frac{\tau\mu}{h_2^2}, \\
av1_V10R &= \frac{\tau}{2h_2}(V200 - |V200|)HT00 - \frac{\tau\mu}{h_2^2}, \\
bv1 &= HT00 * V100 - \frac{\tau}{h_1}(p(H100) - p(H1L0)) + \\
&+ \frac{\tau\mu}{12h_1h_2}(V2RR - V2RL - V2LR + V2LL) + \tau f_1 HT00.
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Аналогичным образом расписывается разностное уравнение (3.63).

3.12 Схема А.Г.Соколова СКОРОСТЬ-ПЛОТНОСТЬ (последовательная)

Сеточная функция \mathbf{V} , приближающая функцию вектора скорости \mathbf{u} , определяется в узлах сетки $\bar{Q}_{\tau\bar{h}}$, а значения функции H , приближающей функцию плотности ρ , ищутся в узлах сетки $Q_{\tau\bar{h}}^{1/2}$ по следующей схеме, аппроксимирующей систему (2.1)

$$\begin{aligned}
&H_{\bar{s}_1\bar{s}_2}V_{1t} + H_{\bar{s}_1\bar{s}_2}\delta_1\{\hat{V}_1, V_1\} + H_{\bar{s}_1\bar{s}_2}\delta_2\{\hat{V}_1, V_2\} + p(H_{\bar{s}_2})_{\bar{x}_1} = \\
&= \mu \left(\frac{4}{3}(\hat{V}_1)_{x_1\bar{x}_1} + (\hat{V}_1)_{x_2\bar{x}_2} \right) + \frac{\mu}{3}(V_2)_{x_1x_2} + f_1H_{\bar{s}_1\bar{s}_2}, \quad \text{при } H_{\bar{s}_1\bar{s}_2} \neq 0, \\
&\hat{V}_1 = 0, \quad \text{при } H_{\bar{s}_1\bar{s}_2} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}}; \\
&H_{\bar{s}_1\bar{s}_2}V_{2t} + H_{\bar{s}_1\bar{s}_2}\delta_1\{\hat{V}_2, V_1\} + H_{\bar{s}_1\bar{s}_2}\delta_2\{\hat{V}_2, V_2\} + p(H_{\bar{s}_1})_{\bar{x}_2} = \\
&= \mu \left((\hat{V}_2)_{x_1\bar{x}_1} + \frac{4}{3}(\hat{V}_2)_{x_2\bar{x}_2} \right) + \frac{\mu}{3}(V_1)_{x_1x_2} + f_2H_{\bar{s}_1\bar{s}_2}, \quad \text{при } H_{\bar{s}_1\bar{s}_2} \neq 0, \\
&\hat{V}_2 = 0, \quad \text{при } H_{\bar{s}_1\bar{s}_2} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}}; \\
&H_t + (\sigma_1\{\hat{H}, \hat{V}_{1s_2}\})_{x_1} + (\sigma_2\{\hat{H}, \hat{V}_{2s_1}\})_{x_2} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}}^{1/2}.
\end{aligned} \tag{3.66}$$

3.13 Схема А.Г.Соколова ПЛОТНОСТЬ-СКОРОСТЬ (параллельная)

Сеточная функция \mathbf{V} , приближающая функцию вектора скорости \mathbf{u} , определяется в узлах сетки $\bar{Q}_{\tau\bar{h}}$, а значения функции H , приближающей функцию плотности ρ , ищутся в узлах сетки $Q_{\tau\bar{h}}^{1/2}$ по следующей схеме, аппроксимирующей систему (2.1)

$$\begin{aligned}
&H_t + (\sigma_1\{\hat{H}, V_{1s_2}\})_{x_1} + (\sigma_2\{\hat{H}, V_{2s_1}\})_{x_2} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}}^{1/2}; \\
&H_{\bar{s}_1\bar{s}_2}V_{1t} + H_{\bar{s}_1\bar{s}_2}\delta_1\{\hat{V}_1, V_1\} + H_{\bar{s}_1\bar{s}_2}\delta_2\{\hat{V}_1, V_2\} + p(H_{\bar{s}_2})_{\bar{x}_1} = \\
&= \mu \left(\frac{4}{3}(\hat{V}_1)_{x_1\bar{x}_1} + (\hat{V}_1)_{x_2\bar{x}_2} \right) + \frac{\mu}{3}(V_2)_{x_1x_2} + f_1H_{\bar{s}_1\bar{s}_2}, \quad \text{при } H_{\bar{s}_1\bar{s}_2} \neq 0, \\
&\hat{V}_1 = 0, \quad \text{при } H_{\bar{s}_1\bar{s}_2} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}}; \\
&H_{\bar{s}_1\bar{s}_2}V_{2t} + H_{\bar{s}_1\bar{s}_2}\delta_1\{\hat{V}_2, V_1\} + H_{\bar{s}_1\bar{s}_2}\delta_2\{\hat{V}_2, V_2\} + p(H_{\bar{s}_1})_{\bar{x}_2} = \\
&= \mu \left((\hat{V}_2)_{x_1\bar{x}_1} + \frac{4}{3}(\hat{V}_2)_{x_2\bar{x}_2} \right) + \frac{\mu}{3}(V_1)_{x_1x_2} + f_2H_{\bar{s}_1\bar{s}_2}, \quad \text{при } H_{\bar{s}_1\bar{s}_2} \neq 0, \\
&\hat{V}_2 = 0, \quad \text{при } H_{\bar{s}_1\bar{s}_2} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}}.
\end{aligned} \tag{3.67}$$

3.14 Схема с центральными разностями $\rho_- V I$

Для поиска численного решения задачи (2.1),(2.4),(2.5) можно использовать р.с., в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности, а приближенные значения плотности H и скорости \mathbf{V} ищутся в узлах сетки Ω_h .

$$\begin{aligned}
H_t + 0.5 \sum_{k=1}^2 (V_k \hat{H}_0 + (V_k \hat{H})_{x_k} + H(\hat{V}_k)_0) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_h, \\
H_t + 0.5 ((V_k \hat{H})_{x_k} + H(\hat{V}_k)_{x_k}) - \\
- 0.5 h_k ((HV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{+1_k} - 0.5 (HV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{+2_k} + H((V_k)_{x_k \bar{x}_k}^{+1_k} - 0.5 (V_k)_{x_k \bar{x}_k}^{+2_k})) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_k^- \\
H_t + 0.5 ((V_k \hat{H})_{\bar{x}_k} + H(\hat{V}_k)_{\bar{x}_k} + \\
+ 0.5 h_k ((HV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{-1_k} - 0.5 (HV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{-2_k} + H((V_k)_{x_k \bar{x}_k}^{-1_k} - 0.5 (V_k)_{x_k \bar{x}_k}^{-2_k})) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_k^+ \\
(V_k)_t + \frac{1}{3} (V_k (\hat{V}_k)_0 + (V_k \hat{V}_k)_{x_k}) + \frac{1}{2} \sum_{m=1, m \neq k}^2 (V_m (\hat{V}_k)_0 + (V_m \hat{V}_k)_{x_m} - V_k (V_m)_0) + \\
+ \frac{p'_\rho(H)}{H} \hat{H}_0 + \tilde{\mu} \left(\frac{4}{3} (\hat{V}_k)_{x_k \bar{x}_k} + \sum_{m=1, m \neq k}^2 (\hat{V}_k)_{x_m \bar{x}_m} \right) - \\
- \left(\tilde{\mu} - \frac{\mu}{H} \right) \left(\frac{4}{3} (V_k)_{x_k \bar{x}_k} + \sum_{m=1, m \neq k}^2 (V_k)_{x_m \bar{x}_m} \right) + \frac{\mu}{3H} \sum_{m=1, m \neq k}^2 (V_m)_{x_k x_m} + f_k, \quad \mathbf{x} \in \Omega_h, \\
\hat{V}_k = 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_{\bar{h}}, \quad k = 1, 2,
\end{aligned} \tag{3.68}$$

где $\tilde{\mu} = \max_m \frac{\mu}{H}$.

В качестве значений разностного решения на нулевом слое берутся проекции на сетку $\bar{\omega}_h$ функций ρ_0 и u_0 :

$$H^0 = \rho_0, \quad \mathbf{V}^0 = (\mathbf{u}_0), \quad \mathbf{x} \in \Omega_h. \tag{3.69}$$

3.15 Схема с центральными разностями $\rho_- V II$

Для поиска численного решения задачи (2.1),(2.4),(2.5) можно использовать р.с., в которой уравнение неразрывности аппроксимируется также, как и в схеме (3.68), а оставшиеся уравнения аппроксимируются следующим образом

$$\begin{aligned}
& H(V_k)_t + \frac{1}{3} \left(HV_k (\hat{V}_k)_0 + (HV_k \hat{V}_k)_{x_k} \right) - \frac{1}{3} V_k^2 H_0 + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{m=1, m \neq k}^2 \left(HV_m (\hat{V}_k)_0 + (HV_m \hat{V}_k)_{x_m} - V_k (HV_m)_0 \right) + p'_\rho(H) \hat{H}_0 = \\
& = \mu \left(\frac{4}{3} (\hat{V}_k)_{x_k \bar{x}_k} + \sum_{m=1, m \neq k}^2 (\hat{V}_k)_{x_m \bar{x}_m} + \frac{1}{3} \sum_{m=1, m \neq k}^2 (V_m)_{x_k x_m} \right) + H f_k, \quad \mathbf{x} \in \Omega_h, \\
& \hat{V}_k = 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_{\bar{h}}, \quad k = 1, 2.
\end{aligned} \tag{3.70}$$

3.16 Схема с центральными разностями $\rho_- V I$ (последовательная)

Для поиска численного решения задачи (2.1),(2.4),(2.5) можно использовать р.с., в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности, а приближенные значения плотности H и скорости \mathbf{V} на каждом временном слое ищутся

в узлах сетки Ω_h как решения двух последовательно решаемых СЛАУ.

$$\begin{aligned}
H_t + 0.5 \sum_{k=1}^2 (V_k \hat{H}_0 + (V_k \hat{H})_0 + H(V_k)_0) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\mathbf{h}}, \\
H_t + 0.5 ((V_k \hat{H})_{x_k} + H(V_k)_{x_k}) - \\
- 0.5 h_k ((HV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{+1_k} - 0.5 (HV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{+2_k} + H((V_k)_{x_k \bar{x}_k}^{+1_k} - 0.5 (V_k)_{x_k \bar{x}_k}^{+2_k})) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_k^-, \\
H_t + 0.5 ((V_k \hat{H})_{\bar{x}_k} + H(V_k)_{\bar{x}_k}) + \\
+ 0.5 h_k ((HV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{-1_k} - 0.5 (HV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{-2_k} + H((V_k)_{x_k \bar{x}_k}^{-1_k} - 0.5 (V_k)_{x_k \bar{x}_k}^{-2_k})) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_k^+, \\
(V_k)_t + \frac{1}{3} (V_k (\hat{V}_k)_0 + (V_k \hat{V}_k)_0) + \frac{1}{2} \sum_{m=1, m \neq k}^2 (V_m (\hat{V}_k)_0 + (V_m \hat{V}_k)_0 - V_k (V_m)_0) + \\
+ \frac{p(\hat{H})_0}{\hat{H}} = \tilde{\mu} \left(\frac{4}{3} (\hat{V}_k)_{x_k \bar{x}_k} + \sum_{m=1, m \neq k}^2 (\hat{V}_k)_{x_m \bar{x}_m} \right) - \\
- (\tilde{\mu} - \frac{\mu}{\hat{H}}) \left(\frac{4}{3} (V_k)_{x_k \bar{x}_k} + \sum_{m=1, m \neq k}^2 (V_k)_{x_m \bar{x}_m} \right) + \frac{\mu}{3\hat{H}} \sum_{m=1, m \neq k}^2 (V_m)_{x_k \bar{x}_m}^0 + f_k, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\mathbf{h}}, \\
\hat{V}_k = 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_{\bar{h}}, \quad k = 1, 2,
\end{aligned} \tag{3.71}$$

где $\tilde{\mu} = \max_m \frac{\mu}{\hat{H}}$.

Схема (3.71) дополняется начальными условиями (3.69).

