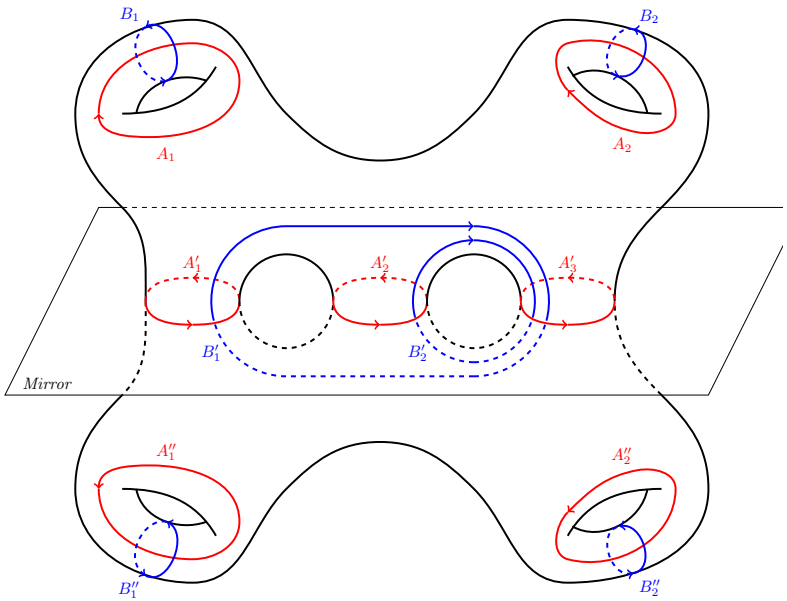
Эффективная теория римановых поверхностей и их семейств

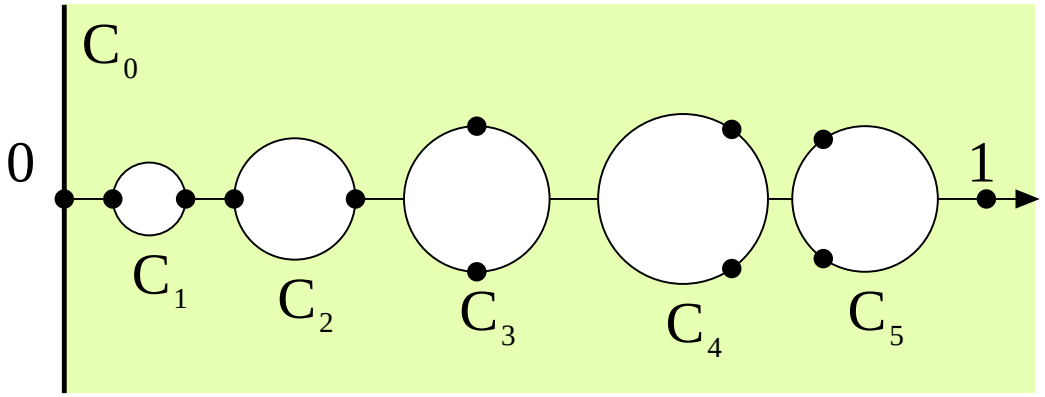
А.Б. Богатырёв

ИВМ РАН, МЦФПМ, МФТИ, МГУ

01 апреля 2021

Римановы поверхности и их модули как источник спецфункций





На перекрестке алгебры, анализа, геометрии и топологии.

А теперь еще и эффективных вычислений

$$\theta(u, \Pi), \qquad \Theta_1(z|\mathfrak{G}), \qquad \sigma(u, \dots)$$

Элементарная геометрия: Длина дуги эллипса

Из школьного курса математики все мы знаем, чему равна длина окружности и площадь круга. Немного усложним задачу и растянем окружность, превратив ее в эллипс.

$$x^2 + (\kappa y)^2 = 1 \tag{1}$$

Площадь внутренности эллипса посчитать несложно, а вот при вычислении длины его дуги мы наталкиваемся на эллиптический интеграл:

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int \sqrt{1 + \frac{x^2}{\kappa^4 y^2}} dx = \int \sqrt{\frac{x^2 + \kappa^2(1 - x^2)}{1 - x^2}} \frac{dx}{\kappa}. \tag{2}$$

Вообще, эллиптическим называется интеграл вида $\int \frac{P(x)dx}{\sqrt{P_4(x)}}$, где $P(x)$ – многочлен, а $P_4(x)$ – многочлен третьей или четвертой степени с различными корнями.

