Лаборатория вычислительных методов
д.ф.-м.н. А. Р. Алимов

Задачи геометрической теории приближений и ее приложений. Самая известная нерешенная проблема в этой теории формулируется следующим образом (проблема Ефимова–Стечкина–Кли): верно ли, что в бесконечномерном гильбертовом пространстве любое чебышёвское множество выпукло? (Множество называется *чебышёвским*, если для любой точки пространства элемент наилучшего приближения из этого множества единственен.) Несмотря на неоднократные попытки многих выдающихся математиков, эта задача остается нерешенной уже на протяжении более 70 лет. Число актуальных давно стоящих задач далеко не исчерпывается только этой задачей.

Классическим примером чебышёвского множества в пространстве $C[a,b]$ является подпространство многочленов степени не выше n. Этот факт был установлен великим русским математиком и механиком **П. Л. Чебышёвым** (одним из основателей теории приближения, теории вероятностей и теории механизмов). Задача приближения любой непрерывной функции многочленом возникла у Чебышёва при создании им механизма, способного приближенного рисовать график любого многочлена. Чебышёв впервые поставил и разрешил основные задачи по синтезу механизмов и сконструировал ряд сложных машин и приборов (паровая машина с параллелограммом Уатта, арифмометр, центробежный регулятор и др.). “*Полагаю, что не только я не понимаю интереса и значения этих странных задач о maxima и minima, изучавшихся Чебышёвым в мемуарах, заглавие которых часто начинается: о функции, наименее уклоняющейся от нуля..., быть может, нужно обладать славянской душой, чтобы понять великого русского ученого*?” А. Лебег.

Несомненно, в связи с рассматриваемыми исследованиями Чебышёва стоит и задача о фигурах равновесия вращающейся жидкости, мало уклоняющихся от эллипсоида, имеющая важные приложения в астрономии и впервые строго сформулированная Чебышёвым. Сам Чебышёв не оставил исследований по этому вопросу, но поставленную им задачу предлагал вниманию Золотарёва, Ковалевской и Ляпунова и, в общих чертах, намечал путь, который может привести к её удачному решению.

П. Л. Чебышев умел зажигать научный энтузиазм своих учеников. Основной чертой его школы было стремление тесно связать проблемы математики с принципиальными вопросами естествознания и техники. Студенты называли Чебышёва не иначе, как “наше солнце”. Весьма примечательно, что в современной геометрической теории приближений существует термин “чебышёвское солнце".

В качестве еще одного приложений теории приближения, напомним, что с одним из вопросов об особого рода минимумах, впервые выдвинутых Чебышевым, встретился и его знаменитый современник Д. И. Менделеев в своих исследованиях о соединении спирта с водой, решение которого было дано А. А. Марковым. В 1889 г. А. А. Марков дал ответ на вопрос, поставленный Д. И. Менделеевым в его сочинении "Исследование водных растворов по удельному весу": предполагая, что модуль-максимум полинома $P_n(x)$ степени n в промежутке $x \in [-1, 1]$ равен 1, найти верхнюю границу для модуля-максимума его производной в том же промежутке. Марков показал, что эта верхняя граница равна n^2; как легко проверить, она достигается на многочлене Чебышёва в точках ± 1. В современной теории приближений, неравенства, аналогичные неравенствам Маркова, служат для доказательств так называемых обратных теорем теории приближений, суть которых состоит в доказательстве гладкости функций, имеющих заданную скорость приближения полиномами.

Возможные темы исследований: задачи геометрической теории приближений, связанных с геометрическими, топологическими и комбинаторными методами различных задач, возникающих в теории аппроксимации и теории экстремальных задач (для пространств с симметричным и несимметричным расстоянием). В задачах min- и max-аппроксимации имеется большое количество открытых задач, как классических, так и и новых. На сегодняшний день теория min- и max-аппроксимации имеет приложения не только в математике, но и в задачах геометрической оптики. По этим темам опубликованы два обзора в Успехах математических наук: А. Р. Алимов, И. Г. Царьков, "Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения", УМН, 71:1(427) (2016), 3–84; А. Р. Алимов, И. Г. Царьков, "Чебышёвский центр множества, константа Юнга и их приложения", УМН, 74:5(449) (2019), 3–82. В 2022 г. опубликована монография по геометрической теории приближений в издательстве Springer (Alexey R. Alimov, Igor' G. Tsar'kov, *Geometric Approximation Theory*). В последнее время возник ряд актуальных задач, связанных с приближениями в пространствах с несимметричной метрикой или нормой. Естественный пример несимметричной нормы – функционал Минковского выпуклого (не обязательно симметричного) множества, содержащего начало координат в своем ядре и ограниченного по любому лучу, выходящему из нуля. В общем случае пространство с несимметричной нормой не является локально выпуклым пространством (и, в частности, не хаусдорфовым), поэтому многие классические результаты для нормированных пространств становятся или неверными или не очевидными.

Имеется много задач различного уровня сложности, связанными с классическими и новыми направлениями геометрической теории приближений в симметричных и несимметричных пространствах.

А. Р. Алимов (alexey.alimov-msu@yandex.ru)

Список публикаций: https://www.mathnet.ru/rus/person13059