3.17 Схема с центральными разностями $\rho_{-} V II$ (последовательная)

Для поиска численного решения задачи (2.1),(2.4),(2.5) можно использовать р.с., в которой уравнение неразрывности аппроксимируется также, как и в схеме (3.71), а оставшиеся уравнения аппроксимируются следующим образом

$$\begin{aligned}
&\hat{H}(V_k)_t + \frac{1}{3} \left(\hat{H}V_k(\hat{V}_k)_{x_k}^0 + (\hat{H}V_k\hat{V}_k)_{x_k}^0 \right) - \frac{1}{3} V_k^2 \hat{H}_0 + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{m=1, m \neq k}^2 \left(\hat{H}V_m(\hat{V}_k)_{x_m}^0 + (\hat{H}V_m\hat{V}_k)_{x_m}^0 - V_k(\hat{H}V_m)_{x_m}^0 \right) + p(\hat{H})_{x_k}^0 = \\
&= \mu \left(\frac{4}{3} (\hat{V}_k)_{x_k \bar{x}_k} + \sum_{m=1, m \neq k}^2 (\hat{V}_k)_{x_m \bar{x}_m} + \frac{1}{3} \sum_{m=1, m \neq k}^2 (V_m)_{x_k \bar{x}_m}^0 \right) + \hat{H}f_k, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\mathbf{h}}, \\
&\hat{V}_k = 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_{\bar{h}}, \quad k = 1, 2.
\end{aligned} \tag{3.72}$$

3.18 Схема с центральными разностями $V_{-} \rho I$ (последовательная)

Для поиска численного решения задачи (2.1),(2.4),(2.5) можно использовать р.с., в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности, а приближенные значения плотности \mathbf{V} и скорости H на каждом временном слое ищутся

в узлах сетки Ω_h как решения двух последовательно решаемых СЛАУ.

$$\begin{aligned}
& (V_k)_t + \frac{1}{3}(V_k(\hat{V}_k)_{x_k}^0 + (V_k\hat{V}_k)_{x_k}^0) + \frac{1}{2} \sum_{m=1, m \neq k}^2 (V_m(\hat{V}_k)_{x_m}^0 + (V_m\hat{V}_k)_{x_m}^0 - V_k(V_m)_{x_m}^0) + \\
& + \frac{p(H)_{x_k}^0}{H} = \tilde{\mu} \left(\frac{4}{3}(\hat{V}_k)_{x_k\bar{x}_k} + \sum_{m=1, m \neq k}^2 (\hat{V}_k)_{x_m\bar{x}_m} \right) - \\
& - \left(\tilde{\mu} - \frac{\mu}{H} \right) \left(\frac{4}{3}(V_k)_{x_k\bar{x}_k} + \sum_{m=1, m \neq k}^2 (V_k)_{x_m\bar{x}_m} \right) + \frac{\mu}{3H} \sum_{m=1, m \neq k}^2 (V_m)_{x_k x_m}^0 + f_k, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\mathbf{h}}, \\
& \hat{V}_k = 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_{\bar{h}}, \quad k = 1, 2, \\
& H_t + 0.5 \sum_{k=1}^2 (\hat{V}_k \hat{H}_0^0 + (\hat{V}_k \hat{H})_{x_k}^0 + H(\hat{V}_k)_{x_k}^0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\mathbf{h}}, \\
& H_t + 0.5 ((\hat{V}_k \hat{H})_{x_k} + H(\hat{V}_k)_{x_k}) - \\
& - 0.5 h_k ((HV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{+1_k} - 0.5 (HV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{+2_k} + H((V_k)_{x_k \bar{x}_k}^{+1_k} - 0.5 (V_k)_{x_k \bar{x}_k}^{+2_k})) = 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_k^-, \\
& H_t + 0.5 ((\hat{V}_k \hat{H})_{\bar{x}_k} + H(\hat{V}_k)_{\bar{x}_k}) + \\
& + 0.5 h_k ((HV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{-1_k} - 0.5 (HV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{-2_k} + H((V_k)_{x_k \bar{x}_k}^{-1_k} - 0.5 (V_k)_{x_k \bar{x}_k}^{-2_k})) = 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_k^+,
\end{aligned} \tag{3.73}$$

где $\tilde{\mu} = \max_m \frac{\mu}{H}$.

Схема (3.73) дополняется начальными условиями (3.69).

3.19 Схема с центральными разностями $V_{\rho} II$ (последовательная)

Для поиска численного решения задачи (2.1),(2.4),(2.5) можно использовать р.с., в которой уравнения для вектора скорости аппроксимируются следующим образом

$$\begin{aligned}
& H(V_k)_t + \frac{1}{3} \left(HV_k(\hat{V}_k)_{x_k}^0 + (HV_k\hat{V}_k)_{x_k}^0 \right) - \frac{1}{3} V_k^2 H_{x_k}^0 + \\
& + \frac{1}{2} \left(V_m(\hat{V}_k)_{x_m}^0 + (HV_m\hat{V}_k)_{x_m}^0 - V_k(HV_m)_{x_m}^0 \right) + p(H)_{x_k}^0 = \\
& = \mu \left(\frac{4}{3}(\hat{V}_k)_{x_k\bar{x}_k} + \sum_{m=1, m \neq k}^2 (\hat{V}_k)_{x_m\bar{x}_m} + \sum_{m=1, m \neq k}^2 (V_m)_{x_k x_m}^0 \right) + H f_k, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\mathbf{h}}, \\
& \hat{V}_k = 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_{\bar{h}}, \quad k = 1, 2,
\end{aligned} \tag{3.74}$$

а уравнение неразрывности аппроксимируется также, как и в схеме (3.71).

3.20 Схема с центральными разностями $\rho_{V} I$ (параллельная)

Для поиска численного решения задачи (2.1),(2.4),(2.5) можно использовать р.с., в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности, а приближенные значения плотности H и скорости \mathbf{V} на каждом временном слое ищутся

в узлах сетки Ω_h как решения двух СЛАУ, порядок решения которых произволен.

$$\begin{aligned}
H_t + 0.5 \sum_{k=1}^2 (V_k \hat{H}_0)_{x_k} + H(V_k)_0 &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\mathbf{h}}, \\
H_t + 0.5 ((V_k \hat{H})_{x_k} + H(V_k)_{x_k}) - \\
- 0.5 h_k ((HV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{+1_k} - 0.5 (HV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{+2_k} + H((V_k)_{x_k \bar{x}_k}^{+1_k} - 0.5 (V_k)_{x_k \bar{x}_k}^{+2_k})) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_k^-, \\
H_t + 0.5 ((V_k \hat{H})_{\bar{x}_k} + H(V_k)_{\bar{x}_k}) + \\
+ 0.5 h_k ((HV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{-1_k} - 0.5 (HV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{-2_k} + H((V_k)_{x_k \bar{x}_k}^{-1_k} - 0.5 (V_k)_{x_k \bar{x}_k}^{-2_k})) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_k^+, \\
(V_k)_t + \frac{1}{3} (V_k (\hat{V}_k)_0)_{x_k} + (V_k \hat{V}_k)_0 &+ \frac{1}{2} \sum_{m=1, m \neq k}^2 (V_m (\hat{V}_k)_0)_{x_m} + (V_m \hat{V}_k)_0 - V_k (V_m)_0) + \\
+ \frac{p(H)_0}{H} = \tilde{\mu} \left(\frac{4}{3} (\hat{V}_k)_{x_k \bar{x}_k} + \sum_{m=1, m \neq k}^2 (\hat{V}_k)_{x_m \bar{x}_m} \right) - \\
- \left(\tilde{\mu} - \frac{\mu}{H} \right) \left(\frac{4}{3} (V_k)_{x_k \bar{x}_k} + \sum_{m=1, m \neq k}^2 (V_k)_{x_m \bar{x}_m} \right) + \frac{\mu}{3H} \sum_{m=1, m \neq k}^2 (V_m)_{x_k x_m} &+ f_k, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\mathbf{h}}, \\
\hat{V}_k = 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_{\bar{h}}, \quad k = 1, 2, &
\end{aligned} \tag{3.75}$$

где $\tilde{\mu} = \max_m \frac{\mu}{H}$.

Схема (3.75) дополняется начальными условиями (3.69).

3.21 Схема с центральными разностями $\rho_- V II$ (параллельная)

Для поиска численного решения задачи (2.1),(2.4),(2.5) можно использовать р.с., в которой уравнение неразрывности аппроксимируется также как в схеме (3.16), а уравнения для скорости также как в схеме (3.19). Это делает возможным решать получающиеся для определения \hat{H} , \hat{V}_1 и \hat{V}_2 СЛАУ в произвольном порядке.

3.22 Схема с односторонними разностями $\rho_- V$

Для поиска численного решения задачи (2.1),(2.4),(2.5) можно использовать р.с., в которой при аппроксимации конвективных членов используются односторонние разности.

$$\begin{aligned}
H_t + \sum_{k=1}^2 \left(\delta_k \{ \hat{H}, V_k \} + H(\hat{V}_k)_0 \right)_{x_k} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\mathbf{h}}, \\
H_{t,0} + (\hat{H} V_k)_{x_k} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_k^-, \\
H_{t,M} + (\hat{H} V_k)_{\bar{x}_k} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_k^+, \\
H(V_k)_t + \sum_{m=1}^2 \delta_k \{ \hat{V}_k, HV_m \} + p'_\rho(H) \hat{H}_0 &= \mu \frac{4}{3} (\hat{V}_k)_{x_k \bar{x}_k} + \\
+ \mu \sum_{m=1, m \neq k}^2 (\hat{V}_k)_{x_m \bar{x}_m} + \frac{\mu}{3} \sum_{m=1, m \neq k}^2 (V_m)_{x_m x_k} &+ Hf, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\mathbf{h}}, \\
\hat{V}_k = 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_{\bar{h}}, \quad k = 1, 2. &
\end{aligned} \tag{3.76}$$

3.23 Схема с односторонними разностями $\rho_- V$ (последовательная)

Для поиска численного решения задачи (2.1),(2.4),(2.5) можно использовать р.с., в которой при аппроксимации конвективных членов используются односторонние разности и

функции H и \mathbf{V} ищутся в результате последовательного решения трех СЛАУ:

$$\begin{aligned}
H_t + \sum_{k=1}^2 \left(\delta_k \{ \hat{H}, V_k \} + H(V_k)_{x_k}^0 \right) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\mathbf{h}}, \\
H_{t,0} + (\hat{H}V_k)_{x_k} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_k^-, \\
H_{t,M} + (\hat{H}V_k)_{\bar{x}_k} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_k^+, \\
\hat{H}(V_k)_t + \sum_{m=1}^2 \delta_k \{ \hat{V}_k, \hat{H}V_m \} + p(\hat{H})_{x_k}^0 &= \mu \frac{4}{3} (\hat{V}_k)_{x_k \bar{x}_k} + \\
+ \mu \sum_{m=1, m \neq k}^2 (\hat{V}_k)_{x_m \bar{x}_m} + \frac{\mu}{3} \sum_{m=1, m \neq k}^2 (V_m)_{x_m x_k}^0 + \hat{H}f, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\mathbf{h}}, \\
\hat{V}_k &= 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_{\bar{h}}, \quad k = 1, 2.
\end{aligned} \tag{3.77}$$

3.24 Схема с односторонними разностями $V_{-}\rho$ (последовательная)

Для поиска численного решения задачи (2.1),(2.4),(2.5) можно использовать р.с., в которой при аппроксимации конвективных членов используются односторонние разности и функции \mathbf{V} и H ищутся в результате последовательного решения трех СЛАУ:

$$\begin{aligned}
H(V_k)_t + \sum_{m=1}^2 \delta_k \{ \hat{V}_k, HV_m \} + p(H)_{x_k}^0 &= \mu \frac{4}{3} (\hat{V}_k)_{x_k \bar{x}_k} + \\
+ \mu \sum_{m=1, m \neq k}^2 (\hat{V}_k)_{x_m \bar{x}_m} + \frac{\mu}{3} \sum_{m=1, m \neq k}^2 (V_m)_{x_m x_k}^0 + Hf, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\mathbf{h}}, \\
\hat{V}_k &= 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_{\bar{h}}, \quad k = 1, 2, \\
H_t + \sum_{k=1}^2 \left(\delta_k \{ \hat{H}, \hat{V}_k \} + H(\hat{V}_k)_{x_k}^0 \right) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\mathbf{h}}, \\
H_{t,0} + (\hat{H}\hat{V}_k)_{x_k} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_k^-, \\
H_{t,M} + (\hat{H}\hat{V}_k)_{\bar{x}_k} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_k^+.
\end{aligned} \tag{3.78}$$

3.25 Схема с односторонними разностями $\rho_{-}V$ (параллельная)

Для поиска численного решения задачи (2.1),(2.4),(2.5) можно использовать р.с., в которой при аппроксимации конвективных членов используются односторонние разности и функции H и \mathbf{V} ищутся в результате решения трех СЛАУ, последовательность решения которых произвольна:

$$\begin{aligned}
H_t + \sum_{k=1}^2 \left(\delta_k \{ \hat{H}, V_k \} + H(V_k)_{x_k}^0 \right) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\mathbf{h}}, \\
H_{t,0} + (\hat{H}V_k)_{x_k} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_k^-, \\
H_{t,M} + (\hat{H}V_k)_{\bar{x}_k} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_k^+, \\
H(V_k)_t + \sum_{m=1}^2 \delta_k \{ \hat{V}_k, HV_m \} + p(H)_{x_k}^0 &= \mu \frac{4}{3} (\hat{V}_k)_{x_k \bar{x}_k} + \\
+ \mu \sum_{m=1, m \neq k}^2 (\hat{V}_k)_{x_m \bar{x}_m} + \frac{\mu}{3} \sum_{m=1, m \neq k}^2 (V_m)_{x_m x_k}^0 + Hf, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\mathbf{h}}, \\
\hat{V}_k &= 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_{\bar{h}}, \quad k = 1, 2.
\end{aligned} \tag{3.79}$$

3.26 Схема $\rho_- V$ (с расщепляющимся оператором)