Элементарная физика: маятник

Рассмотрим тяжелое тело подвешенное в поле силы тяжести. Потенциальная энергия зависит от угла отклонения подвеса

$$U(\phi) = -mgL\cos(\phi), \tag{3}$$

где m -это масса тела, L – длина подвеса и g – ускорение силы тяжести. Уравнение движения маятника

$$\frac{L}{g}\ddot{\phi} = -sin(\phi) \tag{4}$$

в предположении малости колебаний линеаризуют (правая часть заменяется на $-\phi$), при этом период колебаний перестает зависеть от амплитуды. Проинтегрируем движение не делая предположения о малости колебаний.

Элементарная физика: маятник

$$E = \frac{L}{2g}\dot{\phi}^2 - cos(\phi), \tag{5}$$

откуда

$$dt = \sqrt{\frac{L}{2g}}\frac{d\phi}{\sqrt{E + cos(\phi)}}. \tag{6}$$

В правой части последнего равенства сделаем замену переменной $z = \exp i\phi$, тогда дифференциал заменится на такой:

$$\frac{dz}{\sqrt{z^3 + 2Ez^2 + z}}, \tag{7}$$

с точностью до умножения на некоторую постоянную. Как видим, определение движения маятника сводится к обращению эллиптического интеграла. Так и были введены эллиптические функции.

Волчок Эйлера

Движение твердого тела в отсутствии сторонних сил (например, кувыркание космического аппарата, или точки подвеса, совпадающей с центром масс) описывается системой уравнений Эйлера:

$$\begin{aligned} J_1\dot{\Omega}_1 &= (J_2 - J_3)\Omega_2\Omega_3, \\ J_2\dot{\Omega}_2 &= (J_3 - J_1)\Omega_3\Omega_1, \\ J_3\dot{\Omega}_3 &= (J_1 - J_2)\Omega_1\Omega_2, \end{aligned} \tag{8}$$

Ω_s – компоненты угловой скорости в системе координат, связанной с телом, и J_s – моменты инерции тела относительно его центра масс. Эта система уравнений имеет два интеграла движения, энергию и квадрат кинетического момента

$$2E = \sum_{s=1}^{3} J_s\Omega_s^2, \qquad M^2 = \sum_{s=1}^{3} J_s^2\Omega_s^2, \tag{9}$$

Волчок Эйлера

Отсюда следует, что траектории динамической системы лежат на пересечении двух трехосных эллипсоидов с общими центрами, в частности являются замкнутыми. Какова же динамика вдоль каждой траектории? Используя две сохраняющихся величины, можно исключить две компоненты вектора угловой скорости из уравнений движения. Каждая компонента удовлетворяет уравнению вида

$$\dot{\Omega}_s^2 = P_4(\Omega_s | E, M, J), \qquad s = 1, \dots, 3, \tag{10}$$

где $P_4(\dots)$ – многочлен степени 4 по первому аргументу, коэффициенты которого зависят от энергии, величины кинетического момента и моментов инерции тела. Разделяя в последнем уравнении переменные, мы видим что время является эллиптическим интегралом от динамической переменной.

Волчок Ковалевской

Шесть уравнений движения Кирхгофа, всегда имеет три . интеграла движения: энергию, длину вектора силы тяжести и ее скалярное произведение на кинетический момент. Волчок Ковалевской имеет два равных главных момента инерции, вдвое больших третьего и точку подвеса на плоскости экватора. При этом возникает дополнительный интеграл движения, так что само движение происходит по поверхности. Динамика описывается с помощью римановой поверхности рода 2 (топологически это сфера с двумя ручками = крендель = толстая цифра 8). На т.н. якобиане (двумерном торе) движение оказывается равномерным и прямолинейным.

Уравнения мелкой воды

Солитоны (уединенные волны) были обнаружены экспериментально гидроинженером Дж.Расселом на канале Юнион в Шотландии в 1834 году. Историю этого открытия и реакцию на него со стороны ведущих ученых Англии того времени см в книге A.Newell. Профиль уединенной волны

$$u(x,t) = 2k^2/ch^2(kx - k^3t) \tag{11}$$

нашли Буссинеск (1872) и Релей (1876), а знаменитое теперь уравнение КдФ

$$4u_t = 6uu_x + u_{xxx} \tag{12}$$

для волны в мелком канале слабо меняющейся глубины Кортевег и де Фриз только в 1895. Общее решение этого уравнения в виде бегущей волны представимо в эллиптических функциях и оно зависит от нескольких постоянных спрятанных в функции Вейерштрасса $\wp$. Один из предельных случаев этого решения является уединеннной волной (11).

Уравнения мелкой воды 2

Метод конечнозонного интегрирования был применен к КдФ и многим другим нелинейным уравнениям математической физики, например к описывающиму волны на мелкой воде уравнению Буссинеска

$$3u_{yy} + (6uu_x + u_{xxx})_x = 0, \tag{13}$$

или обобщению последнего и КдФ уравнению Кадомцева-Петвиашвили (1970), описывающего волны в плазме.

$$3u_{yy} = (4u_t - 6uu_x - u_{xxx})_x \tag{14}$$

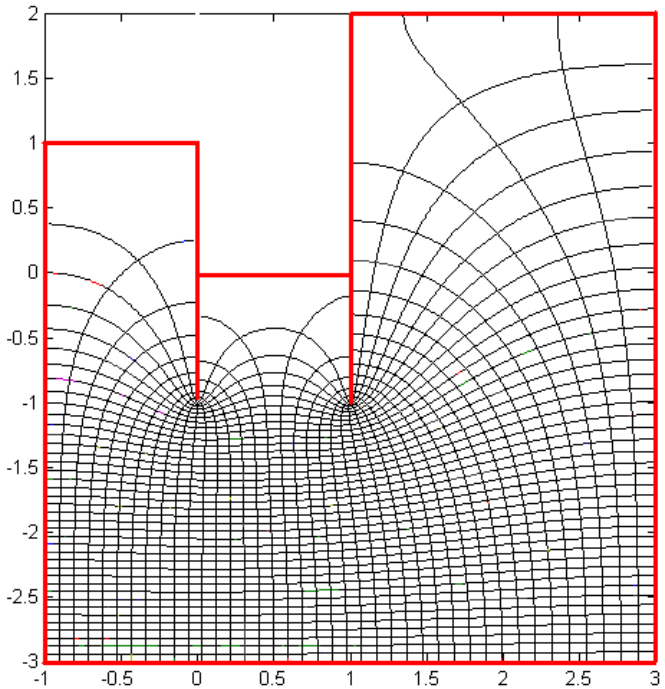
В частности решения КП в виде бегущей волны даются формулой Матвеева-Итса

$$u(x, y, t) = 2\partial_x^2 \log \theta(Ux + Vy + Wt + z|\Omega) \tag{15}$$

в которой U, V, W - некоторые постоянные вектора, θ – тета функция, определяемая римановой поверхностью. Подобные алгебро-геометрические решения имеют и многие другие нелинейные уравнения математической физики (NLSE).

Конформные отображения

Известно представление Кристоффеля-Шварца для конформного отображения полуплоскости на произвольный односвязный многоугольник, возможно неограниченный. В случае, когда все углы многоугольника соизмеримы с развернутым, интеграл Кристоффеля-Шварца является абелевым на римановой поверхности. Для вычисления такого интеграла можно применить теорию функций на этой римановой поверхности.