Для поиска численного решения задачи (2.1),(2.4),(2.5) можно использовать р.с. с расщепляющимся оператором, в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности. Система алгебраических уравнений, решение которой задает искомые функции на верхнем слое, распадается на ряд "одномерных" подсистем, являющихся линейными при последовательном их решении. Матрицы этих подсистем являются трехдиагональными и их обращение можно осуществлять методом "прогонки".

$$\begin{aligned}
& \left(E + \tau A_1^1(\hat{V}_k) + \lambda \tau^2 A_1^2(\hat{\mathbf{V}}) \right) \times \left(E + \tau A_2^1(\hat{V}_k) + \lambda \tau^2 A_2^2(\hat{\mathbf{V}}) \right) \hat{H} = H + \tau d, \\
& \left(E + \frac{\tau}{3} \left(V_1 \partial_{x_1}^0 + \partial_{x_1}^0 V_1 \right) - \tau \tilde{\mu} \partial_{x_1} \partial_{\bar{x}_1} \right) \left(E + \frac{\tau}{2} \left(V_2 \partial_{x_2}^0 + \partial_{x_2}^0 V_2 \right) - \tau \tilde{\mu} \partial_{x_2} \partial_{\bar{x}_2} \right) \hat{V}_1 = \\
& \quad = V_1 + \tau \left(\frac{1}{2} V_1 (V_2)_{x_2}^0 - \frac{1}{\hat{H}} p(\hat{H})_{x_1}^0 + \hat{f}_1 \right) + \\
& \quad + \tau \left(\frac{\mu}{\hat{H}} - \tilde{\mu} \right) (4/3 (V_1)_{x_1 \bar{x}_1} + (V_1)_{x_2 \bar{x}_2}) + \tau \frac{\mu}{3 \hat{H}} (V_2)_{x_1 x_2}^0, \quad (3.80) \\
& \left(E + \frac{\tau}{2} \left(V_1 \partial_{x_1}^0 + \partial_{x_1}^0 V_1 \right) - \tau \tilde{\mu} \partial_{x_1} \partial_{\bar{x}_1} \right) \left(E + \frac{\tau}{3} \left(V_2 \partial_{x_2}^0 + \partial_{x_2}^0 V_2 \right) - \tau \tilde{\mu} \partial_{x_2} \partial_{\bar{x}_2} \right) \hat{V}_2 = \\
& \quad = V_2 + \tau \left(\frac{1}{2} V_2 (V_1)_{x_1}^0 - \frac{1}{\hat{H}} p(\hat{H})_{x_2}^0 + \hat{f}_2 \right) + \\
& \quad + \tau \left(\frac{\mu}{\hat{H}} - \tilde{\mu} \right) (4/3 (V_2)_{x_2 \bar{x}_2} + (V_2)_{x_1 \bar{x}_1}) + \tau \frac{\mu}{3 \hat{H}} (V_1)_{x_1 x_2}^0.
\end{aligned}$$

где λ — положительный числовой параметр (исходя из теоретических оценок λ рекомендуется брать равным 3).

Операторы $A_k^1(V_k)$ аппроксимируют часть дифференциального оператора дивергенции, содержащую производную по переменной x_k :

$$A_k^1(V_k)H = \begin{cases} \left(V_k H_{x_k}^0 + (V_k H)_{x_k}^0 \right) / 2, & \mathbf{x}_i \in \bar{\Omega}_h \setminus (\gamma_k^- \cup \gamma_k^+), \\ (V_k H)_{x_k}, & \mathbf{x}_i \in \gamma_k^-, \\ (V_k H)_{\bar{x}_k}, & \mathbf{x}_i \in \gamma_k^+. \end{cases} \quad (3.81)$$

Операторы $A_k^2(\mathbf{V})$ появляются вследствие расщепления разностного оператора и играют роль регуляризаторов:

$$A_k^2(\mathbf{V})H = \begin{cases} -(\Phi_k H_{x_k})_{\bar{x}_k}, & \mathbf{x}_i \in \bar{\Omega}_h \setminus (\gamma_k^- \cup \gamma_k^+), \\ -2h_k^{-1} \Phi_k H_{x_k}, & \mathbf{x}_i \in \gamma_k^-, \\ 2h_k^{-1} \Phi_k H_{\bar{x}_k}, & \mathbf{x}_i \in \gamma_k^+. \end{cases} \quad (3.82)$$

Через Φ_1 и Φ_2 обозначены функции, заданные на сетке $\bar{\Omega}_h$:

$$\Phi_1 = |\mathbf{V}|_{s_1 s_2 \bar{s}_2}^2, \quad \Phi_2 = |\mathbf{V}|_{s_2 s_1 \bar{s}_1}^2.$$

При этом считается, что функция $|\mathbf{V}|^2$ четным образом продолжена за границу сетки $\bar{\Omega}_h$.

Сеточная функция d определена на сетке $\bar{\Omega}_h$:

$$d = \begin{cases} -H \left(V_{1x_1}^0 + V_{2x_2}^0 \right) / 2, & \mathbf{x}_i \in \Omega_h, \\ - \left(HV_{kx_k} - h_k \left[H \left(V_{kx_k\bar{x}_k}^{(+1k)} - V_{kx_k\bar{x}_k}^{(+2k)} / 2 \right) + (HV_k)_{x_k\bar{x}_k}^{(+1k)} - (HV_k)_{x_k\bar{x}_k}^{(+2k)} / 2 \right] \right), & \mathbf{x}_i \in \gamma_k^-, \\ - \left(HV_{k\bar{x}_k} + h_k \left[H \left(V_{kx_k\bar{x}_k}^{(-1k)} - V_{kx_k\bar{x}_k}^{(-2k)} / 2 \right) + (HV_k)_{x_k\bar{x}_k}^{(-1k)} - (HV_k)_{x_k\bar{x}_k}^{(-2k)} / 2 \right] \right), & \mathbf{x}_i \in \gamma_k^+, \\ 0, & x_i \in \gamma_*. \end{cases}$$

Величина $\tilde{\mu}$ является константой для каждого слоя и определяется по формуле

$$\tilde{\mu} = \max_m \frac{\mu}{\hat{H}}.$$

В качестве значений разностного решения на нулевом слое берутся проекции на сетку $\bar{\omega}_h$ функций ρ_0 и u_0 :

$$H^0 = \rho_0, \quad \mathbf{V}^0 = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_h. \quad (3.83)$$

Граничные значения функции скорости равны нулю:

$$V^n = V^n = 0, \quad n = 1, \dots, N, \quad \mathbf{x} \in \gamma_h. \quad (3.84)$$

3.27 Схема ρ_Imp (с расщепляющимся оператором)

Для поиска численного решения задачи (2.2),(2.4),(2.5) можно использовать р.с. с расщепляющимся оператором, в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности. Система алгебраических уравнений, решение которой задает искомые функции на верхнем слое, распадается на ряд "одномерных" подсистем, являющихся линейными при последовательном их решении. Матрицы этих подсистем являются трехдиагональными и их обращение можно осуществлять методом "прогонки". Уравнение неразрывности аппроксимируется также, как и в схеме (3.80), а оставшиеся уравнения аппроксимируются следующим образом

$$\begin{aligned} & \left(\hat{H}E + \tau \frac{2}{3} \left(\hat{H}V_1 \partial_{x_1} + \partial_{x_1} \hat{H}V_1 \right) - \tau \mu \frac{4}{3} \partial_{x_1} \partial_{\bar{x}_1} \right) \left(E + \frac{\tau}{2} \left(V_2 \partial_{x_2} + \partial_{x_2} V_2 \right) - \tau \tilde{\mu} \partial_{x_2} \partial_{\bar{x}_2} \right) \hat{V}_1 = \\ & = HV_1 - \tau \left(\frac{1}{3} V_1^2 \hat{H}_0 + \frac{1}{2} V_1 (\hat{H}V_2)_{x_2} + \frac{1}{2} V_1 V_2 \hat{H}_0 + p(\hat{H})_{x_1} - \hat{f}_1 \right) + \\ & \quad + \tau \left(\mu - \hat{H}\tilde{\mu} \right) (V_1)_{x_2\bar{x}_2} + \tau \frac{\mu}{3} (V_2)_{x_1x_2}, \\ & \left(\hat{H}E + \tau \frac{2}{3} \left(\hat{H}V_2 \partial_{x_2} + \partial_{x_2} \hat{H}V_2 \right) - \tau \mu \frac{4}{3} \partial_{x_2} \partial_{\bar{x}_2} \right) \left(E + \frac{\tau}{2} \left(V_1 \partial_{x_1} + \partial_{x_1} V_1 \right) - \tau \tilde{\mu} \partial_{x_1} \partial_{\bar{x}_1} \right) \hat{V}_2 = \\ & = HV_2 - \tau \left(\frac{1}{3} V_2^2 \hat{H}_0 + \frac{1}{2} V_2 (\hat{H}V_1)_{x_1} + \frac{1}{2} V_1 V_2 \hat{H}_0 + p(\hat{H})_{x_2} - \hat{f}_2 \right) + \\ & \quad + \tau \left(\mu - \hat{H}\tilde{\mu} \right) (V_2)_{x_1\bar{x}_1} + \tau \frac{\mu}{3} (V_1)_{x_1x_2}, \end{aligned} \quad (3.85)$$

где $\tilde{\mu} = \max_m \frac{\mu}{\hat{H}}$.

4 Рекомендации по программированию

4.1 Общая структура главной программы

Программа, предназначенная для расчета нестационарного течения вязкого газа по РС практикума, достаточно большая. Поэтому прежде чем начать программирование нужно разделить всю работу на части, каждая из которых будет гораздо менее объемная и может быть отлажена в автономном режиме, либо после проверки правильности работы предыдущих частей. Конечно, такое деление условно и носит авторский характер, но общие рекомендации можно предложить.

Запуск программы должен осуществляться из командной строки путем введения имени исполняемого файла и имени файла, где хранятся параметры дифференциальной задачи (необходимые размеры для задания области по пространству, временной промежуток, вязкость μ , уравнение состояния $p = p(\rho)$), параметры разностной задачи (величины, задающие шаги сетки по каждой из переменных) и другие внешние параметры, требующие задания перед началом работы программы. Поэтому в главной программе сначала идут необходимые команды для считывания этих параметров с присвоением их значений соответствующим переменным.

Далее организуется запуск расчетов задачи для всех обходимых наборов параметров. Перед этим отводится необходимая память под массивы, где будут храниться результаты расчетов. Перебор вариантов параметров можно организовать в виде циклов. Внутри этих циклов вызывается подпрограмма, выполняющая расчет при заданных параметрах и записывающая результаты в нужные элементы массивов с результатами.

В конце главной программы происходит вывод результатов проведенных расчетов в удобном для дальнейшего использования виде: таблицы в формате *tex*, исходники для используемого пакета для построения графиков и мультфильмов и т.д.

4.2 Задание сетки

Обозначим число узлов сетки через Dim . Задание сетки в двумерном случае является гораздо более сложной задачей, чем в случае одной пространственной переменной. Это связано с тем, что для каждого узла по его номеру должны определяться следующие параметры.

1. Эйлеровы координаты (если они нужны).
2. Статус узла — целочисленный параметр, по которому определяется является ли этот узел внутренним или граничным, и, как следствие, какие формулы следует использовать для записи коэффициентов соответствующего алгебраического уравнения.
3. Номера соседних узлов, значения неизвестных функций в которых используются при записи аппроксимации дифференциальной задачи в текущем узле.

Процедура задания сетки пишется в зависимости от расчетной области и краевых условий решаемой дифференциальной задачи. Ее целью является классификация каждого узла сетки и задание его параметров.

В случае задания практикума, в задачах которого используются равномерные сетки, а область Ω является прямоугольником со сторонами параллельными осям координат, перечисленные выше параметры узлов можно хранить в массивах размерности Dim с именами X , Y , st , $M0L$ и $M0R$ (или $ML0$ и $MR0$) на местах, определяемых номером узла.

В массивах X и Y типа *double* записываются координаты узлов. Необходимость их хранения определяется решаемой задачей.

Удобно разбить все узлы на группы так, чтобы в одной группе использовались одинаковые расчетные формулы. Такое разбиение можно осуществить, присвоив каждому узлу номер его группы. Назовем этот номер статусом узла. Для задач практикума с условиями прилипания на всей границе статус узла может принимать значения от 0 до 8. Зададим правило определения статуса.

0 - это внутренний узел сетки.

1 - узлы границы, где $x_1 = const$, а точки области лежат правее граничных точек,

2 - узлы границы, где $x_1 = const$, а точки области лежат левее граничных точек,

3 - узлы границы, где $x_2 = const$, а точки области лежат выше граничных точек,

4 - узлы границы, где $x_2 = const$, а точки области лежат ниже граничных точек,

5-8 - четыре типа угловых узлов, соответствующих прямым углам области,

Для хранения статусов узлов предназначен целочисленный массив *st*.

Замечание. В задачах, где области состоят из нескольких прямоугольников, может потребоваться еще четыре типа угловых узлов, соответствующих углам области равным 270 градусов, если вершины этих углов рассматривать как граничные точки.