Конформные отображения

Приложений этого подхода несколько: высокоточное решение разнообразных краевых задач для гармонических функций в многоугольнике; эталонное вычисление емкостей конденсаторов сложной формы; верификация численных методов конформного отображения, а также методов решения граничных задач для эллиптических уравнений в областях сложной конфигурации. Теоретико-функциональные методы хорошо работают даже в жестких режимах: наличие конструкционных элементов разных масштабов, входящих углов, разрезов, узких перешейков и т.п.

Задачи чебышевской оптимизации

Представления решений оптимизационных задач для многочленов и рациональных функций в случае, когда оптимизируемой величиной или наложенным ограничением задачи является равномерная норма, часто возможно в терминах римановых поверхностей. Приведем три примера.

1. Пусть как E – совокупность нескольких вещественных отрезков. Корни унимодального (monic) многочлена наименьшего уклонения можно использовать как итерационные параметры при обращении симметричных матриц со спектром на E. Соответствующая задача формулируется так:
Минимизировать норму $||P_n||_E := max_{x \in E}|P_n(x)|$ *многочлена со старшим коэффициентом 1*

Задачи чебышевской оптимизации

2. При построении n-стадийных явных устойчивых методов Рунге-Кутты p-го порядка точности возникает следующая оптимизационная задача для многочленов:

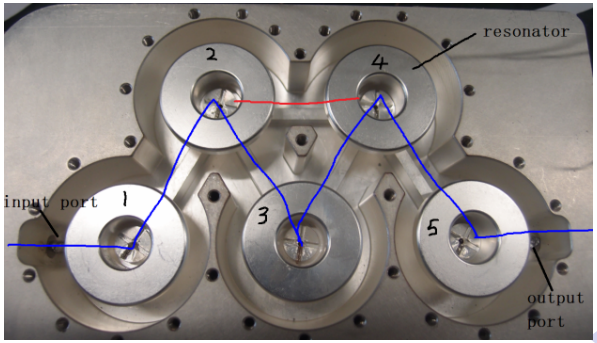
Найти вещественный многочлен $R_n(x)$ степени $\leq n$, приближающий в нуле показательную функцию с заданным порядком $p \leq n$: $R_n(x) = 1 + x + x^2/2! + \cdots + x^p/p! + o(x^p)$, для которого отклонение $||R_n||_E := \max\limits_{x \in E} |R_n(x)|$ не превосходит единицы на возможно большем отрезке $E = [-L, 0], \quad L > 0$.

Задачи чебышевской оптимизации

3. Следующая оптимизационная задача естественно возникает при проектировании многополосных микроволновых, числовых и аналоговых фильтров.

Дана совокупность E непересекающихся отрезков действительной оси. На каждом из отрезков импульсная функция $F(x)$ равна 0 (полоса задержки) или 1 (полоса пропускания). Требуется среди вещественных рациональных функций $R(x)$ заданной степени n найти наилучшее приближение импульсной функции в равномерной метрике на указаных отрезках:

$$||R - F||_E := max_{x \in E} |R(x) - F(x)| \qquad \longrightarrow \min .$$



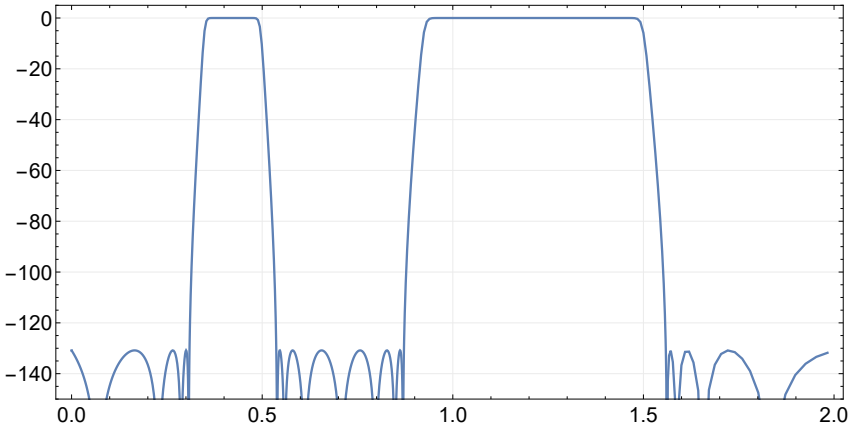
Рациональная оптимизация

Приведенная выше задача об оптимальном фильтре для случая двух отрезков совпадает с задачей о наилучшем равномерном приближении функции сигнум и была решена Е.И.Золотаревым в 1870-х годах. Это решение – дробь Золотарева – параметрически выражается в терминах эллиптических функций и оно было использовано немецким физиком и электротехником В.Кауэром для построения оптимальных фильтров низких и высоких частот, т.н. эллиптические фильтры.

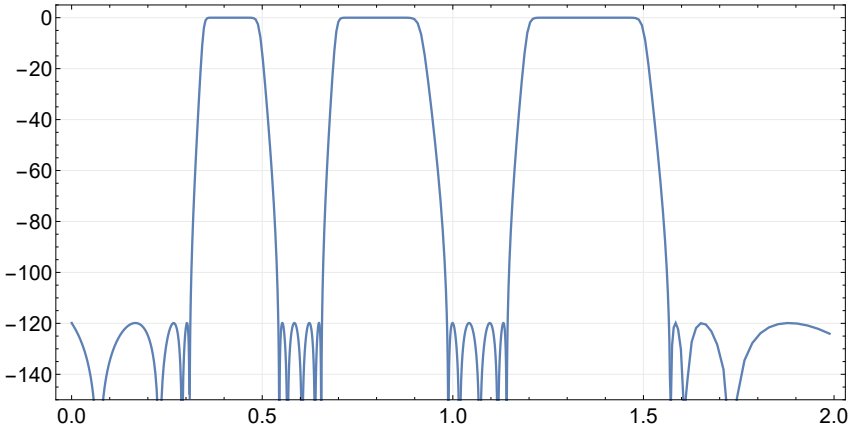
Последние обладают непревзойденными характеристиками такими как уровень подавления сигнала на полосе задержки или резкость перехода от полосы задержки к полосе

Примеры оптимальных фильтров

(all computed by Sergei Lyamaev)



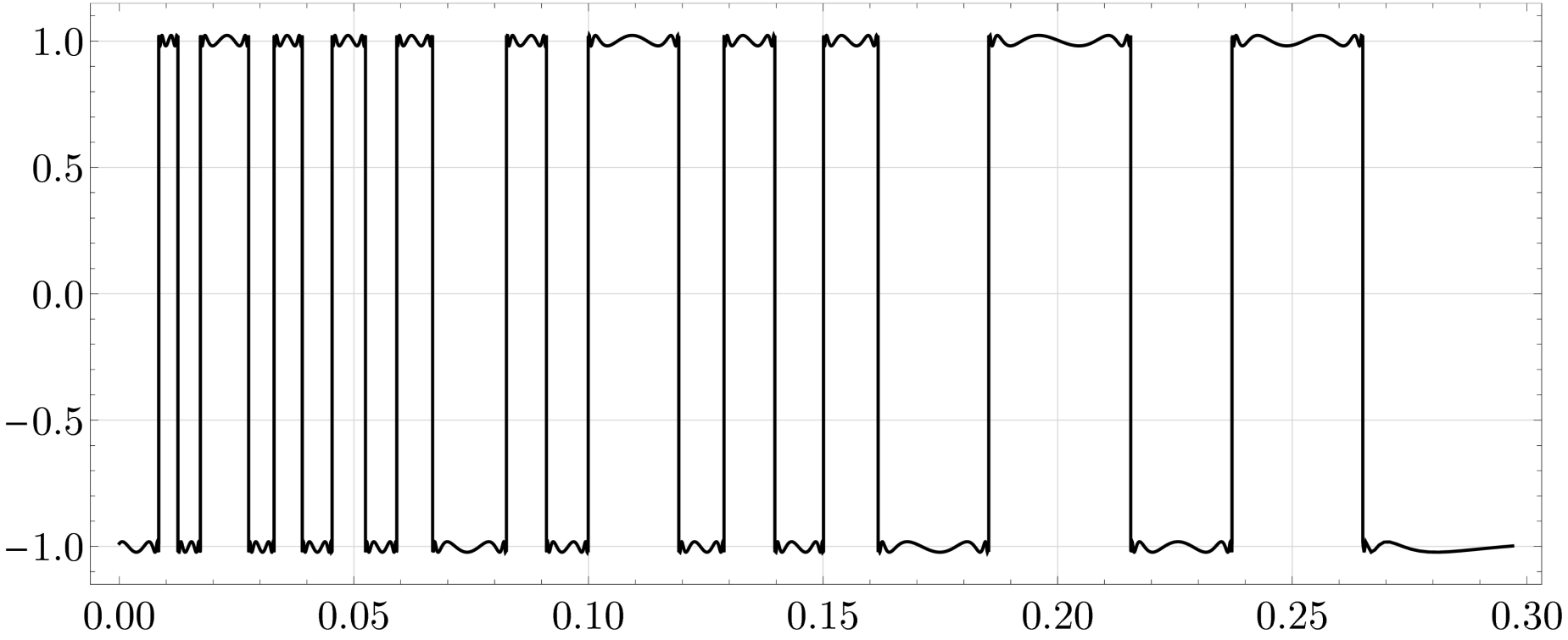
Optimal magnitude response of order 34 with ripple magnitude at the passbands $-5.10^{-5}dB$ and attenuation of $-130dB$ at the stopbands



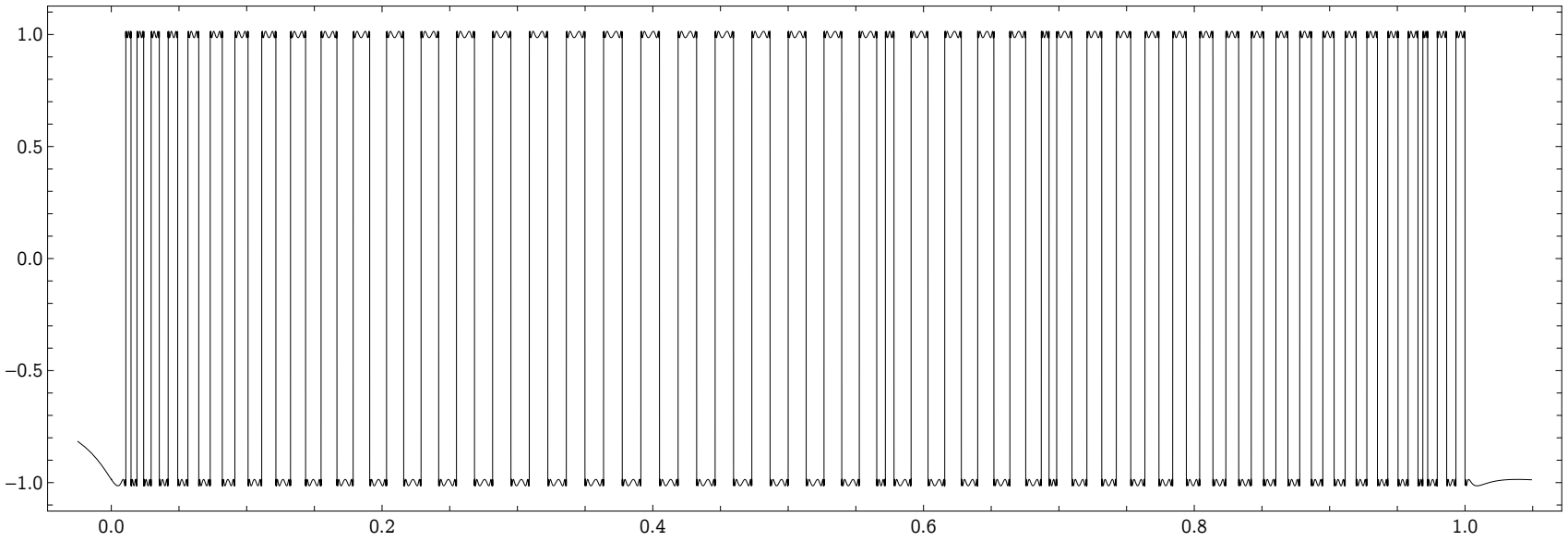
Optimal magnitude response of order 38 with ripple magnitude at the passbands $-10^{-5}dB$ and attenuation of $-120dB$ at the stopbands