В массивах *MOL* и *MOR* типа *integer* для узла с координатами $(x_1; x_2)$ хранятся номера узлов шаблона, имеющие координаты $(x_1; x_2 - h_2)$ и $(x_1; x_2 + h_2)$ соответственно. Если нужного узла не существует, то на соответствующее место записывается -1. Такие массивы заводятся в случае нумерации узлов, при которой в первую очередь меняется индекс первой компоненты. В противном случае заводят массивы *MLO* и *MRO*, где хранят номера узлов, имеющие координаты $(x_1 - h_1; x_2)$ и $(x_1 + h_1; x_2)$ соответственно.

При использовании методов с неравномерными сетками, как правило, для каждого узла требуется хранить номера всех соседних узлов, входящих в шаблон метода.

4.3 Шаблон РС

Задание элементов матрицы и правой части СЛАУ, которую необходимо решать для нахождения решения на очередном временном слое, происходит в цикле по номерам узлов сетки. В каждом узле сетки записаны разностные уравнения (РУ), аппроксимирующие уравнения решаемой дифференциальной задачи. В случае двух пространственных переменных таких РУ три для каждого узла. Коэффициенты этих РУ являются элементами матрицы и правой части. В формулах для коэффициентов используется много величин, которые на бумаге имеют похожие обозначения, но их числовые значения различны. Поэтому прежде чем приступить к программированию требуется придумать обозначения для используемых переменных. Идентификаторы переменных должны позволять понимать, что означает та или иная переменная, и давать возможность легко различать их между собой. В этом параграфе предлагается система обозначений для номеров узлов шаблона РС, значений решения в этих узлах, коэффициентов матриц и правых частей СЛАУ, использующая суффиксы к именам переменным, которые дают возможность легко понять к какому узлу шаблона относится переменная.

Как отмечалось выше, узлы шаблона с верхнего временного слоя содержатся среди девятиточечного множества (3.4). Шаблон узлов с нижнего слоя тоже содержится в этом множестве за исключением аппроксимаций уравнения неразрывности для схем с центральными разностями в граничных точках, в которых число узлов увеличивается за

счет дополнительных слагаемых, добавленных для сохранения порядка аппроксимации. Для номеров узлов шаблона предлагаются следующие обозначения:

- m_{00} - номер центрального узла с индексом (m_1, m_2) ,
- m_{R0} - номер узла с индексом $(m_1 + 1, m_2)$,
- m_{L0} - номер узла с индексом $(m_1 - 1, m_2)$,
- m_{0R} - номер узла с индексом $(m_1, m_2 + 1)$,
- m_{0L} - номер узла с индексом $(m_1, m_2 - 1)$,
- m_{RR} - номер узла с индексом $(m_1 + 1, m_2 + 1)$,
- m_{LR} - номер узла с индексом $(m_1 - 1, m_2 + 1)$,
- m_{RL} - номер узла с индексом $(m_1 + 1, m_2 - 1)$,
- m_{LL} - номер узла с индексом $(m_1 - 1, m_2 - 1)$.

Таким образом, первая буква R или L или цифра 0 в индексе означают смещение в соседний узел от центрального узла вправо или влево по оси x_1 , а вторая буква в индексе задает смещение по оси x_2 .

Для номеров мест в массиве S , где лежат значения функций G , V_1 и V_2 , вычисленных в точках шаблона, зададим переменные, значения которых определяются следующим образом

$$mm_{G_{??}} = 3 \cdot m_{??}, \quad mm_{V1_{??}} = 3 \cdot m_{??} + 1, \quad mm_{V2_{??}} = 3 \cdot m_{??} + 2.$$

Вместо знака вопроса нужно подставить один из символов 0, L или R, причем в каждой формуле символы замещающие знак вопроса на соответствующей позиции слева и справа должны совпадать. Например,

$$mm_{G_{00}} = 3 \cdot m_{00}, \quad mm_{V1_{LR}} = 3 \cdot m_{LR} + 1, \quad mm_{V2_{0L}} = 3 \cdot m_{0L} + 2.$$

В РС, где вычисляются непосредственно значения плотности H , естественно используются имена $mm_{H_{??}}$.

Известные значения компонент решения H , G , V_1 и V_2 в узлах шаблона хранятся в переменных, имеющих следующие имена, значения которых задаются формулами

$$H_{??} = mm_{H_{??}}, \quad G_{??} = mm_{G_{??}}, \quad V1_{??} = mm_{V1_{??}}, \quad V2_{??} = mm_{V2_{??}}.$$

Такие имена позволяют сделать обращение к различным компонентам массива S более наглядным. Для этого сначала на очередном шаге цикла по номерам узлов сетки в эти переменные копируются соответствующие элементы S , а затем эти переменные используются для кодирования формул коэффициентов матриц и правых частей.

Для ненулевых элементов матриц первой системы (3.1) можно использовать обозначения

$$A_{H_{00}}, A_{H_{R0}}, A_{H_{L0}}, A_{H_{0R}}, A_{H_{0L}}, \\ A_{H_{RR}}, A_{H_{LR}}, A_{H_{RL}}, A_{H_{LL}}.$$

Аналогичные обозначения применяются для элементов матриц A_{V1} , A_{V2} системы 3.1 и A_{HH} , A_{HV1} , A_{HV2} , A_{V1H} , A_{V1V1} , A_{V1V2} , A_{V2H} , A_{V2V1} , A_{V2V2} блоков матрицы системы 3.5.

4.4 Пример использования обозначений и структуры программы

Разберем использование обозначений и структуры программы, реализующей схему 3.2 для задачи, заданной в прямоугольной области, и использующей для решения СЛАУ пакет `Laspack`.

I) Главная программа (хранится в файле `gas_two.c`).

Параметры дифференциальной задачи для удобства задания и передачи в подпрограммы хранятся в структуре `P_gas`.

```
typedef struct
{
  double Segm_T;
  double Segm_X;
  double Segm_Y;
  double p_ro;
  double mu;
} P_gas;
```

В ней хранятся следующие величины.

1) Параметры, задающие расчетную область Q . В случае прямоугольной области достаточно задать длины ее сторон и временного промежутка. В разбираемом примере эти параметры обозначены через `Segm_X`, `Segm_Y` и `Segm_T` соответственно.

2) Параметры, задающие свойства газа. В случае рассматриваемой модели (2.1)-(2.5) это вязкость газа μ (обозначается `mu`) и функция $p = p(\rho)$. В разбираемом примере использована простейшая линейная зависимость $p = p'_\rho \rho$. Для ее определения требуется задать константу p'_ρ , которая характеризует сжимаемость газа и в программе обозначается `p_ro`.

Всем этим переменным присваиваются значения в процедуре

```
void param_dif(P_gas * p_d)
```

Главная программа предназначена для определения последовательности макрошагов, реализующих задачу расчета.

В разбираемом примере макрошаги это тестовые расчеты на различных вложенных сетках задачи с известным точным решением. Результатом работы программы должны быть файлы, содержащие таблицы погрешностей определения функций, составляющих решение, в заранее заданных нормах в момент времени T . В нашем случае были использованы нормы C_h и $L_{2,h}$. Для этих целей заводятся следующие переменные:

`it_t` и `it_sp` - для значений номера текущей вложенной сетки по времени и пространству соответственно;

`it_t_max` и `it_sp_max` - для максимального числа используемых вложенных сеток по времени и пространству соответственно;

`it` и `it_max` - номера текущего теста и общего количества тестов.

Для хранения полученной информации следует завести массивы размерности `it_max`: `nc_g`, `nl2_g`, `nc_v1`, `nl2_v1`, `nc_v2` и `nl2_v2`. В массивах, начинающихся с букв `nc`, хранятся C_h -нормы, а с букв `nl2` — $L_{2,h}$ -нормы погрешностей. Суффиксы `g`, `v1` и `v2` в окончаниях имен массивов означают погрешности вычисления какой функции хранятся

в массиве. Для хранения информации о времени расчета каждого теста заводится массив *time* размерности *it_max*.

В цикле, организованном для расчета всех тестов, каждый раз выполняются следующие действия.

- 1) Определяются параметры схемы (процедура *param_she_step*).
- 2) Для каждого узла сетки определяются его свойства (процедура *Setka*).
- 3) Вызывается подпрограмма поиска разностного решения (процедура *Shema*).
- 4) Определяются значения норм погрешностей (процедуры *Norm_c* и *Norm_l2*).

Память под массивы переменных, используемых для хранения разностного решения и вспомогательной информации, отводится динамически. Все они имеют размерность числа узлов сетки, используемой в конкретном тесте. Массивы *G*, *V1* и *V2* используются для хранения разностного решения на текущем временном слое. Для хранения свойств узлов используются следующие пять массивов:

st - статус узла,
X и *Y* - координаты узла,
M0L и *M0R* - номера смежных узлов (узлов шаблона).

Для хранения параметров схемы используется структура *P_she*.

Завершается главная программа вызовом процедур записи полученных данных в файлы, которые позволяют представить результаты расчетов в виде таблиц в *tex-e*.

II) Процедура *param_she_step*

Процедура

```
void param_she_step(P_she *p_s, P_dif *p_d, int it_t, int it_sp)
```

в случае прямоугольной области задает значения элементам структуры *P_she*, хранящую следующие данные.

```
typedef struct
```

```
{  
    int M_x;  
    int M_y;  
    int N;  
    int Dim;  
    double h_x;  
    double h_y;  
    double tau;  
    double eta;  
} P_she;
```

Через *M_x*, *M_y* и *N* обозначены число отрезков разбиений области по пространственным переменным и времени соответственно, а *h_x*, *h_y* и *tau* - шаги сетки по каждой переменной. Эти величины связаны между собой соотношениями: $M_x \cdot h_x = Segm_X$, $M_y \cdot h_y = Segm_Y$ и $N \cdot tau = Segm_T$. Еще два параметра, которые хранятся в *P_she* — *Dim*, обозначающий общее число узлов сетки, и нормирующий множитель *eta*, применяющийся при использовании искусственной вязкости.

В число аргументов процедуры *param_she_step* помимо описанной выше структуры *P_she* входят описанная выше структура *P_dif* и еще два параметра *it_t* и *it_sp*, которые задают уровень вложенности задаваемой сетки по временной и пространственной переменным соответственно.

Для областей более сложной формы чем прямоугольник для полноценного описания области и параметров схемы требуется большее число данных, хранящихся в структурах P_dif и P_she .

III) Процедура *Setka*

Процедура

```
void Setka(int * st, double * X, double * Y, int * M0L, int * M0R, P_she * p_s)
```

пишется в зависимости от расчетной области и краевых условий решаемой дифференциальной задачи. Ее целью является классификация каждого узла сетки. Свойства узлов записываются в массивы X , Y , st , $M0L$ и $M0R$ на места, определяемые номером узла. Напомним, что правило нумерации узлов было определено при определении СЛАУ (3.12), а смысл массивов X , Y , st , $M0L$ и $M0R$ был объяснен в параграфе 4.2.

IV) Процедура *Shema*

В процедуре

```
void Sxema(double * S, int * st, double * X, double * Y, int * M0L, int * M0R, P_she * p_s, P_dif * p_d)
```

реализован алгоритм разностной схемы (3.7)-(3.10), который позволяет найти сеточное решение задачи (2.1)-(2.5) в момент времени T . Параметры дифференциальной задачи хранятся в структуре $Param_gas$, а параметры сетки и свойства узлов передаются с помощью структуры $grid$ и массивов st , X , Y , $M0L$ и $M0R$. В массивах S записывается текущий временной слой разностного решения.

Для удобства работы с процедурой *Shema* текст ее программы разбит на относительно небольшие блоки, которые собираются в единое целое при помощи операции *include*.

В первом блоке, хранящемся в файле *param.c*, определяются скалярные переменные, использующиеся в шаблоне разностной схемы для узла с номером m . Правило образования этих имен было объяснено в разделе 4.3.

Второй блок, хранящийся в файле *viraj.c*, содержит обозначения и вычисление констант, значения которых определяются входными параметрами процедуры, и поэтому их целесообразно вычислить заранее и потом много раз использовать при определении коэффициентов матрицы и правой части СЛАУ.

После вычисления констант идет объявление массивов для матрицы и правой части, задающих СЛАУ для пакета *Laspack*.

Третий блок, хранящийся в файле *nachal.c*, содержит цикл, задающий сеточное решение на нулевом временном слое.

Далее идет цикл по временным слоям.

Начинается он с блока, хранящегося в файле *MUM.c* и предназначенного для вычисления нескольких выражений, зависящих от временного слоя. Это целесообразно сделать, поскольку эти выражения неоднократно встречаются в формулах для матрицы и правой части СЛАУ.

Далее идет непосредственно задание матрицы и правой части СЛАУ. Этот кусок программы разбит по девяти файлам (*caseK.c*, где $k=0, \dots, 8$), где k -й файл содержит формулы для задания нужных коэффициентов для узла со статусом равным k .

После чего вызывается итерационная процедура би-сопряженных градиентов пакета *Laspack* и по ее окончании происходит присвоение массиву S значений решения на новом временном слое.

4.5 Формулы для элементов матрицы и правой части СЛАУ

Каждое из уравнений (3.14)-(3.20), записанное в конкретном узле сетки, задает одно уравнение СЛАУ (3.12). Запишем формулы, определяющие коэффициенты матрицы A и координату вектора b , в зависимости от статуса узла сетки для этих уравнений в случае прямоугольной области и граничных условий прилипания

$$\hat{V}_k = 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_{\bar{h}}, \quad k = 1, 2. \quad (4.1)$$

В этом случае узлы сетки делятся на 9 групп, для каждой из которых формулы задаются одинаково. Прежде всего это внутренние узлы. В программе эти узлы имеют нулевой статус, т.е. элемент массива st с номером такого узла равен нулю. Из уравнения (3.14) следует, что первое уравнение для любого внутреннего узла выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} A_GG_00 \cdot \hat{G}_00 + A_GG_R0 \cdot \hat{G}_R0 + A_GG_L0 \cdot \hat{G}_L0 + A_GG_0R \cdot \hat{G}_0R + \\ + A_GG_0L \cdot \hat{G}_0L + A_GV1_R0 \cdot \hat{V}1_R0 + A_GV1_L0 \cdot \hat{V}1_L0 + \\ + A_GV2_0R \cdot \hat{V}2_0R + A_GV2_0L \cdot \hat{V}2_0L = b_G, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где коэффициенты определяются по формулам

$$\begin{aligned} A_GG_00 &= 4, \\ A_GG_R0 &= \frac{\tau}{h_1}(V1_R0 + V1_00), \\ A_GG_L0 &= -\frac{\tau}{h_1}(V1_L0 + V1_00), \\ A_GG_0R &= \frac{\tau}{h_2}(V2_0R + V2_00), \\ A_GG_0L &= -\frac{\tau}{h_2}(V2_0L + V2_00), \\ A_GV1_R0 &= \frac{2\tau}{h_1}, \\ A_GV1_L0 &= -\frac{2\tau}{h_1}, \\ A_GV2_0R &= \frac{2\tau}{h_2}, \\ A_GV2_0L &= -\frac{2\tau}{h_2}, \\ b_G &= 4g00 + \tau G_00 \left(\frac{V1_R0 - V1_L0}{h_1} + \frac{V2_0R - V2_0L}{h_2} \right) + 4\tau Func_0(tt, xx, yy). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Сделаем важное замечание. Гладкие функции, взятые в тестовых примерах в качестве точного решения задачи (2.1)-(2.5), строго говоря не являются им, поскольку они удовлетворяют системе (2.1) с некоторыми правыми частями не равными нулю не только в уравнениях для скорости, но и для уравнения неразрывности. Поэтому в правой части уравнений (3.14) появляется слагаемое с $Func_0(tt, xx, yy)$.

Из уравнения (3.19) получается второе уравнение для внутреннего узла

$$\begin{aligned} A_V1V1_00 \cdot \hat{V}1_00 + A_V1V1_R0 \cdot \hat{V}1_R0 + A_V1V1_L0 \cdot \hat{V}1_L0 + \\ + A_V1V1_0R \cdot \hat{V}1_0R + A_V1V1_0L \cdot \hat{V}1_0L + \\ + A_V1G_R0 \cdot \hat{G}_R0 + A_V1G_L0 \cdot \hat{G}_L0 = b_V1, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где

$$\begin{aligned}
A_{_V1V1_00} &= 6 + 4\tau\tilde{\mu} \left(\frac{4}{h_1^2} + \frac{3}{h_2^2} \right), \\
A_{_V1V1_R0} &= \left(\frac{\tau}{h_1}(V1_R0 + V1_00) - \frac{8\tau\tilde{\mu}}{h_1^2} \right), \\
A_{_V1V1_L0} &= - \left(\frac{\tau}{h_1}(V1_L0 + V1_00) + \frac{8\tau\tilde{\mu}}{h_1^2} \right), \\
A_{_V1V1_0R} &= \left(\frac{3\tau}{2h_2}(V2_0R + V2_00) - \frac{6\tau\tilde{\mu}}{h_2^2} \right), \\
A_{_V1V1_0L} &= - \left(\frac{3\tau}{2h_2}(V2_0L + V2_00) + \frac{6\tau\tilde{\mu}}{h_2^2} \right), \\
A_{_V1G_R0} &= \frac{3\tau p'_\rho}{h_1}, \\
A_{_V1G_L0} &= -\frac{3\tau p'_\rho}{h_1}, \\
b_{_V1} &= 6V100 + \frac{3\tau}{2h_2}V100(V2_0R - V2_0L) + \\
&+ 6\tau \left(\frac{\mu}{e^G_{-00}} - \tilde{\mu} \right) \left(\frac{4}{3h_1^2}(V1_R0 - 2V1_00 + V1_L0) + \frac{1}{h_2^2}(V1_0R - 2V1_00 + V1_0L) \right) + \\
&+ \frac{\tau\mu}{2e^G_{-00}h_1h_2}(V2_RR - V2_RL - V2_LR + V2_LL) + 6\tau f_1.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Аналогично из уравнения (3.20) получается третье уравнение для внутреннего узла

$$\begin{aligned}
A_{_V2V2_00} \cdot \hat{V}2_00 + A_{_V2V2_R0} \cdot \hat{V}2_R0 + A_{_V2V2_L0} \cdot \hat{V}2_L0 + \\
+ A_{_V2V2_0R} \cdot \hat{V}2_0R + A_{_V2V2_0L} \cdot \hat{V}2_0L + \\
+ A_{_V2G_0R} \cdot \hat{G}_0R + A_{_V2G_0L} \cdot \hat{G}_0L = b_{_V2},
\end{aligned} \tag{4.6}$$

где

$$\begin{aligned}
A_{_V2V2_00} &= 6 + 4\tau\tilde{\mu} \left(\frac{4}{h_2^2} + \frac{3}{h_1^2} \right), \\
A_{_V2V2_0R} &= \left(\frac{\tau}{h_2}(V2_0R + V2_00) - \frac{8\tau\tilde{\mu}}{h_2^2} \right), \\
A_{_V2V2_0L} &= - \left(\frac{\tau}{h_2}(V2_0L + V2_00) + \frac{8\tau\tilde{\mu}}{h_2^2} \right), \\
A_{_V2V2_R0} &= \left(\frac{3\tau}{2h_1}(V1_R0 + V1_00) - \frac{6\tau\tilde{\mu}}{h_1^2} \right), \\
A_{_V2V2_L0} &= - \left(\frac{3\tau}{2h_1}(V1_L0 + V1_00) + \frac{6\tau\tilde{\mu}}{h_1^2} \right), \\
A_{_V2G_0R} &= \frac{3\tau p'_\rho}{h_2}, \\
A_{_V2G_0L} &= -\frac{3\tau p'_\rho}{h_2}, \\
b_{_V2} &= 6V2_00 + \frac{3\tau}{2h_1}V2_00(V1_R0 - V1_L0) + \\
&+ 6\tau \left(\frac{\mu}{e^G_{-00}} - \tilde{\mu} \right) \left(\frac{1}{h_1^2}(V2_R0 - 2V2_00 + V2_L0) + \frac{4}{3h_2^2}(V2_0R - 2V2_00 + V2_0L) \right) + \\
&+ \frac{\tau\mu}{2e^G_{-00}h_1h_2}(V1_RR - V1_RL - V1_LR + V1_LL) + 6\tau f_2.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Внутренние узлы составляют большую часть узлов сетки, поэтому матрица СЛАУ (3.12) имеет отличными от нуля коэффициенты девяти диагоналей в случае уравнений (4.2) и семи диагоналей для уравнений (4.4) и (4.6).

Для граничных узлов в уравнения входит меньшее число неизвестных. В качестве примера рассмотрим уравнения, соответствующие граничным узлам γ_{-1} (статус узла равен 1). Первое уравнение получается из уравнения (3.15)

$$A_{_GG_00} \cdot \hat{G}_00 + A_{_GG_R0} \cdot \hat{G}_R0 + A_{_GV1_R0} \cdot \hat{V}1_R0 = b_G, \tag{4.8}$$

где

$$\begin{aligned}
A_GG_00 &= 2, \\
A_GG_R0 &= \frac{\tau}{h_1} V1_R0, \\
A_V1_R0 &= \frac{2\tau}{h_1}, \\
b_G &= 2G_00 + \frac{\tau}{h_1} G_00 \cdot V1_R0 + \\
&+ \frac{\tau}{h_1} (-2.5G_R0 \cdot V1_R0 + 2S_{3m+6}S_{3m+7} - 0.5S_{3m+9}S_{3m+10} + \\
&+ (2 - g_00) \cdot (-2.5V1_R0 + 2S_{3m+7} - 0.5S_{3m+10})).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

В случае граничного условия (4.1) второе и третье уравнения для узлов со статусом 1 выглядят следующим образом

$$\begin{aligned}
V1_00 &= 0, \\
V2_00 &= 0.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

В процедуре `shema` ряд выражений, часто используемых в формулах для элементов матрицы и правой части СЛАУ (3.12), вычисляется еще до цикла по временным слоям и хранится в скалярных переменных. Перечислим эти переменные и определим выражения, значения которых в них хранятся:

$$\begin{aligned}
thx &= \tau/h_x, \\
thy &= \tau/h_y, \\
thx05 &= thx/2, \\
thy05 &= thy/2, \\
thx2 &= 2thx, \\
thy2 &= 2thy, \\
thx4 &= 4thx, \\
thy4 &= 4thy, \\
thx32 &= 3thx/2, \\
thy32 &= 3thy/2, \\
tau2 &= 2\tau, \\
tau4 &= 4\tau, \\
tau6 &= 6\tau, \\
thxx8 &= 8\tau/h_x^2, \\
thxx6 &= 6\tau/h_x^2, \\
thyy8 &= 8\tau/h_y^2, \\
thyy6 &= 6\tau/h_y^2, \\
thxy &= \tau/(2h_x h_y), \\
Max &= 3\tau p_ro/h_x, \\
May &= 3\tau p_ro/h_y.
\end{aligned}$$

Часть программы, которая вычисляет эти выражения, хранится в файле `viraj.c`.

Другая часть выражений, чьи значения зависят от времени, вычисляется уже внутри цикла по временным слоям, но до цикла по узлам сетки, в котором задаются матрица и правая часть СЛАУ. Часть программы, вычисляющая их, хранится в файле `tim.c`. Перечислим переменные, в которые записываются значения этих выражений, и формулы, их определяющие:

$$\begin{aligned}
MUM &= \mu \max(\exp(-G)), \\
MU8x &= 8\tau MUM/h_x^2, \\
MU8y &= 8\tau MUM/h_y^2, \\
MU6x &= 6\tau MUM/h_x^2, \\
MU6y &= 6\tau MUM/h_y^2,
\end{aligned}$$

$$MUv1 = 6. + \tau MUM \left(\frac{16}{h_x^2} + \frac{12}{h_y^2} \right),$$

$$MUv2 = 6. + \tau MUM \left(\frac{16}{h_y^2} + \frac{12}{h_x^2} \right).$$

4.6 Заполнение матрицы и правой части

Процесс заполнения матрицы и правой части осуществляется последовательно в цикле по m от 0 до $Dim - 1$ для всех узлов сетки. Сначала определяется статус узла с целью установления формул, которые задают коэффициенты трех строк матрицы и трех координат вектора правой части, соответствующих данному узлу. После чего определяются значения элементов матрицы и правой части. Приведем алгоритм расчета и присвоения значений элементам матрицы и правой части в случае, если статус узла с номером m равен 0. Часть программы, отвечающая этому случаю, находится в файле case0.c.

Сначала задаются номера неизвестных в векторе S , соответствующих значениям функций G , $V1$ и $V2$ в точках шаблона m -го узла. Поскольку в этот момент счетчик mm (диапазон изменения от 0 до $3Dim - 1$), отвечающий за номер уравнения СЛАУ, равен номеру уравнения, записанного для функции G в m -ом узле, то номер mm_G_00 равен mm и переменную mm можно использовать в качестве номера mm_G_00 . Следовательно, остальные номера неизвестных в векторе S определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} mm_G_L0 &= mm - 3, \\ mm_V1_L0 &= mm - 2, \\ mm_V2_L0 &= mm - 1, \\ mm_G_R0 &= mm + 3, \\ mm_V1_R0 &= mm + 4, \\ mm_V2_R0 &= mm + 5, \\ mm_G_0L &= 3 * M0L[m], \\ mm_V1_0L &= mm_G_0L + 1, \\ mm_V2_0L &= mm_V1_0L + 1, \\ mm_G_0R &= 3 * M0R[m], \\ mm_V1_0R &= mm_G_0R + 1, \\ mm_V2_0R &= mm_V1_0R + 1. \end{aligned}$$

Правило определения значений функций, задающих решение G , $V1$, $V2$ на n -ом временном слое, в узлах шаблона через значения переменных $mm_G_??$, $mm_V1_??$, $mm_V2_??$ определено в разделе 4.3. Используя эти значения, определяем ненулевые элементы строки матрицы A_GG_00 , A_GG_R0 , A_GG_L0 , A_GG_0R , A_GG_0L , A_GV1_R0 , A_GV1_L0 , A_GV2_0R , A_GV2_0L и правую часть b_G уравнения для G , записанного для m -го узла, по формулам из раздела 4.5.