Примеры оптимальных фильтров 2

Optimal magnitude response with 23 bands, deg $R \simeq 700$



Мировой рекорд: 99 рабочих полос!!



Амплитудно-частотная характеристика фильтра с 99 полосами пропускания и задержки

Решение алгебраических уравнений

Решать квадратные уравнения умели еще древние шумеры, вавилоняне и египтяне более 3000 лет назад. Кардано опубликовал формулы для решения уравнения 3-й степени (открыта дель Ферро) и 4 степени (придумана его учеником Феррари) в одной книге Ars Magna в 1545 году. Абель и Руффини и впоследствии Галуа доказали невозможность решения уравнеия общих уравнений 5 степени и всех больших при помощи арифметических действий и извлечения корней. Дальнейшие усилия математиков были направлены на расширение списка элементарных операций, что привело Эрмита в 1858 году к решению уравнений пятой степени с использованием эллиптических модулярных функций. За этим последовали работы Кронеккера (1861) и Бриоски (1867) о решении уравнений 6 степени правда не общего вида вида –см. историю вопроса в лекциях Ф.Кляйна. Наконец, Х.Умемура предложил в 1983 году универсальную формулу для решения алгебраических уравнений в терминах тэта функций Римана

Плоская гидродинамика, магнетика..

Аналогия Гельмгольца: движения идеальной жидкости $\leftrightarrow$ (вещественные) мероморфные дифференциалы на поверхностях. Пусть в плоской области имеется незавихренное стационарное течение $V = (V_1, V_2)$ несжимаемой жидкости.

$$rot\ V = 0; \qquad div\ V = 0.$$

Из первого следует, что у течения есть (локальный) потенциал p, а из второго – функция тока f:

$$V_1 = \frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2}$$
$$V_2 = \frac{\partial p}{\partial x_2} = -\frac{\partial f}{\partial x_1}.$$

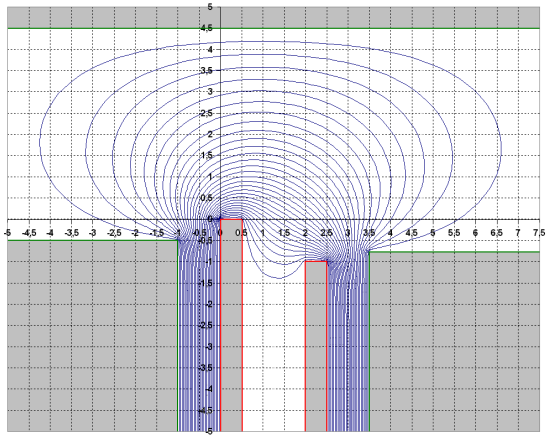
Это условия Коши-Римана для т.н. комплексного потенциала $F = p + if$ относительно комплексной независимой переменной$z = x_1 + ix_2$. Сам поток жидкости теперь связан с дифференциалом: $dF = (V_1 - iV_2)dz$. Запись течения в виде дифференциала удобна тем, что краевое условие непротекания записывается просто как вещественность дифференциала на границе.