После чего заполняются разреженная матрица A и вектор B по правилам пакета Laspack. Для этого сначала задаем число ненулевых элементов в строке матрицы A с номером mm равным 9 (напомним, что строки и столбцы в Laspack нумеруются, начиная с 1):

$$Q_SetLen(&A, mm + 1, 9);$$

Затем задаем первый ненулевой элемент $a_{mm,mm}$ (коэффициент при \hat{G}_00) равным A_GG_00 :

$$Q_SetEntry(&A, mm + 1, 0, mm + 1, A_GG_00);$$

Третий аргумент команды равен 0, т.к. это счетчик ненулевых элементов матрицы, а

его значения начинаются с нуля. После чего значение a_{mm,mm_G_R0} , равное A_GG_R0 , присваивается ненулевому элементу с номером 1:

$Q_SetEntry(\&A, mm + 1, 1, mm_G_R0 + 1, A_GG_R0);$

Аналогично поступаем для элементов матрицы a_{mm,mm_G_L0} , a_{mm,mm_G_0R} , a_{mm,mm_G_0L} ,

a_{mm,mm_V1_R0} , a_{mm,mm_V2_0R} , a_{mm,mm_V1_L0} и a_{mm,mm_V2_0L} :

$Q_SetEntry(\&A, mm + 1, 2, mm_G_L0 + 1, A_GG_L0),$

$Q_SetEntry(\&A, mm + 1, 3, mm_G_0R + 1, A_GG_0R),$

$Q_SetEntry(\&A, mm + 1, 4, mm_G_0L + 1, A_GG_0L),$

$Q_SetEntry(\&A, mm + 1, 5, mm_V1_R0 + 1, A_GV1_R0),$

$Q_SetEntry(\&A, mm + 1, 6, mm_V2_0R + 1, A_GV2_0R),$

$Q_SetEntry(\&A, mm + 1, 7, mm_V1_L0 + 1, A_GV1_L0),$

$Q_SetEntry(\&A, mm + 1, 8, mm_V2_0L + 1, A_GV2_0L).$

В конце присваиваем значение b_{mm} , равное b_G :

$V_SetCmp(\&B, mm + 1, b_G).$

После заданий коэффициентов уравнения (3.14) для m -го узла, счетчик номера уравнения увеличивается на единицу $mm + +$; и начинается определение элементов строки матрицы и правой части с номером элемента $\hat{V}1(m)$ в векторе неизвестных. Приведем соответствующую часть программы:

$Q_SetLen(\&A, mm + 1, 7);$

$Q_SetEntry(\&A, mm + 1, 0, mm + 1, A_V1V1_00);$

$Q_SetEntry(\&A, mm + 1, 1, mm_V1_R0 + 1, A_V1V1_R0);$

$Q_SetEntry(\&A, mm + 1, 2, mm_V1_0R + 1, A_V1V1_0R);$

$Q_SetEntry(\&A, mm + 1, 3, mm_G_L0 + 1, A_V1G_L0);$

$Q_SetEntry(\&A, mm + 1, 4, mm_G_R0 + 1, A_V1G_R0);$

$Q_SetEntry(\&A, mm + 1, 5, mm_V1_L0 + 1, A_V1V1_L0);$

$Q_SetEntry(\&A, mm + 1, 6, mm_V1_0L + 1, A_V1V1_0L);$

$V_SetCmp(\&B, mm + 1, b_V1);$

После чего, увеличив mm еще на 1, определяем коэффициенты для уравнения с номером равным номеру элемента $\hat{V}2(m)$ в векторе неизвестных.

$Q_SetLen(\&A, mm + 1, 7);$

$Q_SetEntry(\&A, mm + 1, 0, mm + 1, A_V2V2_00);$

$Q_SetEntry(\&A, mm + 1, mm_V2_R0 + 1, A_V2V2_R0);$

$Q_SetEntry(\&A, mm + 1, 2, mm_V2_0R + 1, A_V2V2_0R);$

$Q_SetEntry(\&A, mm + 1, 3, mm_G_0L + 1, A_V2G_0L);$

$Q_SetEntry(\&A, mm + 1, 4, mm_G_0R + 1, A_V2G_0R);$

$Q_SetEntry(\&A, mm + 1, 5, mm_V2_L0 + 1, A_V2V2_L0);$

$Q_SetEntry(\&A, mm + 1, 6, mm_V2_0L + 1, A_V2V2_0L);$

$V_SetCmp(\&B, mm + 1, b_V2);$

После чего оба счетчика m и mm увеличиваются на 1 и начинается новый шаг, в процессе которого задаются коэффициенты следующих трех уравнений, соответствующих $(m + 1)$ -му узлу сетки.

4.7 Методы решения СЛАУ

СЛАУ, которые приходится решать на каждом временном слое, очень большой размерности и сильно разрежены, но их матрицы не являются трехдиагональными. С другой стороны, можно считать, что всегда известно хорошее приближение для решения задачи (3.12) — сеточное решение на предыдущем временном слое. Поэтому для решения СЛАУ (3.12) часто используют не прямые методы решения, а итерационные, разработанные на основе метода сопряженных градиентов (CG). Сам метод сопряженных градиентов применим для решения систем с симметричными матрицами. Для решения систем с несимметричными матрицами был разработан метод би-сопряженных градиентов (BiCG). Для его реализации требуется умножать вектора как на матрицу A , так и на матрицу A^* , что очень затратно, если матрица сильно разрежена и хранится в виде нескольких векторов. С целью устранения отмеченного недостатка BiCG были созданы его модификации, реализация которых не требует умножения на сопряженную матрицу. Опишем алгоритмы двух таких методов[4].

Conjugate Gradient Squared Method (CGS)

1. Задается начальное приближение для вектора неизвестных S_0 и произвольный вектор $z^a \neq 0$. Вычисляется невязка $r_0 = b - AS_0$ и полагается $p_0 = u_0 = r_0$.

2. Далее организовывается итерационный процесс для $j = 0, 1, \dots$, состоящий из последовательности действий:

- 2.1 $\alpha_j := (r_j, z^a)/(Ap_j, z^a)$,
- 2.2 $q_j := u_j - \alpha_j Ap_j$,
- 2.3 $S_{j+1} := S_j + \alpha_j(u_j + q_j)$,
- 2.4 $r_{j+1} := r_j - \alpha_j A(u_j + q_j)$,
- 2.5 $\beta_j := (r_{j+1}, z^a)/(r_j, z^a)$,
- 2.6 $u_{j+1} := r_{j+1} + \beta_j q_j$,
- 2.7 $p_{j+1} := u_{j+1} + \beta_j(q_j + \beta_j p_j)$.

Biconjugate Stabilized Method (BiCGSTAB)

1. Задается начальное приближение для вектора неизвестных S_0 и произвольный вектор $z^a \neq 0$. Вычисляется невязка $r_0 = b - AS_0$ и полагается $p_0 = r_0$.

2. Далее организовывается итерационный процесс для $j = 0, 1, \dots$, состоящий из последовательности действий:

- 2.1 $\alpha_j := (r_j, z^a)/(Ap_j, z^a)$,
- 2.2 $s_j := r_j - \alpha_j Ap_j$,
- 2.3 $w_j := (As_j, s_j)/(As_j, As_j)$,
- 2.4 $S_{j+1} := S_j + \alpha_j p_j + w_j s_j$,
- 2.5 $r_{j+1} := s_j - w_j As_j$,
- 2.6 $\beta_j := (r_{j+1}, z^a)/(r_j, z^a) \cdot \alpha_j/w_j$,
- 2.7 $p_{j+1} := r_{j+1} + \beta_j(p_j - w_j Ap_j)$.

При решении нестационарных задач математической физики начальное приближение S_0 берется равным решению на предыдущем временном слое. Вектор z^a обычно выбирают либо единичным ортом по одной из осей координат, либо вектором, у которого все координаты равны, а евклидова норма равна 1.

Итерационный процесс заканчивается, когда норма невязки не уменьшится в заданное число раз.

Применение пакета `Lapack` экономит время за счет отказа от написания подпрограммы, решающей СЛАУ (3.11). Это дает положительный эффект, если требуется создать программу для однократного использования. При необходимости в последующем проводить многочисленные расчеты для конкретной системы часто бывает целесообразно потратить время на разработку собственной подпрограммы, реализующей итерационный метод. Приведем два соображения в пользу такого решения.

1. Можно существенно сэкономить отводимую память за счет сокращения числа массивов размерности Dim . Ведь как видно из вышеописанного примера, многие из диагоналей матрицы A состоят из одних и тех же чисел, которые вычисляются либо в начале каждого шага временного цикла, либо вообще перед его началом. Поэтому, вместо вектора большой размерности достаточно использовать всего одну скалярную переменную.

2. Конкретный вид матрицы A позволяет провести оптимизацию умножения на вектор, которое требуется производить неоднократно на каждом итерационном шаге.

Используем схему с двумя пространственными переменными для иллюстрации того, как в конкретном случае можно реализовать эти соображения.

Основная часть вычислительных усилий на совершение одного шага итерационных методов, в основе которых лежит идея метода сопряженных градиентов, состоит в реализации умножения матрицы A на вектор. Причем за один шаг эта операция задействована дважды. В целях осуществить эту операцию наиболее эффективно предлагается следующий алгоритм.

1. Для хранения матрицы A создаются 12 массивов размерности Dim с именами

$A_GG_R0, A_GG_L0, A_GG_0R, A_GG_0L, A_V1V1_R0, A_V1V1_L0,$
 $A_V1V1_0R, A_V1V1_0L, A_V2V2_R0, A_V2V2_L0, A_V2V2_0R, A_V2V2_0L.$

Оставшиеся ненулевые элементы матрицы A зависят только от статуса узла и их хранение требует скалярных переменных. Для хранения правой части СЛАУ создаются массивы b_G, b_V1 и b_V2 также размерности Dim .

2. Умножение матрицы A на вектор при таком хранении матрицы A нужно организовывать в цикле по узлам, для каждого узла вычисляя три координаты получающегося вектора.

4.8 Использование предобуславливателей

Скорость сходимости итерационных методов снижается при увеличении числа обусловленности матрицы СЛАУ. Поскольку задачи, которые приходится решать на практике, приводят к СЛАУ с большим разбросом собственных значений у матриц, применяются итерационные методы с использованием спектрально-эквивалентных операторов ([6]). Решение системы (3.11) заменяется на решение задачи

$$B^{-1}Ad = B^{-1}b, \quad (4.11)$$

где матрица B такова, что система

$$By = z \quad (4.12)$$

может быть решена достаточно эффективно, а число обусловленности у матрицы $B^{-1}A$ существенно меньше, чем у матрицы A . Матрицу B называют предобуславливателем.

В настоящее время накоплен большой опыт выбора предобуславливателей. Рассмотрим два наиболее простые в реализации способа построения предобуславливателя.

Предобуславливатель Якоби

$$B = \frac{1}{\omega} \text{diag}(A) \quad (4.13)$$

При таком выборе B для решения системы (4.12) нужно всего лишь умножить m -ую координату вектора z на дробь $\frac{\omega}{a_{m,m}}$ для всех m .

Предобуславливатель SSOR (Symmetric Successive Over-Relaxation method)

Представим матрицу A в виде суммы $A = L + D + R$, где L — нижнетреугольная матрица, D — диагональная матрица, а R — верхнетреугольная матрица. В качестве предобуславливателя в методе *SSOR* используют следующую матрицу

$$B = \frac{1}{2 - \omega} \left(\frac{D}{\omega} + L \right) \left(\frac{D}{\omega} \right)^{-1} \left(\frac{D}{\omega} + R \right). \quad (4.14)$$

В этом случае для решения системы (4.12) требуется последовательно решить три системы. В двух из них матрицы треугольные, а в одной вообще диагональная.

Для реализации методов с описанными предобуславливателями (4.13) и (4.14) не требуется дополнительная память. Нужно только продумать алгоритм шага итерации, который позволяет осуществить выбранный итерационный метод с матрицей $B^{-1}A$ при условии, что вся информация о предобуславливателе хранится в матрице A .

4.9 Инструкция по использованию пакета LSPACK

Опишем правила вызова подпрограмм из пакета *Laspack*, использующихся для решении СЛАУ различными модификациями метода би-сопряженных градиентов.

- 1) Декларация матрицы и вектора с именами A и b :

$$QMatrix A;, \quad Vector b;.$$

- 2) Отведение памяти для хранения матрицы A и вектора b размерности Dim (строки и столбцы имеют номера, начиная с 1 и кончая Dim):

$$Q_Constr(&A, "A", Dim, False, Rows, Normal, True);,$$

$$V_Constr(&b, "b", Dim, Normal, True);.$$

- 3) Присвоить элементу вектора b с номером i значение переменной tmp

$$V_SetCmp(&b, i, tmp);.$$

- 4) Определить, что в строке матрицы A с номером i содержатся n отличных от нуля элементов

$$Q_SetLen(&A, i, n);.$$

- 5) Присвоить элементу матрицы A , находящемуся в строке с номером i и столбце с номером j значение переменной tmp (задаваемый элемент в списке отличных от нуля элементов строки имеет номер k от 0 до $n - 1$):

$$Q_SetEntry(&A, i, k, j, tmp);.$$

6) Задать точность решения системы $Ax = b$ равной ε :

SetRTCAccuracy(ε);

Параметр ε задаваемый этой процедурой определяет шаг n , на котором происходит завершение итерационного процесса решения системы $Ax = b$. Номер n определяется из условия, что

$$\|b - Ax_n\|_2 \leq \varepsilon \|b\|_2, \quad (4.15)$$

где через x_n обозначено приближение, полученное на n -ом шаге.

7) Присвоить переменной *tmp* значение i -ой компоненты вектора b

tmp = *V_GetCmp*(&*b*, *i*);

8) Освободить память, отведенную под матрицу A и вектор b ,

Q_Destr(&*A*);, *V_Destr*(&*b*);

Для решения системы $Ax = b$ с несимметричной матрицей в пакете *LASPack* реализованы следующие методы.

9) Conjugate Gradient on the Normal Equations (CGN). Его применение осуществляется через вызов процедуры *CGNIter*. Ее прототип:

Vector CGNIter (*QMatrix* * *A*, *Vector* * *x*, *Vector* * *b*, *int MaxIter*,
PrecondProcType PrecondProc, *double* ω);

Первые три параметра задают элементы решаемой СЛАУ. Целочисленный параметр *MaxIter* задает максимальное выполнимое число шагов итерационного метода. Таким образом, завершение итерационного процесса происходит в двух случаях: либо достигнута заданная точность на n -ом шаге (условие (4.15)), либо число итераций достигло значения *MaxIter*. Параметр *PrecondProc* задает три возможных типа предобуславливателя: *JacobiPrecond*, *SSORPrecond* и *ILUPrecond*. Выбор первых двух описан в разделе (4.8), а третий является важным подслучаем второго при значении $\omega = 1$. Параметр, задающий предобуславливатель может быть задан значением *NULL*. В этом случае итерационный процесс будет осуществляться без предобуславливателя. Последний параметр процедуры задает значение параметра ω в предобуславливателе. Значение этого параметра может быть любым, если предобуславливатель отсутствует.

Во всех следующих процедурах параметры имеют тот же смысл, что и в процедуре *CGNIter*.

10) Generalized Minimal Residual (GMRES). Его применение осуществляется через вызов процедуры *GMRES*. Ее прототип:

Vector GMRESIter (*QMatrix* * *A*, *Vector* * *x*, *Vector* * *b*, *int MaxIter*,
PrecondProcType PrecondProc, *double* ω);

11) BiConjugate Gradient (BiCGIter). Его применение осуществляется через вызов процедуры *GMRES*. Ее прототип:

Vector BiCGIter (*QMatrix* * *A*, *Vector* * *x*, *Vector* * *b*, *int MaxIter*,

PrecondProcType PrecondProc, double ω); .

12) Quasi-Minimal Residual (QMR, without lock-ahead). Его применение осуществляется через вызов процедуры *QMRIter*. Ее прототип:

*Vector QMRIter (QMatrix * A, Vector * x, Vector * b, int MaxIter,*

PrecondProcType PrecondProc, double ω); .

13) Conjugate Gradient Squared (CGS). Его применение осуществляется через вызов процедуры *CGSIter*. Ее прототип:

*Vector CGSIter (QMatrix * A, Vector * x, Vector * b, int MaxIter,*

PrecondProcType PrecondProc, double ω); .

14) BiConjugate Gradient Stabilized (BiCGSTAB). Его применение осуществляется через вызов процедуры *BiCGSTAB*. Ее прототип:

*Vector BiCGSTABIter (QMatrix * A, Vector * x, Vector * b, int MaxIter,*

PrecondProcType PrecondProc, double ω); .

Пакет Laspark в интернете в открытом доступе находится по адресу

<http://ftp.wh2.tu-dresden.de/pub/FreeBSD/ports/i386/packages/math/>.

4.10 Инструкция по использованию библиотеки Eigen

Сайт: <https://eigen.tuxfamily.org>.

Исходный код: <https://gitlab.com/libeigen/eigen/>.

Лицензия: MPLv2 (Mozilla Public License v2.0), <https://www.mozilla.org/en-US/MPL/2.0/>.

На момент написания данной инструкции актуальной версией библиотеки являлась версия 3.3.9.

Библиотека Eigen является шаблонной библиотекой для языка C++ для линейной алгебры. В данном параграфе не будут рассматриваться все возможности данной библиотеки, лишь те, что имеют непосредственное отношение к решению разреженных линейных систем, а именно мета-модуль **Sparse**, который можно подключить с использованием директивы **include** следующим образом:

```
#include <Eigen/Sparse>
```

На самом деле, рассматриваться будет не весь мета-модуль, а лишь его часть.

Как добавить библиотеку в свой код

Библиотека Eigen использует систему автоматизации сборки CMake, поэтому, если Ваш проект использует данную систему, то достаточно скачать исходный код библиотеки и добавить в **CMakeLists.txt** строку

```
add_subdirectory(eigen)
```

Если же CMake не используется, то можно поступить одним из следующих образом: при компиляции указать компилятору путь до директории, содержащей исходный код библиотеки Eigen, с помощью флага `-I`, например,

```
$ g++ -I/path/to/Eigen ...
```

Примечание. На самом деле, требуется не весь исходный код библиотеки, а лишь поддиректория Eigen (см. <https://gitlab.com/libeigen/eigen/-/tree/master/Eigen/>), которую необходимо скопировать в `include` директорию, например,

```
$ curl https://gitlab.com/libeigen/eigen/-/archive/3.3.9/eigen-3.3.9.zip \
  --output eigen.zip
$ unzip eigen.zip
$ mkdir include
$ mv -r eigen-3.3.9/Eigen include
$ rm -r eigen-3.3.9 eigen.zip
$ g++ -Iinclude ...
```

Векторы

Для хранения векторов из элементов типа `double` используется класс `Eigen::VectorXd`¹. Приведем пример работы с классом `Eigen::VectorXd`.

```
using eigen_vector_t = Eigen::VectorXd;

...

// Размерность вектора.
int n = 2;

// Объявление вектора размера n.
eigen_vector_t vec (n);

// Заполнение вектора.
for (int i = 0; i < n; i++)
    vec[i] = 0.0;

// Печать вектора (может быть полезно при отладке).
std::cout << vec << std::endl;
```

Разреженные матрицы

Для хранения разреженных матриц используется шаблонный класс `Eigen::SparseMatrix`, обязательным параметром которого является тип хранимых значений.

Приведем пример работы с классом `Eigen::SparseMatrix`.

¹На самом деле, `Eigen::VectorXd` не является классом. Дело в том, что в библиотеке Eigen реализован лишь шаблонный класс для хранения матриц и на его основе с помощью ключевого слова `typedef` создан тип `Eigen::VectorXd`, то есть векторы длины n в данной библиотеке, на самом деле, являются матрицами размера $n \times 1$.

```

using eigen_matrix_t = Eigen::SparseMatrix<double>;
using eigen_triplet_t = Eigen::Triplet<double>;

...

// Размер матрицы.
int n = 2;

// Объявление разреженной матрицы размера n * n.
eigen_matrix_t mat (n, n);

// Заполнение матрицы.
// Шаг 1. Создание триплетов.
// Примечание: вместо std::vector можно использовать
//             std::list или иной подходящий контейнер.
std::vector<eigen_triplet_t> triplets;
for (int i = 0; i < n; i++)
    for (int j = 0; j < n; j++)
    {
        double a_ij = get_value (i, j);
        if (!equal (a_ij, 0.0))
            triplets.emplace_back (i, j, a_ij);
    }
// Шаг 2. Непосредственно заполнение матрицы.
matrix.setFromTriplets (triplets.begin (), triplets.end ());

// Печать матрицы (может быть полезно при отладке).
// Примечание: помимо самой матрицы печатается
//             также дополнительная информация.
std::cout << mat << std::endl;

```

Стоит отметить, что если есть триплеты с повторяющимися индексами, то значения будут суммироваться, то есть запись

```

triplets.emplace_back (i, j, a);
triplets.emplace_back (i, j, b);

```

эквивалентна

```

triplets.emplace_back (i, j, a + b);

```

Решатели

В библиотеке `Eigen` реализован ряд прямых и итерационных решателей, а также обертки для ряда внешних решателей. Мы будем рассматривать только итерационные решатели.

В библиотеке `Eigen` реализованы следующие решатели:

- `ConjugateGradient` — метод сопряжённых градиентов, можно использовать только для симметричных матриц;

- `LeastSquaresConjugateGradient` — метод сопряжённых градиентов для задачи наименьших квадратов, можно использовать только для симметричных матриц;
- `BiCGSTAB` — стабилизированный метод бисопряженных градиентов.

Все решатели реализованы как шаблонные классы и имеют одинаковый шаблон, обязательным параметром которого является тип значений, хранимых в матрицах и векторах.

Приведем пример работы с решателями.

```
using eigen_solver_t = Eigen::BiCGSTAB<eigen_matrix_t>;

...

eigen_solver_t solver;

// Первым шагом является инициализация решателя на основе матрицы,
// а также построение предобусловливателя.
solver.compute (matrix);

if (solver.info () != Eigen::Success)
    // Обработка ошибки.

// Решение системы matrix * x = rhs
// с нулевым начальным приближением.
eigen_vector_t res = solver.solve (rhs);

if (solver.info () != Eigen::Success)
    // Обработка ошибки.

// Использовать решатель можно повторно.
eigen_vector_t res2 = solver.solve (rhs2);

// Имеется также возможность решить систему
// с произвольным начальным приближением guess.
eigen_vector_t res3 = solver.solveWithGuess (rhs, guess);
```

Замечание. Конструктор и вызов метода `compute` можно объединить:

```
eigen_solver_t solver;
solver.compute (matrix);

эквивалентно

eigen_solver_t solver (matrix);
```

Замечание. Для разностных схем, в которых матрицы получаются несимметричными, доступным решателем является стабилизированный метод бисопряженных градиентов.

Предобусловливатели

В библиотеке `Eigen` реализованы следующие предобусловливатели:

- `IdentityPreconditioner` — без предобусловливателя;
- `DiagonalPreconditioner` — предобусловливатель Якоби (диагональный предобусловливатель), используется по умолчанию в `ConjugateGradient` и `BiCGSTAB`, нельзя использовать совместно с `LeastSquaresConjugateGradient`;
- `IncompleteCholesky` — неполное разложение Холецкого с двойным порогом, можно использовать только совместно с `ConjugateGradient`;
- `LeastSquareDiagonalPreconditioner` — аналог предобусловливателя Якоби для задачи наименьших квадратов, используется по умолчанию в `LeastSquaresConjugateGradient`, можно использовать только совместно с `LeastSquaresConjugateGradient`;
- `LeastSquareDiagonalPreconditioner` — неполное LU разложение с двойным порогом, можно использовать только совместно с `BiCGSTAB`.

Все предобусловливатели реализованы как шаблонные классы и имеют одинаковый шаблон, обязательным параметром которого является тип значений, хранимых в матрицах и векторах.

Предобусловливатель является первым необязательным шаблонным параметром для решателя, то есть, например, для использования `IncompleteCholesky` совместно с `ConjugateGradient` достаточно написать

```
using eigen_precond_t = Eigen::IncompleteCholesky<double>;
using eigen_solver_t = Eigen::ConjugateGradient<eigen_matrix_t, eigen_precond_t>;
```

вместо

```
using eigen_solver_t = Eigen::ConjugateGradient<eigen_matrix_t>;
```

Замечание. Лучшим из доступных предобусловливателей для метода стабилизированный метод бисопряженных градиентов является неполное LU разложение, поэтому рекомендуется использовать именно его.

Пример

Рассмотрим уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = f \quad (4.16)$$

в области $[0; T] \times [0; X] = [0; 1]^2$ с начальными и граничными условиями

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in [0; 1]; \quad u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad t \in [0; 1]. \quad (4.17)$$

Замечание. На самом деле поставленная задача является переопределенной. Из теории дифференциальных уравнений следует, что граничное условие должно быть задано только на левой границе области, поскольку значения на правой границе определяются однозначно через начальное условие, граничное условие на левой границе и правую часть уравнения. Однако в используемой ниже неявной разностной схеме с центральной

разностью требуется априорное задание правого граничного условия. На практике это возможно, например, в случае локального возмущения начального значения от некоторого фонового значения и рассмотрения достаточно большой области по пространственной переменной при условии, что за рассматриваемый временной промежуток возмущение не дойдет до границы. В том случае на правой границе можно задать значения решения, равные фоновому значению.