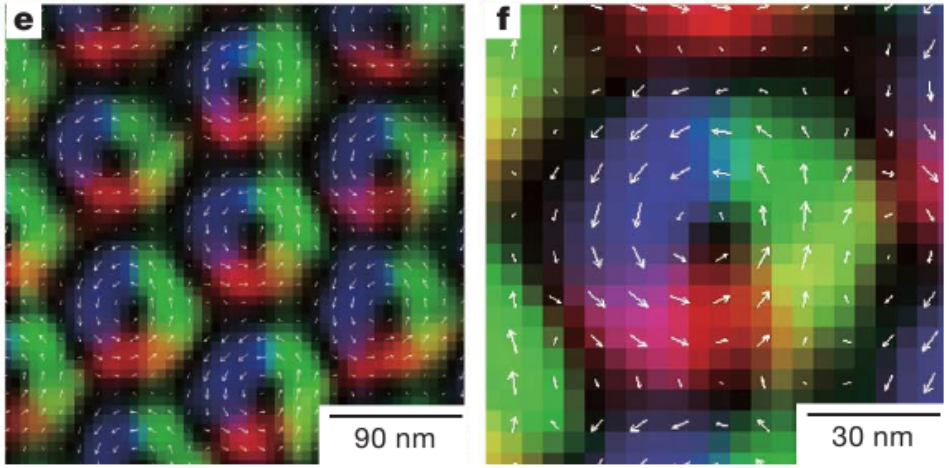
Плоская гидродинамика, магнетика..

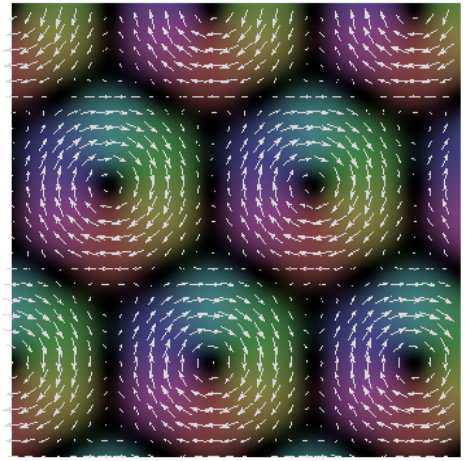
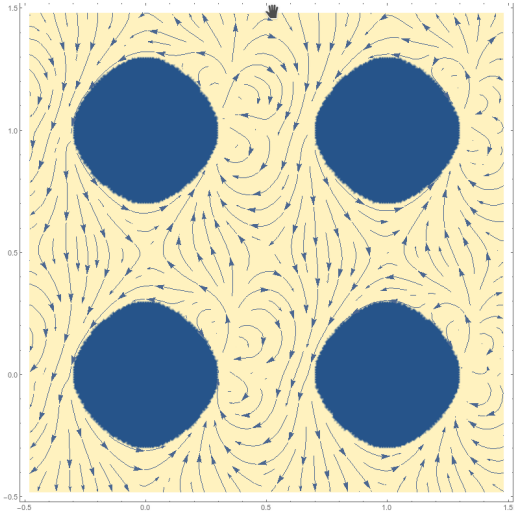
Тем самым мы получили конформно инвариантное описание течения жидкости: Если две области связаны конфорным отображением, то перенос дифференциала дает нам не только сохранение уравнений движения, но и краевых условий. Дифференциалы с особенностями позволяют описывать течения с источниками, стоками, вихрями, диполями. Перевод терминов теории функций и физических терминов дает словарик

Flow	Abelian differential
Complex potential of flow	Abelian integral
Simple sourse/sinc	Log pole
Vortex	Log pole with Im Res $\neq 0$
bifurcation point	zero of differential
stream lines	vertical foliation
equipotential lines	horizontal foliation
Circulation/Flux through the arc C	Re/Im part of integral along C.

Плоская гидродинамика, магнетика..





In[83]:= Show[{vectorsSuperposition, zcompOpacityS

Out[83]=