Для данной задачи рассмотрим разностную схему

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + \frac{v_{m+1}^{n+1} - v_{m-1}^{n+1}}{2h} = f_m^{n+1}, \quad 0 < m < M; \quad v_0^{n+1} = v_M^{n+1} = 0; \quad v_m^0 = u_0(mh). \quad (4.18)$$

Найдем функции f и u_0 такие, что функция $u = \exp(t) \sin(\pi x)$ является решением задачи (4.16) с начальными и граничными условиями (4.17):

$$f(t, x) = \exp(t)(\sin(\pi x) + \pi \cos(\pi x)); \quad u_0(x) = u(0, x) = \sin(\pi x). \quad (4.19)$$

Далее приведена программа, реализующая разностную схему (4.18) и выводящую значение C нормы для вектора ошибки на последнем временном слое, то есть значение

$$\max_{0 \leq m \leq M} |v_m^N - u(N\tau, mh)| = \max_{0 \leq m \leq M} |v_m^N - u(1, mh)|. \quad (4.20)$$

```
#include <Eigen/Sparse>

#include <cmath>
#include <cstdio>
#include <vector>

using vector_t = std::vector<double>;

using eigen_matrix_t = Eigen::SparseMatrix<double>;
using eigen_triplet_t = Eigen::Triplet<double>;
using eigen_vector_t = Eigen::VectorXd;

using eigen_precond_t = Eigen::IncompleteLUT<double>;
using eigen_solver_t = Eigen::BiCGSTAB<eigen_matrix_t, eigen_precond_t>;

void scheme (
    size_t N, size_t M,
    std::function<double (double x)> u0,
    std::function<double (double t, double x)> f,
    vector_t &result
)
{
    double tau = 1. / N;
    double h = 1. / M;

    eigen_vector_t curr (M + 1);
```

```

// Начальные условия
for (size_t m = 0; m <= M; m++)
    curr[m] = u0 (m * h);

for (size_t n = 0; n < N; n++)
{
    eigen_matrix_t matrix (M + 1, M + 1);
    eigen_vector_t rhs (M + 1);

    std::vector<eigen_triplet_t> triplets;

    // Первое уравнение, m = 0
    triplets.emplace_back (0, 0, 1.);
    rhs[0] = 0.;

    for (size_t m = 1; m < M; m++)
    {
        double tmp = tau / (2. * h);
        triplets.emplace_back (m, m - 1, -tmp);
        triplets.emplace_back (m, m, 1.);
        triplets.emplace_back (m, m + 1, tmp);
        rhs[m] = curr[m] + tau * f ((n + 1) * tau, m * h);
    }

    // Последнее уравнение, m = M
    triplets.emplace_back (M, M, 1.);
    rhs[M] = 0.;

    matrix.setFromTriplets (triplets.begin (), triplets.end ());

    eigen_solver_t solver (matrix);

    if (solver.info () != Eigen::Success)
    {
        fprintf (stderr, "Can not build preconditioner");
        return;
    }

    eigen_vector_t res = solver.solveWithGuess (rhs, curr);

    if (solver.info () != Eigen::Success)
    {
        fprintf (stderr, "Failed to solve the system with Eigen");
        return;
    }
}

```

```

    curr = res;
}

result.clear ();

for (size_t m = 0; m <= M; m++)
    result.push_back (curr[m]);
}

int main (int argc, char *argv[])
{
    if (argc != 3)
    {
        fprintf (stderr, "Use: %s N M\n", argv[0]);
        return -1;
    }

    int N = atoi (argv[1]);
    int M = atoi (argv[2]);

    if (N <= 0 || M <= 0)
    {
        fprintf (stderr, "N and M must be greater than zero\n");
        return -1;
    }

    auto u = [] (double t, double x) {
        return exp (t) * sin (M_PI * x);
    };
    auto u0 = [&] (double x) {
        return u (0., x);
    };
    auto f = [] (double t, double x) {
        return exp (t) * (sin (M_PI * x) + M_PI * cos (M_PI * x));
    };

    vector_t result;

    scheme (N, M, u0, f, result);

    double residual_norm = 0.;

    for (size_t m = 0; m <= M; m++)
    {
        double h = 1. / M;
        double val = result[m] - u (1., m * h);
        residual_norm = std::max (residual_norm, fabs (val));
    }
}

```



```

}

printf ("%e\n", residual_norm);
}

```

Замечание. Матрица системы для схемы (4.18) является трехдиагональной, поэтому на практике для таких систем стоит использовать метод прогонки. Накопление погрешности ошибок округления при использовании метода прогонки для обращения таких матриц доказана в [12].

4.11 Разностная схема для расчета каверны

Приведем для примера изменения в разностной схеме (3.7)-(3.10), которые необходимо сделать, чтобы провести расчет течения в двумерной прямоугольной каверне. Эта задача ставится в области

$$\Omega = [0; 1] \times [0; 1]$$

для системы уравнений (2.1) с $\mathbf{f} = 0$ со следующими начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned}
(\rho, \mathbf{u})|_{t=0} &= (\rho_0, \mathbf{0}), \quad (x_1, x_2) \in \Omega; \\
u_1(t, x_1, x_2) &= w, \quad (t, x_1, x_2) \in [0, T] \times \Gamma^{x_2+}, \quad \Gamma^{x_2+} \equiv \{(x_1, x_2) \in \partial\Omega, x_2 = 1\}; \\
u_1(t, x_1, x_2) &= 0, \quad (t, x_1, x_2) \in [0, T] \times (\partial\Omega \setminus \Gamma^{x_2+}); \\
u_2(t, x_1, x_2) &= 0, \quad (t, x_1, x_2) \in [0, T] \times \partial\Omega; \\
\rho(t, 0, 1) &= \rho_0, \quad t \in [0; T].
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Величины ρ_0 и w считаются положительными константами и их значения задаются вместе с параметрами области и газа.

Для задачи о каверне по сравнению с простейшей задачей (2.1)-(2.5) меняется уравнение для функции g (логарифма плотности) на участке границы Γ^{x_2+} :

$$\frac{\partial g}{\partial t} + w \frac{\partial g}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_2 g}{\partial x_2} + \frac{2-g}{2} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0. \tag{4.22}$$

Изменения в схеме для уравнения неразрывности в узлах $m_2 = M_2$:

$$\begin{aligned}
G_{0, M_2} &= \rho_0; \\
G_t + w \hat{G}_{x_1} &+ 0.5((V_2 \hat{G})_{\bar{x}_2} + 2(\hat{V}_2)_{\bar{x}_2} - G(V_2)_{\bar{x}_2}) + \\
+ 0.5h_2 &\left((GV_2)_{\bar{x}_2 \bar{x}_2}^{-1_2} - 0.5(GV_2)_{\bar{x}_2 \bar{x}_2}^{-2_2} + (2-G) \left((V_2)_{\bar{x}_2 \bar{x}_2}^{-1_2} - 0.5(V_2)_{\bar{x}_2 \bar{x}_2}^{-2_2} \right) \right) = \\
= 2\tau\eta &(\Phi_{s_1} \hat{G}_{x_1})_{\bar{x}_1} - \frac{4\tau\eta}{h_2} \Phi_{s_2} \hat{G}_{\bar{x}_2}, \quad m_1 = 1, \dots, M_1 - 1, \quad m_2 = M_2;
\end{aligned} \tag{4.23}$$

$$G_t + w \hat{G}_{\bar{x}_1} + h_1 w \left(G_{\bar{x}_1 \bar{x}_1}^{-1_1} - 0.5 G_{\bar{x}_1 \bar{x}_1}^{-2_1} \right) = -\frac{8\tau\eta}{h_1} \Phi_{\bar{s}} \hat{G}_{\bar{x}_1, M}, \quad m_1 = M_1, \quad m_2 = M_2. \tag{4.24}$$

Разностная аппроксимация (4.23) приводит к уравнению следующего вида

$$\begin{aligned}
A_GG_00 \cdot \hat{G}_00 + A_GG_R0 \cdot \hat{G}_R0 + A_GG_L0 \cdot \hat{G}_L0 + A_GG_0L \cdot \hat{G}_0L + \\
+ A_GV2_0L \cdot \hat{V}2_0L = b_G,
\end{aligned} \tag{4.25}$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$\begin{aligned}
A_GG_00 &= 0.5 + \frac{\tau^2\eta}{h_x^2}(\Phi_R0 + \Phi_L0) + \frac{\tau^2\eta}{h_y^2}\Phi_0L, \\
A_GG_R0 &= \frac{w\tau}{4h_1} - \frac{\tau^2\eta}{h_x^2}\Phi_R0, \\
A_GG_L0 &= -\frac{w\tau}{4h_1} - \frac{\tau^2\eta}{h_x^2}\Phi_L0, \\
A_GG_0L &= -\frac{\tau}{4h_2}V2_0L - \frac{\tau^2\eta}{h_y^2}\Phi_0L, \\
A_GV2_0L &= -\frac{\tau}{2h_2}, \\
b_G &= 0.5g_00 - \frac{\tau}{4h_2}G_00 \cdot V2_0L - \\
&\quad -\frac{\tau}{2h_2}(-2.5G_0L \cdot V2_0L + 2G_{m_1, M_2-2}V2_{m_1, M_2-2} - 0.5G_{m_1, M_2-3}V2_{m_1, M_2-3} + \\
&\quad + (2 - G_00)(-2.5V2_0L + 2V2_{m_1, M_2-2} - 0.5V2_{m_1, M_2-3})).
\end{aligned} \tag{4.26}$$

В формулах (4.26) через $\Phi_??$ были обозначены величины коэффициента искусственной вязкости в соответствующих узлах шаблона.

Аналогично из разностной аппроксимации (4.24) можно получить соответствующее уравнение.

Решение задачи (2.1), (4.21) с течением времени также становится стационарным. Это установившееся со временем течение принято изображать для описания результатов счета. Наиболее наглядно иллюстрируют свойства этого течения линии тока (линии уровня функции модуля вектора с указанием направления вектора) и двумерный график функции плотности. Течение считают установившимся, если норма разности между решениями на двух соседних временных слоях остается меньше заданной малой величины на протяжении нескольких временных шагов.

В заключении кратко опишем основные действия, которые нужно проделать, чтобы из программы, рассчитывающей тест для гладких функций, получить программу для расчета течения газа в каверне.

1) Изменить главную программу, чтобы она проводила один расчетный тест. Результатом расчета должны быть файлы `rho.res` и `v.res`, которых должны быть записаны сеточные функции плотности и вектора скорости соответственно в момент времени, когда решение можно считать установившимся.

2) Убрать из файла `func.c` функции, вычисляющие точное решение и соответствующие правые части.

3) В процедуре `shema`

а) в файле `nachal.c` задать новые граничные условия;

б) изменить расчетные формулы в файлах `case4.c`, `case7.c`, `case8.c`, а в остальных файлах `case?.c` убрать вызовы функций f_k ($k = 0, \dots, 2$) и поменять задание граничных условий.

4) В формулах файлов `case?.c` добавить слагаемые, отвечающие за искусственную вязкость. Параметр η задавать в структуре `grid`. Для удобства вычисления коэффициента искусственной вязкости рекомендуется задать в файле `viraj.c` скалярные переменные

$$thxe = \frac{\eta\tau^2}{h_x^2}, \quad thye = \frac{\eta\tau^2}{h_y^2},$$

а также в файле `regem.c` завести переменные $vz_{??} = \Phi_{??} \cdot th?e$, в которые будут записываться значения коэффициента вязкости в узлах шаблона.

5) В конце процедуры `shema` после расчета очередного временного слоя сделать проверку того, что течение можно считать установившимся.

Список литературы

- [1] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.
- [2] Имранов Ф.Б., Кобельков Г.М., Соколов А.Г. О разностной схеме баротропного газа. Доклады РАН, т.478, 2018 г., N 4, 388-391.
- [3] Попов А.В., Жуков К.А. Неявная разностная схема для нестационарного движения вязкого баротропного газа. //Вычислительные методы и программирование. т.14, 2013 г. N 2. с. 516-523.
- [4] Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems. SIAM, 2ed., 2003.
- [5] Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики жидкостей и газов. Новосибирск: Наука, 1983, 320 с.
- [6] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2000 г. - 624 с.
- [7] Попов А.В. Вычислительный практикум. Численное моделирование нестационарного одномерного течения газа с использованием неявных разностных схем. <http://numa.math.msu/materials>, 2024.
- [8] Попов А.В. Gnuplot и его приложения. М.: Изд-во попечительского совета механико-математического факультета МГУ, 2015. <graphics/gnuplot/docs/gdoc.pdf>
- [9] Богачев К.Ю. Практикум на ЭВМ. Методы решения линейных систем и нахождения собственных значений. М.: Изд-во механико-математического ф-та МГУ, 1998, – 192 с.
- [10] Laspack, <http://www.tu-dresden.de/mwism/skalicky/laspack/laspack.html>.
- [11] Eigen, <https://eigen.tuxfamily.org/>. C++ template library for linear algebra: matrices, vectors, numerical solvers and related algorithms.
- [12] Попов А.В. Методы решения нестационарных задач механики сплошной среды. Устойчивость метода прогонки. Лекция 10. Рабочий конспект спецкурса. 2016 г. <http://edu.math.msu.ru/special-courses/po-vyboru/>
- [13] Валединский В.Д., Корнев А.А. Методы программирования в задачах и примерах на C/C++. Москва: Издательство Московского университета, 2023, 413 с.